объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-137

В.К.Мельников

РАСПАД И СЛИЯНИЕ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x, y

Направлено в журнал "Physica D".

1987

Процессы, в которых две или большее число волн сливаются в одну или, наоборот, одна волна распадается на несколько волн, широко распространены в природе и встречаются в гидродинамике, физике плазмы и т.д. Для описания этого явления существуют достаточно хорошо разработанные методы. В последнее время в изучение этого явления весомый вклад вносит метод обратной задачи рассеяния /1/.

В настоящей работе это явление обнаружено в системе, описываемой уравнениями вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0\,,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,. \tag{I}$$

Здесь u – амплитуда длинной волны, φ – комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2 = 1$. В работе найдены точные решения системы (I), которые при $t\to-\infty$ имеют асимптотику одной уединенной волны, а при $t\to\infty$ распадаются на несколько солитонов, имеющих разные фазовые скорости. При этом указанные выше солитоны могут двигаться как в том же самом направлении, что и уединенная волна, так и в прямо противоположном направлении. Таким образом, эти решения описывают полный распад одной уединенной волны на несколько солитонов. Если теперь в указанных выше решениях заменить t на $-t$, x на $-x$, y на $-y$, а функцию φ заменить на комплексно-сопряженную функцию $\bar\varphi$, то полученные таким образом новые решения системы (I), очевидно, описывают процесс слияния нескольких солитонов в одну уединенную волну. Далее, в работе получены точные решения системы (I), которые при $t\to-\infty$ имеют асимптотику одной (исходной) уединенной волны, а при $t\to\infty$ распадаются на (конечную) уединенную волну и несколько солитонов. При этом конечная уединенная волна движется в том же самом направлении, что и исходная уединенная волна, а солитоны могут двигаться как в том же самом направлении, что и уединенные волны, так и в прямо противоположном направлении. Таким образом, эти решения описывают распад исходной уединенной волны на конечную уединенную волну и несколько солитонов или частичный распад уединенной волны. Если в этих решениях заменить соответственно t, x, y на $-t, -x, -y$, а функцию φ заменить на комплексно-сопряженную функцию $\bar\varphi$, то полученные таким образом новые решения системы (I) описывают захват уединенной волной нескольких солитонов, в результате чего образуется новая уединенная волна с большим "весовым" числом.

Указанные выше решения получаются из многосолитонного решения системы (I) при специальном выборе параметров. Делается это следующим образом.

§ 1. N – солитонное решение системы (I)

Согласно результатам работы /2/ N – солитонное решение системы (I) получается следующим образом. Пусть b и γ – квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$b_{m,n}=\frac{a_m}{\omega_m+\bar\omega_n}\exp[(\omega_m+\bar\omega_n)x-i\omega_m^2t-i(\omega_m^2-\bar\rho_m^2)y],$$
$$\gamma_{m,n}=\frac{i\varkappa\bar a_m}{\rho_m^2-\bar\rho_n^2}\exp[i\bar\omega_m^2t+i(\bar\omega_m^2-\rho_m^2)y]\,,\quad m,n=1,\dots,N, \tag{1.1}$$

где параметры a_m, ω_m, ρ_m не зависят от координат t, x, y. Пусть, далее, λ – вектор-столбец с N компонентами λ_m вида

$$\lambda_m=a_m\exp[\omega_mx-i\omega_m^2t-i(\omega_m^2-\bar\rho_m^2)y]\,,\quad m=1,\dots,N, \tag{1.2}$$

а e – вектор-строка с N компонентами e_m, равными единице. Возьмем матрицы

$$A=\begin{vmatrix}1 & -\gamma\\ b & 1\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}0 & 0 & e\\ 0 & 1 & -\gamma\\ \lambda & b & 1\end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

где 1 – единичная матрица порядка N, и положим

$$D=\det A\,,\quad \Phi=\det B. \tag{1.4}$$

Тогда функции

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D\,,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D} \tag{1.5}$$

удовлетворяют системе (I) всюду, где $D\neq 0$.

С помощью (1.3) и (1.4) нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$D=\det(1+b\gamma)\,,\quad \Phi=\det\begin{vmatrix}0 & e\\ \lambda & 1+b\gamma\end{vmatrix}.$$

Пусть теперь Λ и R – квадратные матрицы порядка N соответственно с элементами

$$\Lambda_{m,n}=\frac{\lambda_m\bar{\lambda}_n}{\omega_m+\bar{\omega}_n}\,,\quad R_{m,n}=\frac{i\varkappa}{\rho_m^2-\bar{\rho}_n^2}\,,\ m,n=1,\ldots,N. \qquad (I.6)$$

В силу (I.I), (I.2) и (I.6) справедливо равенство $\theta\gamma=\Lambda R$. Отсюда следует, что

$$D=\det\hat{A}\,,\quad \Phi=\det\hat{B}\,, \qquad (I.7)$$

где

$$\hat{A}=\begin{vmatrix}1 & -R\\ \Lambda & 1\end{vmatrix}\,,\quad \hat{B}=\begin{vmatrix}0 & 0 & e\\ 0 & 1 & -R\\ \lambda & \Lambda & 1\end{vmatrix}. \qquad (I.8)$$

Полагая при $m=1,\ldots,N$

$$\omega_m=\mu_m+i\nu_m\,,\quad \rho_m^2=\tau_m+\bar{\omega}_m^2+2i\mu_m\sigma_m\,,$$

$$Z_m=x+2\sigma_m y+2\nu_m t\,,\quad \theta_m=\nu_m x+\tau_m y-(\mu_m^2-\nu_m^2)t\,, \qquad (I.9)$$

где $\mu_m,\nu_m,\sigma_m,\tau_m$ – вещественные величины, запишем элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ в виде

$$\Lambda_{m,n}=\frac{a_m\bar{a}_n}{\omega_m+\bar{\omega}_n}\exp[\mu_m Z_m+\mu_n Z_n+i(\theta_m-\theta_n)]\,, \qquad (I.10)$$

$$\lambda_m=a_m\exp(\mu_m Z_m+i\theta_m)\,,\quad m,n=1,\ldots,N.$$

Предположим, наконец, что величины μ_m,ν_m,σ_m удовлетворяют требованиям

$$\operatorname{sign}\mu_1=\ldots=\operatorname{sign}\mu_N\,,\quad (\sigma_m-\nu_m)\varkappa>0\,,\ m=1,\ldots,N. \qquad (I.11)$$

В этой ситуации функция D принимает только положительные значения при любых вещественных значениях t,x,y, и, следовательно, определенное таким образом решение (I.5) системы (I) не имеет особенностей при любых вещественных значениях координат t,x,y. Подробные доказательства всех этих утверждений содержатся в названной выше работе/2/.

Выясним теперь, каково поведение у этого решения. В том случае, когда все величины ω_m разные, все величины ρ_m^2 разные и все величины σ_m разные, рассматриваемое нами решение системы (I) описывает взаимодействие N солитонов вида

$$u_m=\frac{2\mu_m^2}{\operatorname{ch}^2(\mu_m Z_m+\delta_m)}\,,\quad \varphi_m=\frac{c_m\exp(i\theta_m)}{\operatorname{ch}(\mu_m Z_m+\delta_m)}\,, \qquad (I.12)$$

распространяющихся на плоскости x,y под разными углами к оси x. При этом вещественные параметры μ_m,ν_m,σ_m и комплексная величина c_m удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu_m-\sigma_m)\mu_m^2+\varkappa|c_m|^2=0\,,\quad m=1,\ldots,N.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае взаимодействие любой пары солитонов происходит в некоторой ограниченной области на плоскости x,y, а вне этой области оно является пренебрежимо малым. Результатом этого является сильное искажение каждого из солитонов в области взаимодействия. Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любого из солитонов его искажение стремится к нулю. На большом расстоянии от области взаимодействия результат взаимодействия с каждым из солитонов выражается только в фазовых сдвигах.

Действительно, занумеруем величины a_m,ω_m,ρ_m так, чтобы при любых $m\neq n$ выполнялось неравенство

$$(\sigma_m-\sigma_n)\mu_m>0\,,\qquad \text{если } m<n\,,$$
$$(\sigma_m-\sigma_n)\mu_m<0\,,\qquad \text{если } m>n. \qquad (I.13)$$

Это возможно, поскольку все величины $\mu_1,\ldots,\mu_N$ по предположению имеют одинаковый знак. Возьмем теперь произвольное r, такое, что $1\le r\le N$, и с учетом (I.10) представим элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ в виде

$$\Lambda_{m,n}=\frac{a_m\bar{a}_n}{\omega_m+\bar{\omega}_n}\exp[(\mu_m+\mu_n)Z_r+i(\theta_m-\theta_n)]F_{m,r}F_{n,r}\,, \qquad (I.14)$$

$$\lambda_m=a_m\exp(\mu_m Z_r+i\theta_m)F_{m,r}\,,\quad m,n=1,\ldots,N, \qquad (I.15)$$

где

$$Z_r=x+2\sigma_r y+2\nu_r t\,,\quad F_{m,r}=\exp[2(\sigma_m-\sigma_r)\mu_m y+2(\nu_m-\nu_r)\mu_m t].$$

Возьмем, далее, матрицу Ω с элементами $\Omega_{m,n}=(\omega_m+\bar{\omega}_n)^{-1}$, $m,n=1,\ldots,N$. Пусть Ω_r^+ – минор r-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы Ω, а Ω_r^- – минор $(N-r+1)$-го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы Ω, $r=1,\ldots,N$. Пусть матрица $\hat{\Omega}_r^+$ получается из матрицы Ω_r^+ с помощью замены элементов последнего столбца этой матрицы на единицы, а матрица $\hat{\Omega}_r^-$ получается из матрицы Ω_r^- при замене на единицы элементов первого столбца этой матрицы. Аналогичным образом возьмем матрицу R с элементами $R_{m,n} = i\varkappa(\rho_m^2 - \bar\rho_n^2)^{-1}$, $m,n = 1,\dots,N$, и пусть R_r^+ – минор r – го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы R, R_r^- – минор $(N-r+1)$ –го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы R, $r = 1,\dots,N$. Пусть, наконец, матрица $\hat R_r^+$ получается из матрицы R_r^+ с помощью замены элементов последней строки этой матрицы на единицы, а матрица $\hat R_r^-$ получается из матрицы R_r^- при замене на единицы элементов первой строки этой матрицы. На основании (I.13) и (I.15) при любом фиксированном t и $y \to -\infty$ имеем $F_{m,r} \to 0$, если $m < r$, и $F_{m,r} \to \infty$, если $m > r$. Отсюда в силу (I.7), (I.8) и (I.14) следует, что при любых фиксированных t, Z_r, а $y \to -\infty$, справедливы асимптотики

$$D \sim D_r^- \prod_{m=r+1}^{N} \left\{ |a_m|^2 \exp(2\mu_m Z_m) \right\},$$

$$\Phi \sim \Phi_r^- \prod_{m=r+1}^{N} \left\{ |a_m|^2 \exp(2\mu_m Z_m) \right\}, \tag{I.16}$$

где

$$D_r^- = |a_r|^2 \exp(2\mu_r Z_r) \det(R_r^- \Omega_r^-) + \det(R_{r+1}^- \Omega_{r+1}^-),$$

$$\Phi_r^- = -a_r \exp(\mu_r Z_r + i\theta_r) \det(\hat R_r^- \hat\Omega_r^-), \quad r = 1,\dots,N. \tag{I.17}$$

При этом считается по определению $R_{N+1}^- = \Omega_{N+1}^- = 1$. Нетрудно убедиться,что при $r = 1,\dots,N$ справедливы равенства

$$\frac{\det \Omega_r^-}{\det \Omega_{r+1}^-} = \frac{1}{2\mu_r} \prod_{m=r+1}^{N} \left| \frac{\omega_r - \omega_m}{\omega_r + \bar\omega_m} \right|^2, \quad \frac{\det \hat\Omega_r^-}{\det \Omega_{r+1}^-} = \prod_{m=r+1}^{N} \frac{\bar\omega_r - \bar\omega_m}{\bar\omega_r + \omega_m},$$

$$\frac{\det R_r^-}{\det R_{r+1}^-} = \frac{\varkappa}{4(\sigma_r - \nu_r)\mu_r} \prod_{m=r+1}^{N} \left| \frac{\rho_r^2 - \rho_m^2}{\rho_r^2 - \bar\rho_m^2} \right|^2, \quad \frac{\det \hat R_r^-}{\det R_{r+1}^-} = \prod_{m=r+1}^{N} \frac{\rho_r^2 - \rho_m^2}{\rho_r^2 - \bar\rho_m^2}. \tag{I.18}$$

Положим

$$\alpha_r = \frac{\varkappa |a_r|^2}{8(\sigma_r - \nu_r)\mu_r^2}, \quad \beta_{r,m} = \left| \frac{\omega_r - \omega_m}{\omega_r + \bar\omega_m} \right|^2 \left| \frac{\rho_r^2 - \rho_m^2}{\rho_r^2 - \bar\rho_m^2} \right|^2. \tag{I.19}$$

Согласно (I.5) и (I.16)-(I.19) получаем, что при $y \to -\infty$ солитон с номером r обладает асимптотикой

$$u \sim u_r^- = \frac{2\mu_r^2}{ch^2(\mu_r Z_r + \delta_r^-)}, \quad \varphi \sim \varphi_r^- = \frac{c_r^- \exp(i\theta_r)}{ch(\mu_r Z_r + \delta_r^-)}, \tag{I.20}$$

где

$$\delta_r^- = \frac{1}{2} \ln \alpha_r + \sum_{m=r+1}^{N} \frac{1}{2} \ln \beta_{r,m},$$

$$c_r^- = -\frac{1}{2} a_r \exp(-\delta_r^-) \prod_{m=r+1}^{N} \frac{(\bar\omega_r - \bar\omega_m)(\rho_r^2 - \rho_m^2)}{(\bar\omega_r + \omega_m)(\rho_r^2 - \bar\rho_m^2)}. \tag{I.21}$$

Аналогичным образом при любых фиксированных t и Z_r, а $y \to \infty$ справедливы асимптотики

$$D \sim D_r^+ \prod_{m=1}^{r-1} \left\{ |a_m|^2 \exp(2\mu_m Z_m) \right\},$$

$$\Phi \sim \Phi_r^+ \prod_{m=1}^{r-1} \left\{ |a_m|^2 \exp(2\mu_m Z_m) \right\}, \tag{I.22}$$

где

$$D_r^+ = |a_r|^2 \exp(2\mu_r Z_r) \det(R_r^+ \Omega_r^+) + \det(R_{r-1}^+ \Omega_{r-1}^+),$$

$$\Phi_r^+ = -a_r \exp(\mu_r Z_r + i\theta_r) \det(\hat R_r^+ \hat\Omega_r^+). \tag{I.23}$$

При этом считается по определению $R_0^+ = \Omega_0^+ = 1$. Нетрудно убедиться, что при $r = 1,\dots,N$ справедливы соотношения

$$\frac{\det \Omega_r^+}{\det \Omega_{r-1}^+} = \frac{1}{2\mu_r} \prod_{m=1}^{r-1} \left| \frac{\omega_m - \omega_r}{\omega_m + \bar\omega_r} \right|^2, \quad \frac{\det \hat\Omega_r^+}{\det \Omega_{r-1}^+} = \prod_{m=1}^{r-1} \frac{\omega_r - \omega_m}{\omega_r + \bar\omega_m},$$

$$\frac{\det R_r^+}{\det R_{r-1}^+} = \frac{\varkappa}{4(\sigma_r - \nu_r)\mu_r} \prod_{m=1}^{r-1} \left| \frac{\rho_m^2 - \rho_r^2}{\rho_m^2 - \bar\rho_r^2} \right|^2, \quad \frac{\det \hat R_r^+}{\det R_{r-1}^+} = \prod_{m=1}^{r-1} \frac{\bar\rho_r^2 - \bar\rho_m^2}{\bar\rho_r^2 - \rho_m^2}. \tag{I.24}$$

В силу (I.5),(I.19) и (I.22)-(I.24) получаем, что при $y \to \infty$ солитон с номером r обладает асимптотикой

$$u \sim u_r^+ = \frac{2\mu_r^2}{ch^2(\mu_r Z_r + \delta_r^+)}, \quad \varphi \sim \varphi_r^+ = \frac{c_r^+ \exp(i\theta_r)}{ch(\mu_r Z_r + \delta_r^+)}, \tag{I.25}$$

где

$$\delta_r^+ = \frac{1}{2} \ln \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} \ln \beta_{r,m},$$

$$c_r^+ = -\frac{1}{2} a_r \exp(-\delta_r^+) \prod_{m=1}^{r-1} \frac{(\omega_r - \omega_m)(\bar{\rho}_r^2 - \bar{\rho}_m^2)}{(\omega_r + \bar{\omega}_m)(\bar{\rho}_r^2 - \rho_m^2)} . \qquad (I.26)$$

С учетом (I.I9),(I.2I) и (I.26) находим, что

$$\delta_r = \delta_r^+ - \delta_r^- = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r-1} \ln \beta_{r,m} - \frac{1}{2} \sum_{m=r+1}^{N} \ln \beta_{r,m} ,$$

$$\sum_{r=1}^{N} \delta_r = 0 \quad , \quad |c_r^+|^2 = |c_r^-|^2 = 2\varkappa(\sigma_r - \nu_r)\mu_r^2 .$$

Далее, в случае, когда все величины ω_m разные, все величины ρ_m^2 разные и все величины ν_m разные, а все величины σ_m равны между собой, получаемое указанным выше способом решение системы (I) описывает взаимодействие N солитонов вида (I.I2), распространяющихся на плоскости x, y вдоль одной и той же прямой. В этом случае взаимодействие любой пары солитонов ограничено во времени и стремится к нулю при $t \to \pm \infty$. Это приводит к существенному искажению каждого из солитонов в течение некоторого конечного промежутка времени. Однако при $t \to \pm \infty$ искажение любого из солитонов стремится к нулю. Окончательный результат взаимодействия каждого солитона со всеми остальными выражается только в фазовых сдвигах.

Действительно, занумеруем величины a_m, ω_m, ρ_m так, чтобы при любых $m \neq n$ выполнялось неравенство

$$(\nu_m - \nu_n)\mu_m > 0 , \quad \text{если} \quad m < n ,$$
$$(\nu_m - \nu_n)\mu_m < 0 , \quad \text{если} \quad m > n . \qquad (I.27)$$

Положим $\sigma_1 = \ldots = \sigma_N = \sigma$. Возьмем теперь произвольное r, такое, что $1 \le r \le N$, и с учетом (I.9), (I.I0) представим элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ в виде

$$\Lambda_{m,n} = \frac{a_m \bar{a}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n} \exp[(\mu_m + \mu_n) Z_r + i(\theta_m - \theta_n)] G_{m,r} G_{n,r} , \qquad (I.28)$$
$$\lambda_m = a_m \exp(\mu_m Z_r + i\theta_m) G_{m,r} , \quad m, n = 1, \ldots, N ,$$

где в отличие от (I.I4) и (I.I5) имеем

$$Z_r = x + 2\sigma y + 2\nu_r t , \quad G_{m,r} = \exp[2(\nu_m - \nu_r)\mu_m t] . \qquad (I.29)$$

С помощью (I.27) и (I.29) находим, что при $t \to -\infty$ справедливо соотношение $G_{m,r} \to 0$, если $m < r$, и $G_{m,r} \to \infty$, если $m > r$. В соответствии с (I.28) отсюда следует, что при любом фиксированном значении величины Z_r и $t \to -\infty$ справедливы асимптотики (I.I6) и (I.I7). Это значит, что в рассматриваемой сейчас ситуации солитон с номером r при $t \to -\infty$ обладает асимптотикой вида (I.20) с $\sigma_r = \sigma$. Аналогичным образом убеждаемся, что при любом фиксированном значении величины Z_r и $t \to \infty$ справедливы асимптотики (I.22) и (I.23). Следовательно, солитон с номером r при $t \to \infty$ обладает асимптотикой вида (I.25) с $\sigma_r = \sigma$.

Наконец, в случае, когда ω_m все разные и величины ρ_m^2 все разные, а все величины σ_m совпадают между собой и все величины ν_m совпадают между собой, наше решение представляет собой одну уединенную волну, движущуюся как одно целое. Поскольку при этом параметры τ_m и $\mu_m^2 - \nu_m^2$ не обязаны совпадать между собой при разных значениях номера m, то получившаяся уединенная волна может осциллировать.

Действительно, пусть $\sigma = \sigma_1 = \ldots = \sigma_N$, $\nu = \nu_1 = \ldots = \nu_N$, $Z = x + 2\sigma y + 2\nu t$. Нетрудно видеть, что в этом случае элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ имеют вид

$$\Lambda_{m,n} = \frac{a_m \bar{a}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n} \exp[(\mu_m + \mu_n) Z + i(\theta_m - \theta_n)] ,$$
$$\lambda_m = a_m \exp(\mu_m Z + i\theta_m) , \quad m, n = 1, \ldots, N . \qquad (I.30)$$

Пусть $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$, $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_N$. Тогда с помощью (I.7), (I.8) и (I.30) легко получаем, что $D \to 1$, $\phi \to 0$, если $\mu Z \to -\infty$, а если $\mu Z \to \infty$, то $D\exp(-\mu Z) \to \det(a\Omega \bar{a} R)$, $\phi\exp(-\mu Z) \to 0$. Отсюда согласно (I.5) следует, что $u \to 0$, $\varphi \to 0$ при $Z \to \pm\infty$.

По числу N солитонов, входящих в рассмотренную выше уединенную волну, будем говорить, что уединенная волна имеет "весовое" число N.

Перечисленные выше три типа многосолитонных решений являются основными. Нетрудно видеть, что в невырожденном случае, т.е. когда все величины ω_m разные и все величины ρ_m^2 разные, произвольное многосолитонное решение системы (I) является суперпозицией нескольких решений этих типов. Однако решения двух последних типов интересны ещё с одной точки зрения. В вырожденном случае, т.е. когда среди величин ω_m или ρ_m^2 имеются равные, решение второго типа может в процессе эволюции трансформироваться в решение третьего типа и наоборот. Более точно в следующем параграфе построено многосолитонное решение системы (I), которое при $t \to -\infty$ обладает асимптотикой уединенной волны с "весовым" числом N_0, а при $t \to \infty$ это решение распадается на N_0 солитонов, движущихся вдоль одной и той же прямой с различными фазовыми скоростями. Более того, в последнем параграфе найдено многосолитонное решение системы (I), которое при $t \to -\infty$ имеет асимптотику уединенной волны с "весовым" числом $N_0 + N_1$, а при $t \to \infty$ оно распадается на уединенную волну с "весовым" числом N_0 и N_1 солитонов.

§ 2. Полный распад уединенной волны

Рассмотрим теперь следующий частный случай N -солитонного решения. Пусть $N = 2N_0$. Пусть, далее, выполнены условия

$$\nu_1 = \ldots = \nu_{N_0} = \nu, \quad \sigma_1 = \ldots = \sigma_{2N_0} = \sigma,$$
$$(\nu_{N_0+m} - \nu)\mu_{N_0+m} > 0, \quad \rho_m^2 = \rho_{N_0+m}^2, \quad m = 1, \ldots, N_0. \tag{2.1}$$

Предположим, что величины $\omega_1, \ldots, \omega_{N_0}$ все разные и величины $\rho_1^2, \ldots, \rho_{N_0}^2$ также все разные. Предположим, далее, что величины $\nu_{N_0+1}, \ldots, \nu_{2N_0}$ все разные, причем их нумерация такова, что при любых $m, n = 1, \ldots, N_0$ справедливо неравенство

$$(\nu_{N_0+m} - \nu_{N_0+n})\mu_{N_0+m} < 0, \quad \text{если} \quad m < n,$$
$$(\nu_{N_0+m} - \nu_{N_0+n})\mu_{N_0+m} > 0, \quad \text{если} \quad m > n. \tag{2.2}$$

Получаемое в этой ситуации решение u, φ системы (I) обладает следующим замечательным свойством: при $t \to -\infty$ оно имеет асимптотику уединенной волны с "весовым" числом N_0, а при $t \to \infty$ оно распадается на N_0 солитонов, движущихся либо в том же самом направлении, что и уединенная волна, либо в прямо противоположном направлении. Здесь необходимо отметить следующий факт. Из равенства $\rho_m^2 = \rho_{N_0+m}^2$ в силу (I.9) следует, что

$$(\sigma - \nu)\mu_m = (\sigma - \nu_{N_0+m})\mu_{N_0+m}, \quad m = 1, \ldots, N_0. \tag{2.3}$$

