

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



M-121

26/2-75
P2 - 8689

Д.П.Мавло, И.В.Пузынин, А.Т.Филиппов

1820/2-75

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

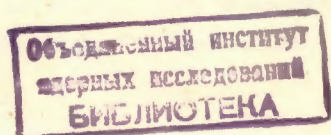
1975

P2 - 8689

Д.П.Мавло, И.В.Пузынин, А.Т.Филиппов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в "Journal of Computational
Physics"



§ I. Введение

Многие задачи квантовой механики и квантовой теории поля сводятся к решению систем уравнений следующего вида:

$$U_\alpha(x) = U_\alpha^{(0)}(x) + \sum_{i=1}^{M_\alpha} A_{\alpha i}(x, \lambda) \int_0^x dy B_{\alpha i}(y, \lambda) f_\alpha(\lambda, y, U_\alpha(y)) + \sum_{i=1}^{N_\alpha} C_{\alpha i}(x, \lambda) \int_x^\infty dy D_{\alpha i}(y, \lambda) f_\alpha(\lambda, y, U_\alpha(y)). \quad (\text{I.I})$$

S U M M A R Y

A general formulation of certain singular boundary value problems of quantum mechanics and field theory is given. The problem may be formulated as a system of integral equations or, equivalently, as a system of differential equations with corresponding boundary conditions. A general method for solving such a problem, based on the continuous analog of Newton's method, is suggested. One simple boundary value problem, which arised in the theory of composite hadrons, is investigated in details. Using this problem as a typical example we formulate the method of analytic continuation of the numerical solution defined on the real axis into the whole complex plane.

Здесь $\alpha = 1, 2, \dots, n$; A, B, C, D и $U_\alpha^{(0)}$ — известные функции переменной X и некоторой совокупности параметров λ , заданные аналитически или численно; f_α — функции, зависящие от независимой переменной X , искомых функций $U_\alpha(x)$ и параметров λ . Задача состоит в том, чтобы найти соотношения между параметрами, при которых система (I.I) имеет решение, и определить соответствующие функции $U_\alpha(x)$ ("собственные функции")^{x)}

В такой общей постановке трудно сформулировать условия существования решения этой задачи, и здесь мы не пытаемся этого сделать. Цель данной работы состоит в том, чтобы на простом примере, в котором существование решения очевидно,

x) Вообще говоря, задача на собственные значения возникает обычно для однородной системы (I.I): $U_\alpha^{(0)} \equiv 0$. Допуская некоторую вольность, мы будем употреблять термины "собственные значения" и "собственные функции" в общем случае (I.I).

сформулировать и обосновать достаточно общий метод численного решения весьма обширного класса подобных задач. Рассматриваемый нами пример, представляющий самостоятельную ценность для физики, встретился в кварковой модели мезонов, предложенной одним из авторов (см. [1]). В конце этого раздела мы сформулируем соответствующую задачу, но сначала приведем несколько других примеров, приводящих к уравнениям (I.I). Уравнение Шредингера для парциальных волн в импульсном представлении для потенциалов, которые в координатном представлении имеют вид $V(r) = \lambda r^{-2N}$ ($N = 1, 2, 3, \dots$), сводится к уравнению (I.I) (см. [2] и обзор [3]). При этом $n=1$; $M_1 = N_1 = N$; $U_1^{(0)} \equiv 0$ и

$$f_1(\lambda, x, u_1(x)) = \lambda f_{0n}(e) U_1(x) (K^2 + x^2)^{-1}$$

$$A_{1i}(x) = D_{1i}(x) = f_{in}(e) x^{-e+2(N-i)} \quad (I.2)$$

$$B_{1i}(x) = C_{1i}(x) = f_{in}(e) x^{e+2i-1},$$

где $i=1, 2, \dots, N$; $f_{0n}(e)$, $f_{in}(e)$ - некоторые рациональные функции орбитального момента e (который может быть комплексным), $(-K^2)$ - квадрат импульса частицы (в общем случае также комплексный параметр). Задача сводится к определению соотношения между комплексными параметрами λ , e и K^2 (так называемое уравнение для траектории Редже) и волновой функции

$U_1(x)$. Продифференцировав уравнение (I.I)-(I.2), его нетрудно свести к линейному дифференциальному уравнению порядка $2N$ для функции $U_1(x)$ с N граничными условиями при $x=0$ и N граничными условиями при $x \rightarrow \infty$. Коэффициенты при производных $U_1(x)$ являются рациональными функциями перемен-

ной x , а для таких уравнений существует достаточно разработанная теория [4] (в частности, при $N=1$, а также при $N \geq 2$ и $K=0$ можно найти точное решение задачи с помощью известных специальных функций [2,3]). Однако такой простой потенциал редко встречается в физических задачах и может рассматриваться как некоторое более или менее удачное приближение к реально встречающимся потенциалам. Более интересны потенциалы вида $V(r) = \lambda_1 r^{-2N-2} - \lambda_0 r^{-2N}$, с помощью которых можно уже неплохо приблизить потенциалы, встречающиеся в задачах атомной и молекулярной физики [3] (при $N=3$ это - так называемый потенциал Лаварда-Джонса). Для этого потенциала при любом N решение уравнения Шредингера в импульсном пространстве также сводится к решению задачи (I.I). К этой же задаче приводит решение уравнения Шредингера с потенциалом вида

$$V(r) = \sum_{n=0}^N \lambda_n r^{-2(N-n)}, \quad \text{где } N = 1, 2, 3, \dots$$

К простейшему уравнению вида (I.I) с $M_\lambda = N_\lambda = 1$ и $f(u) \sim u$ сводится уравнение Шредингера в координатном пространстве для любого потенциала $V(r)$. Пользуясь этим обстоятельством, можно построить приближенные методы решения уравнения Шредингера с сингулярными потенциалами [2,3].

Отметим здесь, что решение уравнения Шредингера в импульсном представлении реально необходимо для многих физических приложений, в частности, для решения задачи о рассеянии частицы на связанном состоянии двух других частиц. Можно, конечно, сначала найти численное решение уравнения Шредингера в координатном пространстве, а затем выполнять численно преобразование Фурье этого решения. На практике, однако, такой подход оказывается несколько не проще, чем предлагаемый нами, к тому же вели-

чины в импульсном представлении непосредственно связаны с наблюдаемыми.

Заметим также, что некоторые уравнения более общего вида

$$U_\alpha(x) = \int_0^\infty dy \mathcal{K}_\alpha(x, y) f_\alpha(\alpha, y, U_\alpha(y)) \quad (I.3)$$

можно приближенно свести к системе вида (I.I). Действительно, если ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ допускают равномерные приближения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\alpha(x, y) &= \sum_i A_{\alpha i}(x) B_{\alpha i}(y) & \text{при } x > y \\ \mathcal{K}_\alpha(x, y) &= \sum_i C_{\alpha i}(x) D_{\alpha i}(y) & \text{при } x < y, \end{aligned} \quad (I.4)$$

то мы при конечном числе членов в (I.4) получаем задачу (I.I).

Например, пусть $\mathcal{K}_\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^{\alpha}$, где $\alpha > 0$. Тогда, разлагая $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ в ряд по степеням $\frac{y^2}{x^2}$ при $y < x$ и в ряд по степеням $\frac{x^2}{y^2}$ при $x < y$, получаем приближения вида (I.4). