объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-185

С.Г.Горишний, А.Л.Катаев*, С.А.Ларин*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ЧЕТЫРЕХПЕТЛЕВОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ β-ФУНКЦИИ В КЭД В СХЕМАХ MS И MOM

Направлено в журнал "Physics Letters B"

*Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

1987

1. Введение

Понятие β - функций занимает центральное место в формализме метода ренормализационной группы (РГ), который был сформулирован в работах /1/. Объединение РГ и теории возмущений (ТВ) предполагает непосредственное подиаграммное ТВ вычисление коэффициентов β--функции, что является одной из основных проблем этого подхода.

Как хорошо известно, объединенное применение РГ и ТВ в КЭД имеет характерную особенность. А именно: выражение для инвариантного заряда, полученное с учетом лидирующего приближения для β - функции, имеет полюс при высоких энергиях, который может вызывать определенные сомнения в самосогласованности теории в этой области, лежащей, однако, далеко за точкой Большого Объединения. Отметим также, что учет высших поправок ТВ мог бы значительно повлиять на результат. Например, инвариантный заряд мог бы быть конечным при высоких энергиях, если бы Ψ - функция /2/, т.е. β -функция в схеме импульсных вычитаний (МОМ), имела бы нуль при положительных значениях α. Эта возможность была изучена в рамках так называемой программы конечной КЭД (см., например /3/, и ссылки в ней). Следует отметить, что эта программа противоречит неравенству $0 < \Psi(\alpha) < \frac{\alpha}{4\pi}$ /4/[x], которое следует из представления Челлена - Лемана. В любом случае определенный выбор из этих двух или любых других возможностей может быть сделан лишь с использованием информации о полной Ψ - функции.

Эта информация может быть получена, например, применением техники суммирования асимптотических рядов к результату ТВ /5/, которая предполагает, что известны оценки для высших коэффицентов ТВ в КЭД /6-8/, аналогичные оценкам в теории $g\varphi^4$ /9/. Следуя этому подходу, мы должны вычислить столько коэффициентов, сколько возможно, и, в действительности, четырехпетлевое приближение является минимальной начальной информацией, имея которую, можно надеяться провести намеченную программу.

В этой работе мы решили исследовать эту вычислительную проблему и получить аналитический четырехпетлевой результат для бета-функции

---

[x] Нормировка верхней границы этого неравенства определяется нашей нормировкой β - функций (см. уравнения (2.4) и (2.9) ниже).

в схеме минимальных вычитаний (MS) β_{MS}, Ψ – функции и схемно-независимой функции F_1. Последняя определяется вкладом в функцию вакуумной поляризации диаграмм с одной фермионной петлей /3/. Интерес к изучению этой функции возникает в связи с тем, что нуль Ψ – функции, если он имеет место, одновременно является нулем F_1 – функции /3/. Более того, асимптотические оценки для коэффициентов F_1 – функции /6,7/ известны с меньшими неопределенностями, чем аналогичные оценки для Ψ – функции /8/.

2. Вычисления

Во-первых, зафиксируем обозначения. Рассмотрим безмассовую КЭД с N – типом фермионов

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}_j (i\hat{\partial} - e\hat{A})\psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A_\mu)^2 . \tag{2.I}$$

Перенормированное выражение для поперечной части полного фотонного пропагатора имеет вид

$$i\mathcal{D}^R_{\mu\nu}(q^2,\mu^2,\alpha) = \frac{\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)}{iq^2\left(1 - \frac{\alpha}{4\pi}\Pi_R\left(\frac{\mu^2}{-q^2},\alpha\right)\right)} = \frac{\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)}{iq^2 Z_3 \left(1 - \frac{\alpha_B}{4\pi}\Pi_B(-q^2\alpha_B)\right)}, \tag{2.2}$$

где Π_R и Π_B – перенормированная и "голая" функции вакуумной поляризации, Z_3 – фотонная константа перенормировки и $\mu^{2\varepsilon}\alpha_B$ является "голым" зарядом, связанным соотношением $\alpha_B = Z_3^{-1}\alpha$ с перенормированным зарядом α. В этих формулах μ является произвольной массовой единицей размерной регуляризации, которая корректирует размерности перенормированных и "голых" величин, определенных в пространстве-времени размерности $D = 4 - 2\varepsilon$.

Перенормированная функция вакуумной поляризации может быть представлена в виде

$$1 - \frac{\alpha}{4\pi}\Pi_R\left(\frac{\mu^2}{-q^2},\alpha\right) = \sum_{n\geq 0} \Pi_n(\alpha)\, \ln^n\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right), \tag{2.3}$$

где

$$\Pi_n(\alpha) = \sum_{K=n}^{\infty} \Pi_{nK}(\alpha),$$

$$\Pi_{11}(\alpha) = F_1(\alpha) N .$$

Здесь Π_{nK} является вкладом диаграмм с K фермионными циклами в коэффициент перед $\ln^n(\mu^2/-q^2)$. Заметим, что лишь $K \geq n$ дают вклад в Π_n /3/. В частности, F_1 является схемно-независимым вкладом в коэффициент перед $\ln(\mu^2/-q^2)$ от диаграмм с одной фермионной петлей.

Выражение для β_{MS} – функции имеет следующий вид:

$$\beta_{MS}(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\mu^2\frac{d\alpha}{d\mu^2}\Bigg|_{\mu^{2\varepsilon}\alpha_B - \text{фиксировано}} = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\alpha}{1 - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln Z_3} . \tag{2.4}$$

В схеме MS Z_3 имеет вид

$$Z_3 = 1 + \hat{K}R'\Pi_B\left(\frac{\mu^2}{-q^2},\alpha\right) = 1 + \hat{K}\Pi_B\left(\frac{\mu^2}{-q^2},\alpha_B(\varepsilon,\alpha)\right), \tag{2.5}$$

где R' – операция вычитает подрасходимости, а $\hat{K}$ выделяет полюса по ε. Заметим, что сокращения расходимостей в (2.4) обеспечивают полезную проверку вычислений. Напомним также, что в MS –схеме Z_3 содержит лишь чистые полюса по ε.

В этой схеме трехпетлевое приближение Z_3 было получено в работах /I0-I2/. На четырехпетлевом уровне 58 диаграмм дают вклад в эту константу. После умножения на симметрийные коэффициенты мы получаем I53 диаграммы в согласии с результатом генерации диаграмм на компьютере /I3/.

В вычислениях мы использовали методы вычисления контрчленов в MS – схеме, развитые в /II,I2,I4,I5/, а именно: инфракрасное (ИК) преобразование /I2,II/, инфракрасную R^* – операцию /I4/, являющуюся обобщением ИК преобразований, и алгоритм интегрирования по частям /I5/. Последний был реализован в виде программы /I6/ на языке системы аналитических вычислений на ЭВМ, которая была использована в вычислениях. Общее время, затраченное на компьютере CDC-6500, составляет 65 часов.

После вычисления Z_3 и проверки сокращений полюсов в (2.4) мы получили следующий окончательный результат для β_{MS}:

$$\begin{aligned}\beta_{MS}(\alpha) = {} & \frac{4}{3}N\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 + 4N\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 - \left(2N + \frac{44}{9}N^2\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^4 + \\ & + \Big[\left(\frac{67785}{32} + \frac{6400}{3}\zeta(3) - 3200\zeta(5)\right)N - \\ & - \left(\frac{152}{9} + \frac{832}{9}\zeta(3)\right)N^2 - \frac{1232}{243}N^3\Big]\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^5 + O(\alpha^6).\end{aligned} \tag{2.6}$$

При N = I выражение (2.6) приобретает вид

$$\begin{aligned}\beta_{MS}(\alpha) = {} & \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 - \frac{62}{9}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^4 + \\ & + \left(\frac{16301003}{7776} + \frac{18368}{9}\zeta(3) - 3200\zeta(5)\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^5 + O(\alpha^6),\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\zeta(3) = 1{,}20205\ldots$, $\zeta(5) = 1{,}03692\ldots$ – дзета-функции Римана. Подробные описания вычислений, так же как более скрупулезные проверки будут описаны в более развернутой публикации.