Далее, из неравенства $(\nu_{N_0+m} - \nu)\mu_{N_0+m} > 0$ на основании (I.II) вытекает неравенство $(\nu_{N_0+n} - \nu)\mu_m > 0$, $m, n = 1, \ldots, N_0$. С учетом (2.2) получаем, что при $m \geq n$ справедливо неравенство

$$(\nu_{N_0+n} - \nu)\mu_m + (\nu_{N_0+m} - \nu_{N_0+n})\mu_{N_0+m} > 0, \tag{2.4}$$

которое в соответствии с (2.3) можно записать в виде

$$(\nu_{N_0+n} - \sigma)(\mu_m - \mu_{N_0+m}) > 0, \quad \text{если} \quad m \geq n.$$

Согласно (I.II) отсюда следует неравенство

$$(\mu_{N_0+m} - \mu_m)\varkappa > 0, \quad m = 1, \ldots, N_0, \tag{2.5}$$

с помощью которого получаем, что неравенство (2.4) справедливо при любых $m, n = 1, \ldots, N_0$.

Приступим теперь к нахождению уединенной волны. Пусть матрицы A_0 и B_0 получены из матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вида (I.8) при $a_{N_0+1} = \ldots = a_{2N_0} = 0$. Положим

$$u_0 = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D_0, \quad \varphi_0 = \frac{\Phi_0}{D_0}, \tag{2.6}$$

где

$$D_0 = \det A_0, \quad \Phi_0 = \det B_0. \tag{2.7}$$

Покажем, что при $t \to -\infty$ в асимптотике решения u, φ присутствует уединенная волна u_0, φ_0, а при $t \to \infty$ волна u_0, φ_0 в асимптотике нашего решения отсутствует. Действительно, полагая $Z = x + 2\sigma y + 2\nu t$, $Z_m = Z + 2(\nu_m - \nu)t$, представим элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ в виде

$$\Lambda_{m,n} = \frac{a_m \bar{a}_n}{\omega_m + \bar{\omega}_n} \exp[(\mu_m + \mu_n)Z + i(\theta_m - \theta_n)] f_m f_n, \tag{2.8}$$
$$\lambda_m = a_m \exp(\mu_m Z + i\theta_m) f_m, \quad m, n = 1, \ldots, 2N_0,$$

где $f_m = \exp[2(\nu_m - \nu)\mu_m t]$. В силу (2.I) имеем $f_m \equiv 1$, если $m = 1, \ldots, N_0$, а если $m = N_0+1, \ldots, 2N_0$, то получаем, что $f_m \to 0$ при $t \to -\infty$. Отсюда на основании (2.7) и (2.8) следует, что при любом фиксированном Z и $t \to -\infty$ справедливы соотношения $D \to D_0$, $\Phi \to \Phi_0$, т.е. уединенная волна (2.6) присутствует в асимптотике нашего решения при $t \to -\infty$.

Наоборот, при $t \to \infty$ имеем $f_m \to \infty$, если $m = N_0+1, \ldots, 2N_0$. В соответствии с (2.8) отсюда следует, что при любом фиксированном Z и $t \to \infty$ справедливы соотношения

$$D\exp(-\alpha t) \to c\exp(\beta Z)\det(R_1 \Omega_1), \quad \Phi\exp(-\alpha t) \to 0,$$

где R_1 и Ω_1 - миноры N_0 - го порядка матриц R и Ω, стоящие соответственно в правых нижних углах этих матриц, а

$$c=\prod_{m=1}^{N_0}|a_{N_0+m}|^2, \quad \alpha=4\sum_{m=1}^{N_0}(\nu_{N_0+m}-\nu)\mu_{N_0+m}, \quad \beta=2\sum_{m=1}^{N_0}\mu_{N_0+m}.$$

Из этих соотношений вытекает, что в асимптотике нашего решения при $t\to\infty$ уединенная волна (2.6) отсутствует.

Возьмем теперь произвольное τ, такое, что $1\le\tau\le N_0$, и положим $Z_m=Z_{N_0+\tau}+2(\nu_m-\nu_{N_0+\tau})t$, $m=1,\dots,2N_0$. Тогда элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ допускают представление

$$\Lambda_{m,n}=\frac{a_m\bar a_n}{\omega_m+\bar\omega_n}\exp[(\mu_m+\mu_n)Z_{N_0+\tau}+i(\theta_m-\theta_n)]g_{m,\tau}g_{n,\tau}, \tag{2.9}$$

$$\lambda_m=a_m\exp(\mu_m Z_{N_0+\tau}+i\theta_m)g_{m,\tau}, \quad m,n=1,\dots,2N_0,$$

где

$$g_{m,\tau}=\exp[2(\nu_m-\nu_{N_0+\tau})\mu_m t]. \tag{2.10}$$

С учетом (2.1) и (2.2) получаем, что при $t\to\infty$ величины $g_{m,\tau}\to 0$, если $m<N_0+\tau$, а если $m>N_0+\tau$, то $g_{m,\tau}\to\infty$. Отсюда следует, что при любом фиксированном $Z_{N_0+\tau}$ и $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$D\sim D_\tau\prod_{m=\tau+1}^{N_0}\{|a_{N_0+m}|^2\exp(2\mu_{N_0+m}Z_{N_0+m})\},$$
$$\phi\sim\phi_\tau\prod_{m=\tau+1}^{N_0}\{|a_{N_0+m}|^2\exp(2\mu_{N_0+m}Z_{N_0+m})\}, \tag{2.11}$$

где

$$D_\tau=|a_{N_0+\tau}|^2\exp(2\mu_{N_0+\tau}Z_{N_0+\tau})\det(R_\tau\Omega_\tau)+\det(R_{\tau+1}\Omega_{\tau+1}),$$
$$\phi_\tau=-a_{N_0+\tau}\exp(\mu_{N_0+\tau}Z_{N_0+\tau}+i\theta_{N_0+\tau})\det(\hat R_\tau\hat\Omega_\tau). \tag{2.12}$$

При этом матрицы R_τ и Ω_τ являются минорами $(N_0-\tau+1)$-го порядка матриц R и Ω, стоящими соответственно в правых нижних углах этих матриц, матрица $\hat R_\tau$ получается из матрицы R_τ в результате замены на единицы элементов первой строки этой матрицы, а матрица $\hat\Omega_\tau$ получается из матрицы Ω_τ после замены на единицы элементов первого столбца этой матрицы. Кроме того, полагаем по определению $R_{N_0+1}=\Omega_{N_0+1}=1$. С помощью (1.5), (1.19), (2.11) и (2.12) получаем, что при $t\to\infty$ в асимптотике нашего решения имеется

N_0 солитонов вида

$$u_\tau=\frac{2\mu^2_{N_0+\tau}}{\mathrm{ch}^2(\mu_{N_0+\tau}Z_{N_0+\tau}+\delta_\tau)}, \quad \varphi_\tau=\frac{c_\tau\exp(i\theta_{N_0+\tau})}{\mathrm{ch}(\mu_{N_0+\tau}Z_{N_0+\tau}+\delta_\tau)}, \tag{2.13}$$

где

$$\delta_\tau=\frac12\ln\alpha_{N_0+\tau}+\frac12\sum_{m=\tau+1}^{N_0}\ln\beta_{N_0+\tau,N_0+m},$$

$$c_\tau=-\frac12 a_{N_0+\tau}\exp(-\delta_\tau)\prod_{m=\tau+1}^{N_0}\frac{(\bar\omega_{N_0+\tau}-\bar\omega_{N_0+m})(\rho^2_{N_0+\tau}-\rho^2_{N_0+m})}{(\bar\omega_{N_0+\tau}+\omega_{N_0+m})(\rho^2_{N_0+\tau}-\bar\rho^2_{N_0+m})}. \tag{2.14}$$

Согласно (2.14) справедливо соотношение

$$|c_\tau|^2=2\varkappa(\sigma-\nu_{N_0+\tau})\mu^2_{N_0+\tau}, \quad \tau=1,\dots,N_0.$$

Положим теперь $g_{N_0+m,\tau}=g_{m,\tau}h_{m,\tau}$, где величины $g_{m,\tau}$ определены посредством (2.10). Согласно (2.1) получаем, что при $t\to-\infty$ величины $g_{m,\tau}\to\infty$, если $m,\tau=1,\dots,N_0$, а в силу (2.4) имеем $h_{m,\tau}\to 0$ при $t\to-\infty$, $m,\tau=1,\dots,N_0$. С учетом этого замечания на основании (2.9) находим, что при любом фиксированном $Z_{N_0+\tau}$ и $t\to-\infty$ справедливы асимптотики

$$D\cdot\prod_{m=1}^{N_0}\{|a_m|^2\exp(2\mu_m Z_m)\}^{-1}\to\det(R'\Omega'),$$
$$\phi\cdot\prod_{m=1}^{N_0}\{|a_m|^2\exp(2\mu_m Z_m)\}^{-1}\to 0,$$

где R' и Ω' – миноры N_0 – го порядка матриц R и Ω, стоящие соответственно в левых верхних углах этих матриц. Отсюда непосредственно вытекает, что в асимптотику нашего решения при $t\to-\infty$ солитоны (2.13) не входят. Таким образом, полученное нами решение действительно описывает распад уединенной волны (2.6) на солитоны (2.13).

Здесь необходимо отметить следующее. На основании (2.3) справедливо равенство

$$\nu_{N_0+\tau}=\sigma-(\sigma-\nu)q_\tau, \quad q_\tau=\frac{\mu_\tau}{\mu_{N_0+\tau}}, \quad \tau=1,\dots,N_0. \tag{2.15}$$

Поскольку $(\sigma-\nu)\varkappa>0$, то отсюда следует, что при $\varkappa\sigma<0$ и $q_\tau>0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+\tau}<0$. С учетом неравенства $\varkappa\nu<\varkappa\sigma$ получаем, что при $\varkappa\sigma<0$ все N_0 солитонов (2.13) имеют то же самое направление движения, что и исходная уединенная волна (2.6). Ситуация оказывается несравненно разнообразнее, если $\varkappa\sigma>0$. Действительно, в этом случае величина $\varkappa\nu$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Далее, из равенства (2.15) следует, что при $0<q_r<(\sigma-\nu)^{-1}\sigma$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}>0$, а при $q_r>(\sigma-\nu)^{-1}\sigma$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}<0$. Наконец, определенные ограничения на величины q_r накладывает неравенство (2.5). С его помощью находим, что если $\varkappa\nu>0$, то при $\varkappa\mu_r>0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}>0$, а при $\varkappa\mu_r<0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}>0$, если только $1<q_r<(\sigma-\nu)^{-1}\sigma$, и $\varkappa\nu_{N_0+r}<0$, если $q_r>(\sigma-\nu)^{-1}\sigma$. Наоборот, если $\varkappa\nu<0$, то при $\varkappa\mu_r<0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}<0$, а при $\varkappa\mu_r>0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}<0$, если только $(\sigma-\nu)^{-1}\sigma<q_r<1$, и $\varkappa\nu_{N_0+r}>0$, если $0<q_r<(\sigma-\nu)^{-1}\sigma$.

С другой стороны, в соответствии с неравенством (2.I) получаем, что при $\varkappa\nu>0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}>\varkappa\nu$, если $\varkappa\mu_r>0$, а если $\varkappa\mu_r<0$, то $\varkappa\nu_{N_0+r}<\varkappa\nu$, и, следовательно, в этом случае величина $\varkappa\nu_{N_0+r}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Наоборот, при $\varkappa\nu<0$ имеем $\varkappa\nu_{N_0+r}<\varkappa\nu$, если $\varkappa\mu_r<0$, а если $\varkappa\mu_r>0$, то $\varkappa\nu_{N_0+r}>\varkappa\nu$, и, следовательно, величина $\varkappa\nu_{N_0+r}$ в этом случае также принимает как положительные, так и отрицательные значения.

§ 3. Частичный распад уединенной волны

Этот случай имеет некоторые отличия по сравнению с рассмотренным в предыдущем параграфе. Укажем их. В качестве отправной точки возьмем N - солитонное решение системы (I) с $N=N_0+2N_1$ и предположим, что параметры этого решения удовлетворяют условиям

$$\nu_1=\ldots=\nu_{N_0+N_1}=\nu,\quad \sigma_1=\ldots=\sigma_{N_0+2N_1}=\sigma,$$
$$(\nu_{N_0+N_1+m}-\nu)\mu_{N_0+N_1+m}>0,\quad \rho^2_{N_0+m}=\rho^2_{N_0+N_1+m},\ m=1,\ldots,N_1. \tag{3.I}$$

Предположим далее, что величины $\omega_1,\ldots,\omega_{N_0+N_1}$ все разные и величины $\rho_1^2,\ldots,\rho^2_{N_0+N_1}$ все разные, а величины $\nu_{N_0+N_1+1},\ldots,\nu_{N_0+2N_1}$ все разные и их нумерация такова, что при $m,n=1,\ldots,N_1$ выполняется неравенство

$$(\nu_{N_0+N_1+m}-\nu_{N_0+N_1+n})\mu_{N_0+N_1+m}<0,\ \text{если}\quad m<n,$$
$$(\nu_{N_0+N_1+m}-\nu_{N_0+N_1+n})\mu_{N_0+N_1+m}>0,\ \text{если}\quad m>n. \tag{3.2}$$

Пусть матрицы A_- и B_- получены из матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вида (I.8) при $a_{N_0+N_1+1}=\ldots=a_{N_0+2N_1}=0$. Положим

$$u_-=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_-,\quad \varphi_-=\frac{\Phi_-}{D_-}, \tag{3.3}$$

где

$$D_-=\det A_-,\quad \Phi_-=\det B_-. \tag{3.4}$$

Пусть, далее, матрицы A_+ и B_+ получены из матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вида (I.8) при $a_{N_0+1}=\ldots=a_{N_0+N_1}=0$ и $a_{N_0+N_1+1}=\ldots=a_{N_0+2N_1}=\zeta$. Положим теперь

$$u_+=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D_+,\quad \varphi_+=\frac{\Phi_+}{D_+}, \tag{3.5}$$

где

$$D_+=\lim_{\zeta\to\infty}\frac{\det A_+}{\zeta^{2N_1}},\quad \Phi_+=\lim_{\zeta\to\infty}\frac{\det B_+}{\zeta^{2N_1}}. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что решение u_-, φ_- является уединенной волной с "весовым" числом N_0+N_1. Покажем, что решение u_+, φ_+ - уединенная волна описанного ранее вида с "весовым" числом N_0. Действительно, нетрудно убедиться в справедливости следующего факта. Пусть матрицы A_0 и B_0 получены из матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вида (I.8), если в них положить $a_{N_0+1}=\ldots=a_{N_0+2N_1}=0$, а величины a_m при $m=1,\ldots,N_0$ заменить соответственно на величины

$$\hat{a}_m=a_m\prod_{n=1}^{N_1}\frac{(\omega_{N_0+N_1+n}-\omega_m)(\bar{\rho}^2_{N_0+N_1+n}-\bar{\rho}^2_m)}{(\bar{\omega}_{N_0+N_1+n}+\omega_m)(\rho^2_{N_0+N_1+n}-\bar{\rho}^2_m)}.$$

Тогда справедливы равенства

$$D_+=\det(R_1\Omega_1)\det A_0,\quad \Phi_+=\det(R_1\Omega_1)\det B_0, \tag{3.7}$$

где R_1 и Ω_1 - миноры N_1 - го порядка матриц R и Ω, стоящие соответственно в правых нижних углах этих матриц. Из равенств (3.7) непосредственно следует, что u_+,φ_+ - уединенная волна с "весовым" числом N_0.

Покажем теперь, что в асимптотике нашего решения при $t\to-\infty$ присутствует волна u_-, φ_-, а при $t\to\infty$ в его асимптотике присутствует волна u_+, φ_+. Действительно, пусть $Z=x+2\sigma y+2\nu t$, $Z_m=Z+2(\nu_m-\nu)t$. Тогда элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ допускают представление

$$\Lambda_{m,n} = \frac{a_m \bar a_n}{\omega_m+\bar\omega_n} \exp[(\mu_m+\mu_n)Z + i(\theta_m-\theta_n)] F_m F_n,$$

$$\lambda_m = a_m \exp(\mu_m Z + i\theta_m) F_m, \quad m,n = 1,\dots,N_0+2N_1,$$

где $F_m = \exp[2(\nu_m-\nu)\mu_m t]$. Согласно (3.I) при $m=1,\dots,N_0+N_1$ имеем $F_m\equiv 1$, а при $m=N_0+N_1+1,\dots,N_0+2N_1$ имеем $F_m\to 0$, если $t\to-\infty$. Отсюда в силу (3.4) следует, что при любом фиксированном Z и $t\to-\infty$ справедливы соотношения $D\to D_-$, $\phi\to\phi_-$, из которых вытекает, что при $t\to-\infty$ в асимптотике нашего решения присутствует уединенная волна (3.3). Наоборот, при $t\to\infty$ имеем $F_m\to\infty$, если $m=N_0+N_1+1,\dots,N_0+2N_1$. С учетом этого факта на основании (3.I) и (3.6) получаем, что при $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$D\exp(-\alpha t)\to c D_+, \quad \phi\exp(-\alpha t)\to c\,\phi_+,$$

где

$$c = \prod_{m=1}^{N_1} |a_{N_0+N_1+m}|^2, \quad \alpha = 4\sum_{m=1}^{N_1}(\nu_{N_0+N_1+m}-\nu)\mu_{N_0+N_1+m}.$$

Отсюда следует, что при $t\to\infty$ в асимптотике нашего решения присутствует уединенная волна (3.5).

Возьмем теперь произвольное r, такое, что $1\le r\le N_1$, и положим $Z_m = Z_{N_0+N_1+r} + 2(\nu_m-\nu_{N_0+N_1+r})t$. Тогда элементы $\Lambda_{m,n}$ матрицы Λ и компоненты λ_m вектора λ допускают представление

$$\Lambda_{m,n} = \frac{a_m \bar a_n}{\omega_m+\bar\omega_n} \exp[(\mu_m+\mu_n)Z_{N_0+N_1+r} + i(\theta_m-\theta_n)] G_{m,r} G_{n,r},$$

(3.8)

$$\lambda_m = a_m \exp(\mu_m Z_{N_0+N_1+r} + i\theta_m) G_{m,r}, \quad m,n = 1,\dots,N_0+2N_1,$$

где

$$G_{m,r} = \exp[2(\nu_m-\nu_{N_0+N_1+r})\mu_m t]. \tag{3.9}$$

В силу (3.I) и (3.2) при $t\to\infty$ имеем $G_{m,r}\to 0$, если $m<N_0+N_1+r$, а если $m>N_0+N_1+r$, то $G_{m,r}\to\infty$. Отсюда следует, что при любом фиксированном $Z_{N_0+N_1+r}$ и $t\to\infty$ справедливы асимптотики

$$D\sim D_r\prod_{m=r+1}^{N_1}\{|a_{N_0+N_1+m}|^2\exp(2\mu_{N_0+N_1+m}Z_{N_0+N_1+m})\},$$

(3.I0)

$$\phi\sim \phi_r\prod_{m=r+1}^{N_1}\{|a_{N_0+N_1+m}|^2\exp(2\mu_{N_0+N_1+m}Z_{N_0+N_1+m})\},$$

где

$$D_r = |a_{N_0+N_1+r}|^2\exp(2\mu_{N_0+N_1+r}Z_{N_0+N_1+r})\det(R_r\Omega_r)+\det(R_{r+1}\Omega_{r+1}),$$

$$\phi_r = -a_{N_0+N_1+r}\exp(\mu_{N_0+N_1+r}Z_{N_0+N_1+r}+i\theta_{N_0+N_1+r})\det(\hat R_r\hat\Omega_r). \tag{3.II}$$

При этом матрицы R_r и Ω_r являются минорами (N_1-r+1)-го порядка матриц R и Ω, стоящими соответственно в правых нижних углах этих матриц, матрица $\hat R_r$ получается из матрицы R_r с помощью замены элементов первой строки этой матрицы на единицы, а матрица $\hat\Omega_r$ получается из матрицы Ω_r в результате замены на единицы элементов первого столбца этой матрицы. Кроме того, полагаем по определению $R_{N_1+1}=\Omega_{N_1+1}=1$. С помощью (I.5), (I.I9), (3.I0) и (3.II) получаем, что при $t\to\infty$ в асимптотике нашего решения содержится N_1 солитонов вида

$$u_r = \frac{2\mu^2_{N_0+N_1+r}}{ch^2(\mu_{N_0+N_1+r}Z_{N_0+N_1+r}+\delta_r)},\quad \varphi_r = \frac{c_r\exp(i\theta_{N_0+N_1+r})}{ch(\mu_{N_0+N_1+r}Z_{N_0+N_1+r}+\delta_r)}, \tag{3.I2}$$

где

$$\delta_r = \frac12\ln\alpha_{N_0+N_1+r}+\frac12\sum_{m=r+1}^{N_1}\ln\beta_{N_0+N_1+r,\,N_0+N_1+m},$$

(3.I3)

$$c_r = -\frac12 a_{N_0+N_1+r}\exp(-\delta_r)\prod_{m=r+1}^{N_1}\frac{(\bar\omega_{N_0+N_1+r}-\bar\omega_{N_0+N_1+m})(\rho^2_{N_0+N_1+r}-\rho^2_{N_0+N_1+m})}{(\bar\omega_{N_0+N_1+r}+\omega_{N_0+N_1+m})(\rho^2_{N_0+N_1+r}-\bar\rho^2_{N_0+N_1+m})}.$$

В соответствии с (3.I3) справедливо равенство

$$|c_r|^2 = 2\varkappa(\sigma-\nu_{N_0+N_1+r})\mu^2_{N_0+N_1+r}, \quad r=1,\dots,N_1.$$

Возьмем теперь определенные с помощью (3.9) величины $G_{m,r}$ и положим $G_{N_0+N_1+m,r}=G_{N_0+m,r}H_{m,r}$; $m,r=1,\dots,N_1$. В силу (3.I) имеем $G_{m,r}\to\infty$ при $t\to-\infty$, если $m=1,\dots,N_0+N_1$ и $r=1,\dots,N_1$. Далее, на основании (3.I) и (3.2) получаем, что $H_{m,r}\to 0$ при $t\to-\infty$ для любых $m,r=1,\dots,N_1$. Отсюда согласно (3.8) вытекает, что при любом фиксированном $Z_{N_0+N_1+r}$ и $t\to-\infty$ справедливы асимптотики

$$D\cdot\prod_{m=1}^{N_0+N_1}\{|a_m|^2\exp(2\mu_m Z_m)\}^{-1}\to\det(R'\Omega'),$$

$$\phi \cdot \prod_{m=1}^{N_0+N_1} \{ |a_m|^2 \exp(2\mu_m Z_m) \}^{-1} \to 0 ,$$

где R' и Ω' – миноры (N_0+N_1)-го порядка матриц R и Ω, стоящие соответственно в левых верхних углах этих матриц. Это означает, что солитоны (3.12) в асимптотику нашего решения при $t \to -\infty$ не входят. Таким образом, полученное нами решение действительно описывает распад уединенной волны (3.3) на уединенную волну (3.5) и солитоны (3.12).

Нетрудно видеть, что уединенные волны (3.3) и (3.5) распространяются в одном и том же направлении. Далее, с помощью соображений, приведенных в конце предыдущего параграфа, нетрудно убедиться, что солитоны (3.12) могут распространяться как в том же самом направлении, что и уединенная волна (3.3), так и в прямо противоположном.

В заключение необходимо отметить, что механизм обнаруженного в настоящей работе распада волн имеет существенно другую природу, нежели описанный ранее в работе /3/.

Литература

1. Теория солитонов. Ред. С.П. Новиков.- М. : Наука, 1980.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна, ОИЯИ, 1986.
3. Захаров В.Е., Манаков С.В.-ЖЭТФ, 1975, т. 69, вып. 5(11), с. 1654-1673.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1987 года.

Мельников В.К. Р2-87-137

Распад и слияние волн на плоскости x, y

В нелинейной интегрируемой системе, описывающей взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, найдены точные решения, которые при $t \to -\infty$ имеют асимптотику одной уединенной волны, а при $t \to \infty$ распадаются на несколько солитонов, движущихся с разными фазовыми скоростями. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом задач гидродинамики, физики плазмы и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-87-137

Decay and Fusion of Waves on the x, y Plane

In a nonlinear integrable system describing the interaction of a long wave with a short wave packet we have found exact solutions having the asymptotics of a solitary wave as $t \to -\infty$ and decaying into several solitons, that move with different phase velocities, as $t \to \infty$. The obtained results are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987