объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-87-136

В.К.Мельников

"ОТРАЖЕНИЕ" ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в "Journal of Mathematical Physics".

1987

В настоящей работе речь идет о следующем явлении. В рассматриваемых ниже нелинейных интегрируемых системах найдены решения, которые при $t \to \pm\infty$ имеют асимптотики односолитонных решений. Однако наборы существенных параметров этих солитонов могут быть взяты разными. В частности, эти наборы параметров можно выбрать так, чтобы упомянутые выше солитоны имели прямо противоположные направления движения. В этом случае каждое из обсуждаемых решений описывает волну, которая приходит из бесконечности. Затем у этой волны происходит изменение параметров (в частности, направления движения), в результате чего волна начинает двигаться в прямо противоположном направлении и, наконец, уходит туда же, откуда раньше появилась. Другими словами, происходит как бы отражение волны.

Здесь важно отметить следующее обстоятельство. Возьмем произвольно малое $\varepsilon > 0$. Пусть t_- таково, что при $t < t_-$ разность между нашим решением и первым солитоном меньше ε. Пусть, далее, t_+ таково, что при $t > t_+$ разность между рассматриваемым решением и вторым солитоном также меньше ε. Оказывается, что t_- и t_+ можно выбрать так, чтобы разность $t_+ - t_-$ при $\varepsilon \to 0$ имела порядок $-\ln\varepsilon$. Это значит, что упомянутая выше перестройка одного солитона в другой происходит за сравнительно небольшой промежуток времени, и, следовательно, нахождение таких решений на ЭВМ представляет собой весьма деликатную задачу.

Сказанное выше будет продемонстрировано на двух примерах нелинейных эволюционных систем, одна из которых описывает взаимодействие волн на плоскости x, y, а вторая система описывает взаимодействие волн на оси x.

§I. Взаимодействие двух волн на плоскости x, y

Начнем со следующей системы уравнений:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\varkappa|\varphi|^2\right)\right] = 0, \qquad (I.I)$$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

описывающей (в определенных условиях) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Здесь u - амплитуда длинной волны, φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2 = 1$. Нетрудно убедиться, что система (I.I) обладает решениями вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)]}, \qquad (I.2)$$

$$\varphi = a\frac{\exp[i\nu(x+2\nu y)+i\sigma t]}{ch[\mu(x+2\nu y-\tau t)]}\exp[-i(\mu^2+\nu^2)y],$$

где вещественные параметры μ, ν, τ и комплексная величина a удовлетворяют единственному условию

$$[\tau - 4(\mu^2-3\nu^2)]\mu^2 = 4\varkappa|a|^2, \qquad (I.3)$$

и, следовательно, для существования этих решений необходимо выполнение условия $[\tau-4(\mu^2-3\nu^2)]\varkappa \geqslant 0$. При этом параметр σ может принимать любые вещественные значения. Метод обратной задачи рассеяния /I,2/ позволяет рассмотреть взаимодействие произвольного числа волн вида (I.2). Для наших целей будет достаточно рассмотреть взаимодействие двух таких волн.

С этой целью возьмем функции D и Φ вида

$$D = 1+\alpha_1\exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)]+\alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)]+$$

$$+\gamma_0\exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+2\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)]+$$

$$+2\delta_0\exp[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)]\cos\theta,$$

$$\Phi = 2a_1\{1+\beta_2\exp[2\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)]\}\exp[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)]\times$$

$$\times\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 y)+i\sigma_1 t-i(\mu_1^2+\nu_1^2)y]+ \qquad (I.4)$$

$$+2a_2\{1+\beta_1\exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)]\}\exp[\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)]\times$$

$$\times\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y)+i\sigma_2 t-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y],$$

институт
...ований
...ЕМА

где

$$\alpha_1 = \frac{\kappa |a_1|^2}{(\mu_3^2 - 3\nu_3^2)\mu_1\mu_3}, \quad \alpha_2 = \frac{\kappa |a_2|^2}{(\mu_4^2 - 3\nu_4^2)\mu_2\mu_4},$$

$$\sigma_1 = -4(3\mu_1^2 - \nu_1^2)\nu_1 + 4(3\mu_3^2 - \nu_3^2)\nu_3,$$

$$\sigma_2 = -4(3\mu_2^2 - \nu_2^2)\nu_2 + 4(3\mu_4^2 - \nu_4^2)\nu_4,$$

$$\tau_1 = 4(\mu_1^2 - 3\nu_1^2) + 4(\mu_3^2 - 3\nu_3^2)\frac{\mu_3}{\mu_1},$$

$$\tau_2 = 4(\mu_2^2 - 3\nu_2^2) + 4(\mu_4^2 - 3\nu_4^2)\frac{\mu_4}{\mu_2}, \qquad (I.5)$$

$$\theta = (\nu_2 - \nu_1)x + (\mu_1^2 - \mu_2^2 - \nu_1^2 + \nu_2^2)y + (\sigma_2 - \sigma_1)t + \theta_0,$$

$$\omega_1 = \mu_1 + i\nu_1, \ \omega_2 = \mu_2 + i\nu_2, \ \omega_3 = \mu_3 + i\nu_3, \ \omega_4 = \mu_4 + i\nu_4,$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \bar\omega_1}\,\frac{\bar\omega_4^3 - \bar\omega_3^3}{\bar\omega_4^3 + \omega_3^3},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \bar\omega_2}\,\frac{\bar\omega_3^3 - \bar\omega_4^3}{\bar\omega_3^3 + \omega_4^3},$$

$$\gamma_0 = \alpha_1\alpha_2 \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \bar\omega_2}\right|^2 \left|\frac{\omega_3^3 - \omega_4^3}{\omega_3^3 + \bar\omega_4^3}\right|^2,$$

$$\delta_0^2 = \frac{|\omega_1 + \bar\omega_1||\omega_2 + \bar\omega_2||\omega_3^3 + \bar\omega_3^3||\omega_4^3 + \bar\omega_4^3|}{|\omega_1 + \bar\omega_2|^2 |\omega_3^3 + \bar\omega_4^3|^2} |\alpha_1\alpha_2|.$$

Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Согласно результатам работы /2/ функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D} \qquad (I.6)$$

удовлетворяют системе (I.I), т.е. являются ее решением. Нетрудно видеть, что если выполнены условия

$$[\tau_1 - 4(\mu_1^2 - 3\nu_1^2)]\kappa > 0, \quad [\tau_2 - 4(\mu_2^2 - 3\nu_2^2)]\kappa > 0, \qquad (I.7)$$

$$|\omega_1 + \bar\omega_1||\omega_2 + \bar\omega_2||\omega_3^3 + \bar\omega_3^3||\omega_4^3 + \bar\omega_4^3| \le |\omega_1 + \bar\omega_2|^2 |\omega_3^3 + \bar\omega_4^3|^2, \qquad (I.8)$$

то имеем $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, $0 \le \delta_0^2 \le \alpha_1\alpha_2$, $\gamma_0 \ge 0$, и, следовательно, функция D принимает только положительные значения при любых вещественных x, y, t. Это значит, что определенные посредством (I.6) функции u и φ в этих условиях не имеют особенностей при любых вещественных значениях x, y, t.

Выясним теперь, каково поведение этого решения. Рассмотрим сначала случай, когда выполнено неравенство $(\omega_1 - \omega_2)(\omega_3^3 - \omega_4^3) \ne 0$. Тогда при $\nu_1 \ne \nu_2$ и любом фиксированном t в области $\mu_2(x + 2\nu_2 y - \tau_2 t) \gg 1$ наше решение имеет асимптотику вида

$$u \sim u_1^+ = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^+]},$$

$$\varphi \sim \varphi_1^+ = a_1^+ \frac{\exp[i\nu_1(x + 2\nu_1 y) + i\sigma_1 t]}{ch[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^+]} \exp[-i(\mu_1^2 + \nu_1^2)y], \qquad (I.9)$$

где

$$\delta_1^+ = \frac{1}{2}(\ln\gamma_0 - \ln\alpha_2), \quad a_1^+ = \frac{a_1\beta_2}{\alpha_2}\exp(-\delta_1^+),$$

а в области $\mu_2(x + 2\nu_2 y - \tau_2 t) \ll -1$ выполняется асимптотика

$$u \sim u_1^- = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^-]}, \qquad (I.10)$$

$$\varphi \sim \varphi_1^- = a_1^- \frac{\exp[i\nu_1(x + 2\nu_1 y) + i\sigma_1 t]}{ch[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^-]} \exp[-i(\mu_1^2 + \nu_1^2)y],$$

где

$$\delta_1^- = \frac{1}{2}\ln\alpha_1 \ , \quad a_1^- = a_1 \exp(-\delta_1^-).$$

С помощью (I.5) нетрудно убедиться, что

$$\delta_1 = \delta_1^+ - \delta_1^- = \ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right| + \ln\left|\frac{\omega_3^3-\omega_4^3}{\omega_3^3+\bar\omega_4^3}\right| , \quad |a_1^+| = |a_1^-| .$$

Если мы устремимся в бесконечность на плоскости x,y вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^+ = 0$, то увидим, что при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 > 0$ и $y \to \infty$ справедлива асимптотика (I.9). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 < 0$, то асимптотика (I.9) имеет место при $y \to -\infty$. Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 y - \tau_1 t) + \delta_1^- = 0$, легко находим, что при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 > 0$ и $y \to -\infty$ выполняется асимптотика (I.10). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 < 0$, то асимптотика (I.10) справедлива при $y \to \infty$.

Далее, нетрудно убедиться, что при $\nu_1 \neq \nu_2$ и любом фиксированном t в области $\mu_1(x+2\nu_1 y - \tau_1 t) \gg 1$ рассматриваемое нами решение обладает асимптотикой

$$u \sim u_2^+ = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^+]} , \qquad \text{(I.11)}$$

$$\varphi \sim \varphi_2^+ = a_2^+ \frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y) + i\sigma_2 t]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^+]} \exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y],$$

где

$$\delta_2^+ = \frac{1}{2}(\ln\gamma_0 - \ln\alpha_1) \ , \quad a_2^+ = \frac{a_2\beta_1}{\alpha_1}\exp(-\delta_2^+),$$

а в области $\mu_1(x+2\nu_1 y - \tau_1 t) \ll -1$ оно имеет асимптотику вида

$$u \sim u_2^- = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^-]} , \qquad \text{(I.12)}$$

$$\varphi \sim \varphi_2^- = a_2^- \frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y) + i\sigma_2 t]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^-]} \exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y],$$

где

$$\delta_2^- = \frac{1}{2}\ln\alpha_2 \ , \quad a_2^- = a_2 \exp(-\delta_2^-).$$

В силу (I.5) находим, что

$$\delta_2 = \delta_2^+ - \delta_2^- = \ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right| + \ln\left|\frac{\omega_3^3-\omega_4^3}{\omega_3^3+\bar\omega_4^3}\right| , \quad |a_2^+| = |a_2^-| .$$

Если мы теперь устремимся в бесконечность на плоскости x,y вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^+ = 0$, то обнаружим, что при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 > 0$ и $y \to \infty$ справедлива асимптотика (I.11). Наоборот, если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 < 0$, то асимптотика (I.11) выполняется при $y \to -\infty$. Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 y - \tau_2 t) + \delta_2^- = 0$, легко получаем, что при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 > 0$ и $y \to -\infty$ имеет место асимптотика (I.12). Наоборот, если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 < 0$, то асимптотика (I.12) справедлива при $y \to \infty$.

Таким образом, при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3) \neq 0$ и $\nu_1 \neq \nu_2$ интересующее нас решение описывает взаимодействие двух уединенных волн вида (I.2), которые распространяются на плоскости x,y под углом друг к другу. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению обеих волн в окрестности точки пересечения прямых

$$x + 2\nu_1 y - \tau_1 t + \frac{\delta_1^+ + \delta_1^-}{2\mu_1} = 0, \quad x + 2\nu_2 y - \tau_2 t + \frac{\delta_2^+ + \delta_2^-}{2\mu_2} = 0.$$

Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любой из взаимодействующих волн профиль каждой из волн приобретает указанный ранее вид. Вдали от области взаимодействия результат взаимодействия выражается только в фазовых сдвигах обеих волн.

В том случае, когда $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3) \neq 0$, а $\nu_1 = \nu_2$, наше решение описывает взаимодействие двух волн, только если $\tau_1 \neq \tau_2$. При этом обе волны распространяются на плоскости x,y в одном и том же направлении, если $\tau_1\tau_2 > 0$, и распространяются в прямо противоположных направлениях, если $\tau_1\tau_2 < 0$. Заметим, что если $(\tau_1-\tau_2)\mu_2 > 0$, то при $t \to \infty$ асимптотика одной из волн имеет вид (I.9), а при $t \to -\infty$ ее асимптотика имеет вид (I.10). Наоборот, если $(\tau_1-\tau_2)\mu_2 < 0$, то при $t \to \infty$ асимптотика этой волны имеет вид (I.10), а при $t \to -\infty$ она имеет вид (I.9).

Заметим, далее, что если $(\tau_2-\tau_1)\mu_1>0$, то при $t\to\infty$ асимптотика второй из взаимодействующих волн имеет вид (I.II), а при $t\to-\infty$ ее асимптотика имеет вид (I.I2). Наоборот, если $(\tau_2-\tau_1)\mu_1<0$, то при $t\to\infty$ выполняется асимптотика (I.I2), а при $t\to-\infty$ справедлива асимптотика (I.II). Искажение обеих волн в этом случае достигает максимума в момент времени

$$t=\frac{(\delta_1^{+}+\delta_1^{-})\mu_2-(\delta_2^{+}+\delta_2^{-})\mu_1}{2(\tau_1-\tau_2)\mu_1\mu_2}$$

и стремится к нулю при $t\to\pm\infty$.

Наконец, при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3)\neq 0$ и $\nu_1=\nu_2,\ \tau_1=\tau_2$ рассматриваемое нами решение описывает одну уединенную волну, которая получилась из двух слившихся волн и движется как одно целое. Однако конфигурация получившейся волны сильно отличается от конфигураций исходных волн. Например, пусть $\omega_1=\mu+i\nu$, $\omega_2=2\mu+i\nu$, а величины $\omega_3=\mu_3+i\nu_3$ и $\omega_4=\mu_4+i\nu_4$ выбраны так, что выполнены условия $(\mu_3^2-3\nu_3^2)\mu_3=3\mu^3$, $(\mu_4^2-3\nu_4^2)\mu_4=0$. Полагая, далее, $a_2=0$, легко получаем, что выражения для D и ϕ принимают вид

$$D=1+\alpha_1\exp[2\mu(x+2\nu y-\tau t)]+\alpha_2\exp[4\mu(x+2\nu y-\tau t)]+$$
$$+\frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2\exp[6\mu(x+2\nu y-\tau t)],$$

$$\phi=2a_1\left\{1-\frac{1}{3}\alpha_2\exp[4\mu(x+2\nu y-\tau t)]\right\}\exp[\mu(x+2\nu y-\tau t)]\times$$
$$\times\exp[i\nu(x+2\nu y)+i\sigma t-i(\mu^2+\nu^2)y],$$

где

$$\alpha_1=\frac{\varkappa|a_1|^2}{3\mu^4},\quad \tau=4(4\mu^2-3\nu^2),$$

$$\sigma=-4(3\mu^2-\nu^2)\nu+4(3\mu_3^2-\nu_3^2)\nu_3,$$

а величина α_2 может быть взята произвольно. Взяв $\alpha_2=\frac{1}{3}\alpha_1^2$, находим, что

$$D=\left\{1+\frac{1}{3}\alpha_1\exp[2\mu(x+2\nu y-\tau t)]\right\}^3.$$

При $\varkappa=1$ и $a_1\neq 0$ имеем $\alpha_1>0$, и, следовательно, $D>1$ при любых вещественных значениях x,y,t. Таким образом, в этом случае интересующее нас решение имеет вид

$$u=\frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta]},$$

$$\varphi=a\frac{sh[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta]}{ch^2[\mu(x+2\nu y-\tau t)+\delta]}\exp[i\nu(x+2\nu y)+i\sigma t-i(\mu^2+\nu^2)y],$$

где

$$\delta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1}{3}\right)=\ln\left(\frac{|a_1|}{3\mu^2}\right),\quad a=a_1\exp(-\delta),$$

и, следовательно, справедливо равенство $|a|=3\mu^2$.

Ситуация меняется коренным образом, если выполнено условие $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3)=0$. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_1\neq\nu_2$. Тогда при любом фиксированном t в области $\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)\gg 1$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а в области $\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)\ll -1$ справедлива асимптотика

$$u\sim\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\delta_1]},$$
$$\varphi\sim\hat{a}_1\frac{\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 y)+i\sigma_1 t]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\delta_1]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)y], \tag{I.I3}$$

где $\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1$, $\hat{a}_1=a_1\exp(-\delta_1)$. Далее, при любом фиксированном t в области $\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)\gg 1$ интересующее нас решение имеет нулевую асимптотику, а в области $\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)\ll -1$ выполняется асимптотика

$$u\sim\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)+\delta_2]}, \tag{I.I4}$$

$$\varphi \sim \hat{a}_2 \frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y)+i\sigma_2 t]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)+\delta_2]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y],$$

где $\delta_2=\frac{1}{2}\ln\alpha_2$, $\hat{a}_2=a_2\exp(-\delta_2)$. При этом согласно (I.5) справедливы равенства

$$\begin{aligned} 4\varkappa|\hat{a}_1|^2 &= 4(\mu_3^2-3\nu_3^2)\mu_1\mu_3=[\tau_1-4(\mu_1^2-3\nu_1^2)]\mu_1^2, \\ 4\varkappa|\hat{a}_2|^2 &= 4(\mu_4^2-3\nu_4^2)\mu_2\mu_4=[\tau_2-4(\mu_2^2-3\nu_2^2)]\mu_2^2, \end{aligned} \qquad (I.15)$$