Побочным результатом наших вычислений является четырехпетлевое приближение для функции F_1, которая может быть получена из (2.6) после выделения коэффициента перед N в линейном по N члене и опускании степени $\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)$:

$$F_1(\alpha) = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) + 4\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 + \left(\frac{67785}{32} + \frac{6400}{3}\zeta(3) - 3200\,\zeta(5)\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^4 + O(\alpha^5). \quad (2.8)$$

Это выражение согласуется на трехпетлевом уровне с результатом, полученным в /I7/. Отметим достаточно сложную структуру коэффициента порядка $O(\alpha^4)$ по сравнению с низшими поправками: лишь члены, пропорциональные $\zeta(4)$, появляющиеся на промежуточных стадиях вычислений, сократились в окончательном выражении. В частности, надежды на то, что все коэффициенты F_1 будут иметь рациональный вид /I7,3/, оказались неверными.

Хорошо известно, что коэффициенты β- функций являются схемно-зависимыми начиная с трехпетлевого уровня. Для того, чтобы перевести результат (2.6) из MS- схемы в схему МОМ и таким образом получить четырехпетлевое выражение для Ψ - функции, следует знать, как α_{MOM}, заряд в МОМ-схеме, связан с зарядом схемы MS– α_{MS}, входящим в формулы (2.6)-(2.7). Тогда $\Psi(\alpha_{MOM})$ может быть получена из выражения

$$\Psi(\alpha_{MOM}) = \frac{\partial \alpha_{MOM}(\alpha_{MS})}{\partial \alpha_{MS}}\,\beta(\alpha_{MS}). \quad (2.9)$$

Напомним, что МОМ-схема определена вычитаниями в фотонном пропагаторе в евклидовой точке $q^2 = -\lambda^2$. Таким образом, инвариантный заряд, который определяется как $\alpha\,(1 - \alpha/4\pi\,\Pi_R)^{-1}$, нормирован на α_{MOM} в точке $q^2 = -\lambda^2$. Так что мы имеем

$$\alpha_{MOM}(\alpha_{MS}) = \alpha_{MS}\left(1 - \frac{\alpha_{MS}}{4\pi}\Pi_R\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}, \alpha_{MS}\right)\right)^{-1}, \quad (2.10)$$

где Π_R вычисляется в MS -схеме на трехпетлевом уровне вплоть до члена порядка $O(\varepsilon^0)$. Обращая (2.I0) по отношению к α_{MS} и подставляя его в (2.9), мы получаем выражение для Ψ - функции

$$\Psi(\alpha) = \frac{4}{3}N\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 + 4N\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 + \left[-2N + \left(\frac{64}{3}\zeta(3) - \frac{184}{9}\right)N^2\right]\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^4 +$$
$$+\Big[\left(\frac{67785}{32} + \frac{6400}{3}\zeta(3) - 3200\,\zeta(5)\right)N -$$
$$-\left(-\frac{1592}{27} - \frac{512}{3}\zeta(3) + \frac{1280}{3}\zeta(5)\right)N^2 +$$
$$+\left(128 - \frac{256}{3}\zeta(3)\right)N^3\Big]\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^5 + O(\alpha^6). \quad (2.11)$$

При $N = 1$ выражение (2.II) приобретает вид

$$\Psi(\alpha) = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^3 + \left(\frac{64}{3}\zeta(3) - \frac{202}{9}\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^4 +$$
$$+\left(\frac{1991731}{864} + \frac{6656}{3}\zeta(3) - \frac{10880}{3}\zeta(5)\right)\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^5 + O(\alpha^6). \quad (2.12)$$

При $N = 1$ и $N = 2,3$ трехпетлевое выражение для (2.II) совпадает с результатами /I8/ и /I9/, полученными ранее.

3. Обсуждение

Для краткого предварительного обсуждения более удобно использовать следующий численный вид результатов (2.6), (2.8) и (2.II) при $N = 1$:

$$\beta_{MS}(\alpha) = 0{,}0833\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 0{,}0625\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 0{,}0269\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 1{,}2025\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5, \quad (3.1)$$

$$F_1(\alpha) = 0{,}3333\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0{,}25\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 - 0{,}0312\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 5{,}3300\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4, \quad (3.2)$$

$$\Psi(\alpha) = 0{,}0833\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 0{,}0625\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 0{,}0124\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 1{,}1832\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5. \quad (3.3$$

Отметим относительно большие численные значения всех четырехпетлевых коэффициентов. Однако следует подчеркнуть, что грубый критерий применимости рядов ТВ для численных оценок $|a_{n+1}|\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) < |a_n|$, где a_n – n- й коэффициент ТВ в разложении по $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$, нарушается при достаточно больших значениях константы связи. Этими значениями являются 0,07, 0,02 и 0,09 соответственно для (3.I), (3.2) и (3.3). Напомним в связи с этими числами значения постоянной тонкой структуры $\alpha^* = 1/137 \approx 0{,}0073$ и бегущей константы электрослабой модели $SU(2)\times U(1)$ в точке Большого Объединения $\alpha(M_x) \simeq 1/40 \approx 0{,}025$. Другой критерий, а именно неравенство $0<\Psi(\alpha)<\frac{\alpha}{4\pi}$, нарушается при значительно больших значениях $\alpha \gtrsim 1,9$. Таким образом, как следует из обоих критериев, при достаточно больших α выражения (3.I)-(3.3) не могут быть использованы для количественных оценок.

Это утверждение является достаточно тривиальным фактом из-за асимптотической природы соответствующих разложений. Асимптотические оценки для a_n при больших n /7-9/ предсказывают знакопеременное поведение для β, F_1 и Ψ - функций. Это предсказание кажется верным для (3.I) и (3.2), но знакопеременная природа при больших n для Ψ - функции не проявляется в (3.3) на четырехпетлевом уровне. Последний факт определенно говорит нам о том, что коэффициенты (3.3) еще не находятся в асимптотическом режиме. Заметим также, что выражения (3.2) и (3.3) не имеют нулей при малых положительных $\alpha \lesssim 0,03$, где применимость ТВ является менее проблематичной.

В заключение этого раздела подчеркнем еще одну ярко выраженную особенность асимптотического поведения коэффициентов F_1 и Ψ-функций. Как было получено в /6,7/, хотя с некоторыми неопределенностями, коэффициенты F_1 имеют $n!$ рост, в то время как коэффициенты Ψ растут в соответствии с $\sqrt{n!}$ законом/8/ со степенными поправками порядка $O(\frac{1}{n})$ в обоих случаях. Природа последней $\sqrt{n!}$ оценки, как кажется, объясняется сокращениями между вкладами диаграмм с различным числом фермионных циклов. Этот факт действительно наблюдался на четырехпетлевом уровне (см. выражение (2.II)).

Более весомые аргументы о точном асимптотическом поведении рассмотренных функций могут быть получены лишь после пересуммирования четырехпетлевых результатов ТВ, например при помощи методов/5/. Мы собираемся рассмотреть эти вопросы в дальнейшем.

Мы благодарны В.А. Матвееву, В.А. Мещерякову, Д.В. Ширкову и А.Н. Тавхелидзе за постоянную поддержку. Нам хотелось бы выразить нашу признательность М. Бейкеру, К.Г. Четыркину, И.Ф. Гинзбургу, Н.В. Красникову, Ю.А. Кубышину, О.В. Тарасову и Ф.В. Ткачеву за стимулирующие дискуссии на различных стадиях работы. Нам приятно поблагодарить Д.Ю. Бардина, А.В. Сидорова и О.В. Селюгина за обсуждение различных вопросов, связанных с работой вычислительного центра ОИЯИ.

Литература

I. Stueckelberg E., Peterman A.-Helv. Phys. Acta, 1953, 26, p. 499.
Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. - ДАН СССР, 1955, 103, с.391.
Логунов А.А. - ЖЭТФ, 1956, 30, с.793.

2. Gell-Mann M., Low F.E.-Phys. Rev., 1954, 95, p. 1360.
3. Adler S.-Phys. Rev., 1972, D5, p. 3021.
Phys. Rev., 1973, D7, 1948 (E).
Johnson M., Baker M.-Phys. Rev., 1973, D8, p. 1110.
4. Krasnikov N.V.-Rep. Math. Phys., 1980, 17, p. 309.
Krasnikov N.V.-Nucl. Phys., 1981, B192, p. 497.
Yamagishi H.-Phys. Rev., 1982, D25, p. 464.
5. Kazakov D.I., Shirkov D.V.-Fortschr. Phys., 1980, 28, p. 465.
6. Itzykson C., Parisi G., Zuber J.B.-Phys. Rev., 1977, D16, p.996.
7. Богомольный Е.Б., Кубышин Ю.А. - ЯФ, 1981, 34, с.1535;
Богомольный Е.Б., Кубышин Ю.А. - ЯФ, 1982, 35, с.202.
8. Bogomolny E.B., Fateyev V.A.-Phys. Lett., 1978, 76B, p. 210.
9. Липатов Л.Н. - ЖЭТФ, 1977, 72, с.411.
10. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Preprint INR P-0170, M., 1980.
11. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Nucl.Phys.,1980, B174, p. 345.
12. Владимиров А.А. - ТМФ, 1980, 93, с.210.
13. Sasaki T.J. Comp. Phys., 1976, 22, p. 189.
14. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1982, 114B, p. 340.
Chetyrkin K.G., Smirnov V.A. Phys. Lett., 1984, 144B, p.419.
15. Tkachov F.V. Phys. Lett., 1981, 100B, p. 65.
Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Nucl. Phys., 1981, B192, p. 159.
16. Горишний С.Г., Ларин С.А., Ткачев Ф.В., Препринт ИЯИ АН СССР, П-0330, М., 1984.
17. Rosner J. Ann. Phys., 1967, 44, p. 11.
18. Baker M., Johnson K., Phys. Rev., 1969, 183, p. 1292.
19. Acherya A., Nigam B.P. Nucl. Phys., 1978, B141, p.178;
Nucl. Phys., 1979, B150, p.442 (E).
Acherya A., Nigam B.P. Nuovo Cimento, 1985, 88A, p. 293.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 марта 1987 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Горишний С.Г., Катаев А.Л., Ларин С.А. Р2-87-185
Аналитический четырехпетлевой результат для β-функции в КЭД в схемах MS и MOM

Аналитически вычислены четырехпетлевые поправки к ренормгрупповым β-функциям КЭД в схемах минимальных вычитаний и импульсных вычитаний (β_{MS} и ψ-функции), а также к схемно-независимому вкладу в эти функции диаграмм с однофермионным циклом (F_1-функция). Кратко обсуждается асимптотический характер поведения полученных рядов теории возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A. P2-87-185
Analytical Four-Loop Result for β-Function in QED in MS and MOM Schemes

Four-loop corrections to the renormalization group QED β-functions in the minimal and momentum subtraction schemes (β_{MS} and ψ-functions) and the scheme-independent one-fermion-circle contribution to these functions (F_1 - function) are analytically calculated. The obtained results are briefly discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987