аналогичные соотношениям (I.3). Таким образом, если мы устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\delta_1=0$, то обнаружим, что при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$ и $y\to\infty$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а при $y\to-\infty$ справедлива асимптотика (I.I3). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$, то устремляясь в бесконечность вдоль этой же прямой, мы видим, что при $y\to-\infty$ наше решение допускает нулевую асимптотику, а при $y\to\infty$ имеет место асимптотика (I.I3). Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 y-\tau_2 t)+\delta_2=0$, легко находим, что при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$ и $y\to\infty$ наше решение обладает нулевой асимптотикой, а при $y\to-\infty$ выполняется асимптотика (I.I4). Наоборот, если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1<0$, то устремляясь в бесконечность вдоль только что упомянутой прямой, мы видим, что при $y\to-\infty$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а при $y\to\infty$ справедлива асимптотика (I.I4). Отсюда следует, что при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3)=0$ и $\nu_1\neq\nu_2$ рассматриваемое нами решение описывает процесс гашения одного солитона другим солитоном. Это явление было недавно обнаружено в другой нелинейной интегрируемой системе /3/.

Проанализируем теперь расположение ненулевых асимптотик обоих солитонов. С учетом (I.I5) получаем, что $(\mu_3^2-3\nu_3^2)(\mu_4^2-3\nu_4^2)\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4>0$. Далее, на основании равенства $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3)=0$ находим, что $(\mu_1-\mu_2)[(\mu_3^2-3\nu_3^2)\mu_3-(\mu_4^2-3\nu_4^2)\mu_4]=0$. Значит, справедливы неравенства $\mu_1\mu_2>0$, $(\mu_3^2-3\nu_3^2)(\mu_4^2-3\nu_4^2)\mu_3\mu_4>0$. Отсюда, в частности, следует, что в рассматриваемой нами ситуации справедливо неравенство (I.8), т.е. интересующее нас решение действительно не имеет особенностей при любых вещественных значениях x, y, t. Кроме того, в силу неравенства $\mu_1\mu_2>0$ из неравенства $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$ следует

неравенство $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$. Это значит, что если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при

$$y\gg\frac{\mu_2\delta_1-\mu_1}{2(\nu_2-\nu_1)\mu_1\mu_2}+\frac{1}{2}\frac{\tau_2-\tau_1}{\nu_2-\nu_1}t,$$

наше решение имеет асимптотику (I.I3), а в нижней полуплоскости, т.е. при

$$y\ll\frac{\mu_1\delta_2-\mu_2}{2(\nu_1-\nu_2)\mu_1\mu_2}+\frac{1}{2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\nu_1-\nu_2}t,$$

справедлива асимптотика (I.I4). Наоборот, если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1<0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при

$$y\gg\frac{\mu_1\delta_2-\mu_2}{2(\nu_1-\nu_2)\mu_1\mu_2}+\frac{1}{2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\nu_1-\nu_2}t,$$

рассматриваемое нами решение обладает асимптотикой (I.I4), а в нижней полуплоскости, т.е. при

$$y\ll\frac{\mu_2\delta_1-\mu_1}{2(\nu_2-\nu_1)\mu_1\mu_2}+\frac{1}{2}\frac{\tau_2-\tau_1}{\nu_2-\nu_1}t,$$

выполняется асимптотика (I.I3). Таким образом, ненулевые асимптотики обоих солитонов всегда расположены по разные стороны от некоторой прямой, параллельной оси x.

Рассмотрим, наконец, случай, когда выполняются условия $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^3-\omega_4^3)=0$, $\nu_1=\nu_2$, а $\tau_1\neq\tau_2$. Положим $\nu=\nu_1=\nu_2$. Тогда при $(\tau_1-\tau_2)\mu_2>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении имеется бегущая волна вида

$$\begin{aligned} u &\sim \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu y-\tau_1 t)+\delta_1]}, \\ \varphi &\sim \hat{a}_1\frac{\exp[i\nu(x+2\nu y)+i\sigma_1 t]}{ch[\mu_1(x+2\nu y-\tau_1 t)+\delta_1]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu^2)y], \end{aligned} \qquad (I.16)$$

где $\delta_1 = \frac{1}{2}\ln\alpha_1$, $\hat{a}_1 = a_1\exp(-\delta_1)$, а при $(\tau_1-\tau_2)\mu_2<0$ эта волна появится при $t\to\infty$. Кроме того, при $(\tau_2-\tau_1)\mu_1>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится вторая бегущая волна

$$u \sim \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu y-\tau_2 t)+\delta_2]}, \qquad (I.17)$$

$$\varphi \sim \hat{a}_2 \frac{\exp[i\nu(x+2\nu y)+i\sigma_2 t]}{ch[\mu_2(x+2\nu y-\tau_2 t)+\delta_2]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu^2)y],$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2}\ln\alpha_2$, $\hat{a}_2 = a_2\exp(-\delta_2)$, а при $(\tau_2-\tau_1)\mu_1<0$ эта волна присутствует при $t\to\infty$.

В силу неравенства $\mu_1\mu_2>0$ из сказанного выше следует, что если $(\tau_1-\tau_2)\mu_2>0$, то при $t\to-\infty$ наше решение имеет асимптотику (I.16), а при $t\to\infty$ справедлива асимптотика (I.17). Наоборот, если $(\tau_1-\tau_2)\mu_2<0$, то при $t\to-\infty$ выполняется асимптотика (I.17), а асимптотика (I.16) имеет место при $t\to\infty$. Таким образом, в рассматриваемой сейчас ситуации наше решение описывает эволюцию солитона (I.16) в солитон (I.17) или же, наоборот, эволюцию солитона (I.17) в солитон (I.16). В процессе эволюции происходит изменение параметров солитона. При этом в силу равенств

$$4\varkappa|\hat{a}_1|^2 = [\tau_1-4(\mu_1^2-3\nu^2)]\mu_1^2, \quad 4\varkappa|\hat{a}_2|^2 = [\tau_2-4(\mu_2^2-3\nu^2)]\mu_2^2$$

выполняются соотношения

$$\tau_1 = 4\mu_1^2+\frac{4\varkappa|\hat{a}_1|^2}{\mu_1^2}-12\nu^2, \quad \tau_2 = 4\mu_2^2+\frac{4\varkappa|\hat{a}_2|^2}{\mu_2^2}-12\nu^2, \qquad (I.18)$$

из которых следует, что величины μ_1^2, μ_2^2, $|\hat{a}_1|$, $|\hat{a}_2|$ могут принимать любые положительные значения. Предположим, что эти величины выбраны так, что выполняется условие $(\mu_1^4+\varkappa|\hat{a}_1|^2)\mu_2^2 \neq$ $\neq (\mu_2^4+\varkappa|\hat{a}_2|^2)\mu_1^2$, т.е. $\tau_1\neq\tau_2$. Пусть, далее, ζ_1 и ζ_2 равны соответственно меньшей и большей из величин $\frac{1}{3}(\mu_1^2+\varkappa|\hat{a}_1|^2\mu_1^{-2})$ и $\frac{1}{3}(\mu_2^2+\varkappa|\hat{a}_2|^2\mu_2^{-2})$. Тогда из равенств (I.18) следует, что если величина ν^2 лежит вне интервала (ζ_1,ζ_2), то справедливо неравенство $\tau_1\tau_2>0$. В противном случае, т.е. при $\nu^2\in(\zeta_1,\zeta_2)$, имеем $\tau_1\tau_2<0$. Это значит, что если

$\nu^2\bar{\in}(\zeta_1,\zeta_2)$, то солитоны (I.16) и (I.17) движутся в одном и том же направлении, если же $\nu^2\in(\zeta_1,\zeta_2)$, то солитоны (I.16) и (I.17) движутся в прямо противоположных направлениях. Таким образом, при $\nu^2\bar{\in}(\zeta_1,\zeta_2)$ рассматриваемое нами решение описывает такую перестройку одного солитона в другой, при которой сохраняется направление движения. Наоборот, при $\nu^2\in(\zeta_1,\zeta_2)$ наше решение описывает перестройку, при которой происходит изменение направления движения солитона на прямо противоположное, т.е. происходит "отражение" солитона. Заметим кстати, что включение $\nu^2\in(\zeta_1,\zeta_2)$ возможно, только если $\zeta_2>0$, т.е. в случае, когда хотя бы одна из величин $\mu_1^4+\varkappa|\hat{a}_1|^2$ и $\mu_2^4+\varkappa|\hat{a}_2|^2$ положительна.

§2. Взаимодействие двух волн на оси x

Возьмем теперь функции $\hat{D}$ и $\hat{\Phi}$, которые получаются из функций D и Φ вида (I.4) с помощью замены t на y, а y на t. Согласно (I.6) функции

$$\hat{u} = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\hat{D}, \quad \hat{\varphi} = \frac{\hat{\Phi}}{\hat{D}} \qquad (2.1)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$3\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(3\hat{u}^2+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}+8\varkappa|\hat{\varphi}|^2\right)\right]=0,$$
$$i\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} = \hat{u}\hat{\varphi}+\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial x^2}, \qquad (2.2)$$

получающейся из системы (I.1) при той же самой замене переменных. Заменим теперь в решении (2.1) x на $x-4cy$, т.е. положим

$$v(x,y,t) = \hat{u}(x-4cy,y,t), \quad \psi(x,y,t) = \hat{\varphi}(x-4cy,y,t), \qquad (2.3)$$

где c - произвольная вещественная константа. Нетрудно убедиться, что в силу (2.2) функции v и ψ удовлетворяют системе уравнений

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(4cv+3v^2+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+8\varkappa|\psi|^2\right)=0,$$
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=v\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \qquad (2.4)$$

Из равенств (I.4) следует, что если выполнены условия

$$\tau_1+4c=\tau_2+4c=0\,,\quad \sigma_1-4c\nu_1=\sigma_2-4c\nu_2=0, \qquad (2.5)$$

то полученное таким образом решение системы (2.4) не зависит от y, т.е. удовлетворяет системе уравнений

$$3\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(4cv+3v^2+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+8\varkappa|\psi|^2\right)=0,$$
$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=v\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad (2.6)$$

играющей важную роль в ряде областей математической физики.

С учетом (I.5) равенства (2.5) эквивалентны соотношениям $c\omega_1+\omega_1^3+\bar\omega_3^3=0$, $c\omega_2+\omega_2^3+\bar\omega_4^3=0$. Пользуясь этими соотношениями, исключим из выражений для функций $\hat D$ и $\hat\Phi$ величины ω_3 и ω_4. В результате получим функции Δ и Ψ вида

$$\Delta=1+\alpha_1\exp[2\mu_1(x+2\nu_1t)]+\alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\nu_2t)]+$$
$$+\gamma_0\exp[2\mu_1(x+2\nu_1t)+2\mu_2(x+2\nu_2t)]+$$
$$+2\delta_0\exp[\mu_1(x+2\nu_1t)+\mu_2(x+2\nu_2t)]\cos\theta,$$
$$\Psi=2a_1\{1+\beta_2\exp[2\mu_2(x+2\nu_2t)]\}\exp[\mu_1(x+2\nu_1t)]\times \qquad (2.7)$$
$$\times\exp[i\nu_1(x+2\nu_1t)-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t]+$$
$$+2a_2\{1+\beta_1\exp[2\mu_1(x+2\nu_1t)]\}\exp[\mu_2(x+2\nu_2t)]\times$$
$$\times\exp[i\nu_2(x+2\nu_2t)-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где

$$\alpha_1=-\frac{\varkappa|a_1|^2}{(c+\mu_1^2-3\nu_1^2)\mu_1^2},\quad \alpha_2=-\frac{\varkappa|a_2|^2}{(c+\mu_2^2-3\nu_2^2)\mu_2^2},$$

$$\omega_1=\mu_1+i\nu_1\,,\quad \omega_2=\mu_2+i\nu_2\,,$$

$$\beta_1=\alpha_1\frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{(\omega_2+\bar\omega_1)^2}\,\frac{\omega_2^2+\omega_2\omega_1+\omega_1^2+c}{\omega_2^2-\omega_2\bar\omega_1+\bar\omega_1^2+c},$$

$$\beta_2=\alpha_2\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{(\omega_1+\bar\omega_2)^2}\,\frac{\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c}{\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c}, \qquad (2.8)$$

$$\gamma_0=\alpha_1\alpha_2\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right|^4\left|\frac{\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c}{\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c}\right|^2,$$

$$\delta_0^2=\frac{|\omega_1+\bar\omega_1|^2|\omega_2+\bar\omega_2|^2|\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_1+\bar\omega_1^2+c||\omega_2^2-\omega_2\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c|}{|\omega_1+\bar\omega_2|^4\,|\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c|^2}|\alpha_1\alpha_2|,$$

$$\theta=(\nu_2-\nu_1)x+(\mu_1^2-\mu_2^2-\nu_1^2+\nu_2^2)t+\theta_0.$$

При этом согласно (2.I) и (2.3) функции

$$v=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Delta\,,\quad \psi=\frac{\Psi}{\Delta} \qquad (2.9)$$

удовлетворяют системе (2.6). Нетрудно проверить, что если выполнены условия

$$(c+\mu_1^2-3\nu_1^2)\varkappa<0\,,\quad (c+\mu_2^2-3\nu_2^2)\varkappa<0\,, \tag{2.10}$$

$$\frac{|\omega_1+\bar\omega_1|^2|\omega_2+\bar\omega_2|^2|\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_1+\bar\omega_1^2+c||\omega_2^2-\omega_2\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c|}{|\omega_1+\bar\omega_2|^4\,|\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c|^2}\le 1\,, \tag{2.11}$$

то с помощью (2.7) и (2.8) получаем, что функция Δ положительна при любых вещественных значениях x, t, и, следовательно, определенное посредством (2.9) решение системы (2.6) не имеет особенностей при любых вещественных x, t.

Выясним теперь, каково поведение этого решения. Начнем со случая, когда $\omega_1\ne\omega_2$ и $\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c\ne 0$. Предположим, что $\nu_1\ne\nu_2$. Тогда при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится бегущая волна вида

$$v\sim v_1^-=\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 t)+\delta_1^-]}\,, \tag{2.12}$$

$$\psi\sim\psi_1^-=a_1^-\frac{\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 t)+\delta_1^-]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t]\,,$$

где

$$\delta_1^-=\frac{1}{2}\ln\alpha_1\,,\quad a_1^-=a_1\exp(-\delta_1^-)\,,$$

а при $t\to\infty$ эта же волна имеет вид

$$v\sim v_1^+=\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 t)+\delta_1^+]}\,, \tag{2.13}$$

$$\psi\sim\psi_1^+=a_1^+\frac{\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 t)+\delta_1^+]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t]\,,$$

где

$$\delta_1^+=\frac{1}{2}(\ln\gamma_0-\ln\alpha_2)\,,\quad a_1^+=\frac{a_1\beta_2}{\alpha_2}\exp(-\delta_1^+)\,.$$

В силу (2.8) справедливы равенства

$$\delta_1=\delta_1^+-\delta_1^-=2\ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right|+\ln\left|\frac{\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c}{\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c}\right|\,,\ |a_1^+|=|a_1^-|\,.$$

Заметим, что если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$, то при $t\to-\infty$ асимптотика рассматриваемой нами волны имеет вид (2.13), а при $t\to\infty$ она имеет вид (2.12). Далее, в нашем решении присутствует вторая бегущая волна. При $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$ и $t\to-\infty$ она имеет вид

$$v\sim v_2^-=\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t)+\delta_2^-]}\,, \tag{2.14}$$

$$\psi\sim\psi_2^-=a_2^-\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t)+\delta_2^-]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t]\,,$$

где

$$\delta_2^-=\frac{1}{2}\ln\alpha_2\,,\quad a_2^-=a_2\exp(-\delta_2^-)\,,$$

а при $t\to\infty$ асимптотика этой волны

$$v\sim v_2^+=\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t)+\delta_2^+]}\,, \tag{2.15}$$

$$\psi\sim\psi_2^+=a_2^+\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t)+\delta_2^+]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t]\,,$$

где

$$\delta_2^+=\frac{1}{2}(\ln\gamma_0-\ln\alpha_1)\,,\quad a_2^+=\frac{a_2\beta_1}{\alpha_1}\exp(-\delta_2^+)\,.$$

С учетом (2.8) получаем, что

$$\delta_2=\delta_2^+-\delta_2^-=2\ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right|+\ln\left|\frac{\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c}{\omega_1^2-\omega_1\bar\omega_2+\bar\omega_2^2+c}\right|\,,\ |a_2^+|=|a_2^-|\,.$$

Очевидно, что если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1<0$, то асимптотика второй волны при $t\to-\infty$ имеет вид (2.15), а при $t\to\infty$ она имеет вид (2.14).

Таким образом, при $\omega_1\ne\omega_2$, $\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c\ne 0$

и $\nu_1 \neq \nu_2$ интересующее нас решение описывает взаимодействие двух волн. Нелинейный характер взаимодействия приводит к искажению обеих волн в окрестности точки $x = x_0$, где

$$x_0 = \frac{(\delta_2^+ + \delta_2^-)\mu_1\nu_1 - (\delta_1^+ + \delta_1^-)\mu_2\nu_2}{2(\nu_2-\nu_1)\mu_1\mu_2}.$$

Это искажение достигает максимума в момент времени $t = t_0$, где

$$t_0 = \frac{(\delta_1^+ + \delta_1^-)\mu_2 - (\delta_2^+ + \delta_2^-)\mu_1}{4(\nu_2-\nu_1)\mu_1\mu_2},$$

и стремится к нулю при $t \to \pm\infty$. Вдали от точки $x = x_0, t = t_0$ каждая из волн имеет вид, задаваемый одной из асимптотик (2.I2) - (2.I5). Результат взаимодействия выражается исключительно в фазовых сдвигах обеих волн, т.е. взаимодействие является упругим.

В том случае, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2 + c \neq 0$, а $\nu_1 = \nu_2$, рассматриваемое нами решение описывает одну уединенную волну, которая получилась из двух слившихся волн и движется как одно целое. Однако конфигурация этой волны сильно отличается от конфигураций исходных волн. Так, например, пусть $\omega_1 = 2\mu + i\nu$, $\omega_2 = \mu + i\nu$, где величины μ и ν удовлетворяют условию $\mu^2 - 3\nu^2 + c = 0$. Полагая, далее, $a_2 = 0$, легко находим, что функции Δ и Ψ в этом случае имеют вид

$$\Delta = 1 + \alpha_2 \exp[2\mu(x+2\nu t)] + \alpha_1 \exp[4\mu(x+2\nu t)] + \frac{1}{9}\alpha_1\alpha_2 \exp[6\mu(x+2\nu t)],$$

$$\Psi = 2a_1\left\{1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \exp[2\mu(x+2\nu t)]\right\}\exp[2\mu(x+2\nu t)] \times \exp[i\nu(x+2\nu t) - i(4\mu^2+\nu^2)t],$$

где $\alpha_1 = -\dfrac{\varkappa |a_1|^2}{12\mu^4}$, а α_2 может быть взято произвольно. Взяв $\alpha_2 = (3\alpha_1)^{1/2}$, получим

$$\Delta = \left\{1 + \left(\frac{\alpha_1}{3}\right)^{1/2} \exp[2\mu(x+2\nu t)]\right\}^3.$$

При $\varkappa = -1$ и $a_1 \neq 0$ имеем $\alpha_1 > 0$ и, следовательно, $\Delta > 1$ при любых вещественных значениях x, t. Таким образом, в рассматриваемой сейчас ситуации наше решение имеет вид

$$v = \frac{6\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu t)+\delta]},$$

$$\psi = a\frac{\exp[i\nu(x+2\nu t)]}{ch^2[\mu(x+2\nu t)+\delta]}\exp[-i(4\mu^2+\nu^2)t],$$

где

$$\delta = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|a_1|}{6\mu^2}\right), \quad a = \frac{1}{2}a_1\exp(-2\delta),$$

и, следовательно, справедливо равенство $|a| = 3\mu^2$.

Наконец, при $\omega_1 = \omega_2$ наше решение вырождается в односолитонное решение.

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, но $\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 + \omega_2^2 + c = 0$. Положим

$$\omega_2^+ = -\frac{\omega_1}{2} + \frac{i}{2}(3\omega_1^2 + 4c)^{1/2}, \tag{2.I6}$$

$$\omega_2^- = -\frac{\omega_1}{2} - \frac{i}{2}(3\omega_1^2 + 4c)^{1/2}. \tag{2.I7}$$

Возьмем теперь комплексную плоскость ω_1 и выбросим из нее прямолинейный отрезок, соединяющий точки $\omega_1^+ = 2i\left(\frac{c}{3}\right)^{1/2}$, $\omega_1^- = -2i\left(\frac{c}{3}\right)^{1/2}$ мнимой оси, если $c > 0$, и точки $\omega_1^+ = 2\left(-\frac{c}{3}\right)^{1/2}$, $\omega_1^- = -2\left(-\frac{c}{3}\right)^{1/2}$ действительной оси, если $c < 0$. В комплексной плоскости ω_1 с таким разрезом равенства (2.I6) и (2.I7) определяют отображения F_+ и F_- в комплексную плоскость ω_2. Из равенства (2.I6) следует, что при $c \neq 0$ и больших $|\omega_1|$ отображение F_+ близко к повороту на угол $\frac{2\pi}{3}$, а из равенства (2.I7) следует, что при $c \neq 0$ и больших $|\omega_1|$ отображение F_- близко к повороту на угол $-\frac{2\pi}{3}$. При $c = 0$ эти отображения являются просто поворотами соответственно на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{2\pi}{3}$. Возьмем теперь в комплексной плоскости ω_1 со сделанным ранее разрезом области G_+ и G_-, определенные соответственно неравенствами $(\mu_1^2 - 3\nu_1^2 + c)\mu_1 > 0$ и $(\mu_1^2 - 3\nu_1^2 + c)\mu_1 < 0$. Нетрудно видеть, что область G_+ состоит из трех компонент H_1, H_3, H_5, а область G_- состоит из трех компонент H_2, H_4, H_6, которые определяются следующим образом:

$$H_1=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1>0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c>0\},$$

$$H_2=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1>0,\ \nu_1>0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c<0\},$$

$$H_3=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1<0,\ \nu_1>0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c<0\},$$

$$H_4=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1<0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c>0\},$$

$$H_5=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1<0,\ \nu_1<0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c<0\},$$

$$H_6=\{(\mu_1,\nu_1):\ \mu_1>0,\ \nu_1<0,\ \mu_1^2-3\nu_1^2+c<0\}.$$

Пусть $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_6$ – границы областей $H_1,\ldots,H_6$ соответственно. С помощью (2.16) и (2.17) нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$F_+(\Gamma_1)=\Gamma_3,\ F_+(\Gamma_2)=\Gamma_4,\ F_+(\Gamma_3)=\Gamma_5,\ F_+(\Gamma_4)=\Gamma_6,$$

$$F_+(\Gamma_5)=\Gamma_1,\ F_+(\Gamma_6)=\Gamma_2,\ F_-(\Gamma_1)=\Gamma_5,\ F_-(\Gamma_2)=\Gamma_6,$$

$$F_-(\Gamma_3)=\Gamma_1,\ F_-(\Gamma_4)=\Gamma_2,\ F_-(\Gamma_5)=\Gamma_3,\ F_-(\Gamma_6)=\Gamma_4.$$

На основании хорошо известных теорем из теории конформных отображений отсюда следуют аналогичные соотношения между областями $H_1,\ldots,H_6$ и их образами при отображениях F_+ и F_-, т.е.

$$F_+(H_1)=H_3,\ F_+(H_2)=H_4,\ F_+(H_3)=H_5,\ F_+(H_4)=H_6,$$

$$F_+(H_5)=H_1,\ F_+(H_6)=H_2,\ F_-(H_1)=H_5,\ F_-(H_2)=H_6,$$

$$F_-(H_3)=H_1,\ F_-(H_4)=H_2,\ F_-(H_5)=H_3,\ F_-(H_6)=H_4.$$

В комплексной плоскости ω_1 со сделанным ранее разрезом возьмем теперь области H_+ и H_-, определенные соответственно неравенствами $(\mu_1^2-3\nu_1^2+c)\mu_1^2>0$ и $(\mu_1^2-3\nu_1^2+c)\mu_1^2<0$. Нетрудно

видеть, что $H_+=H_1\cup H_4$, $H_-=H_2\cup H_3\cup H_5\cup H_6$. Из сказанного выше следует, что $F_+(H_+)\cap H_+=F_-(H_+)\cap H_+=0$. Наоборот, $F_+(H_-)\cap H_-=H_2\cup H_5$, $F_-(H_-)\cap H_-=H_3\cup H_6$. Это значит, что какую бы точку $\omega_1\in H_+$ мы ни взяли, в области H_+ нет точки ω_2, которая бы удовлетворяла соотношению $\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c=0$. Наоборот, для любой точки $\omega_1\in H_-$ найдется ровно одна точка $\omega_2\in H_-$, такая, что $\omega_1^2+\omega_1\omega_2+\omega_2^2+c=0$. При этом имеют место следующие соотношения:

1) если $\omega_1\in H_2$, то $\omega_2=F_-(\omega_1)\in H_6$,
2) если $\omega_1\in H_3$, то $\omega_2=F_+(\omega_1)\in H_5$,
3) если $\omega_1\in H_5$, то $\omega_2=F_-(\omega_1)\in H_3$,
4) если $\omega_1\in H_6$, то $\omega_2=F_+(\omega_1)\in H_2$.

Это значит, что вещественные μ_1,μ_2 и мнимые ν_1,ν_2 части точек ω_1 и ω_2 удовлетворяют условиям $\mu_1\mu_2>0$, $\nu_1\nu_2<0$. Согласно (2.8) отсюда следует, что при $\varkappa=1$ справедливы неравенства $\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2\geq 0$, $0\leq\delta_0^2\leq\alpha_1\alpha_2$. Таким образом, в рассматриваемом сейчас случае наше решение не имеет особенностей при любых вещественных значениях x,t.

Выясним теперь, каково поведение этого решения. Нетрудно видеть, что при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении присутствует бегущая волна вида

$$v\sim\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1t)+\delta_1]}, \tag{2.18}$$

$$\psi\sim\hat a_1\frac{exp[i\nu_1(x+2\nu_1t)]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1t)+\delta_1]}\,exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t],$$

где $\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1$, $\hat a_1=a_1 exp(-\delta_1)$, а при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$ эта волна появится при $t\to\infty$. Кроме того, при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится вторая бегущая волна

$$v\sim\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2t)+\delta_2]}, \tag{2.19}$$

$$\psi\sim\hat a_2\frac{exp[i\nu_2(x+2\nu_2t)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2t)+\delta_2]}\,exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где $\delta_2=\frac{1}{2}\ln\alpha_2$, $\hat{a}_2=a_2\exp(-\delta_2)$, а при $(v_1-v_2)\mu_1<0$ эта волна появится при $t\to\infty$. В силу неравенства $\mu_1\mu_2>0$ из неравенства $(v_2-v_1)\mu_2>0$ следует неравенство $(v_1-v_2)\mu_1<0$. Это значит, что если $(v_2-v_1)\mu_2>0$, то при $t\to-\infty$ наше решение имеет асимптотику (2.18), а при $t\to\infty$ оно имеет асимптотику (2.19). Наоборот, если $(v_2-v_1)\mu_2<0$, то при $t\to-\infty$ справед ва асимптотика (2.19), а при $t\to\infty$ имеет место асимптотика (2.18). Таким образом, в рассматриваемой нами ситуации наше решение имеет существенно разные асимптотики при $t\to-\infty$ и при $t\to\infty$. Далее, в си неравенства $v_1v_2<0$ бегущие волны (2.18) и (2.19) имеют прямо противоположные направления движения, т.е. при $(v_2-v_1)\mu_2>0$ солитон (2.18) приходит из бесконечности, затем его параметры меняются, он изменяет направление движения на прямо противоположное и, наконец, уходит в бесконечность, имея вид (2.19). При $(v_2-v_1)\mu_2<0$ процесс происходит в обратном порядке, т.е. из бесконечности приходит солитон (2.19), а уходит в бесконечность солитон (2.18). Заметим, что согласно (2.8) справедливо соотношение

$$\frac{|\hat{a}_1|^2}{|\hat{a}_2|^2}=\frac{(\mu_1^2-3v_1^2+c)\mu_1^2}{(\mu_2^2-3v_2^2+c)\mu_2^2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

В заключение отметим, что решения, аналогичные только что рассмотренным, ранее были обнаружены в другой системе уравнений /4/.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Mel'nikov V.K. On equations for wave interactions. - Lett. Math. Phys., 1983, v.7, N 2, p.129-136.**
2. Мельников В.К. Прямой метод для получения многосолитонного решения задачи о взаимодействии волн на плоскости x,y. Препринт ОИЯИ Р2-86-689, Дубна, ОИЯИ, 1986.
3. Мельников В.К. Гашение волн в нелинейной интегрируемой системе. Препринт ОИЯИ Р2-86-234, Дубна, ОИЯИ, 1986.
4. **Calogero F., Degasperis A. Coupled Nonlinear Evolution Equations Solvable Via the Inverse Spectral Transform, and Solitons that Come Back: the Boomeron.- Lett. Nuovo Cimento, 1976, v.16, N 14, p.425-433.**

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1987 года.

Мельников В.К. Р2-87-136
"Отражение" волн в нелинейных
интегрируемых системах

В двух нелинейных интегрируемых системах, описывающих взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, найдены решения типа бумерона. Эти решения получены из двусолитонных решений при наложении определенных дополнительных условий на их параметры. Полученные результаты имеют тесную связь с некоторыми проблемами физики плазмы, физики твердого тела, гидродинамики и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-87-136
"Reflection" of Waves in Nonlinear
Integrable Systems

Solutions of the boomeron-type are found in two nonlinear integrable systems describing the interaction of a long wave with a short wave packet. These solutions follow from two-soliton solution if certain additional conditions are imposed on their parameters. The results are relevant to some problems of plasma physics, solid state physics, hydrodynamics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987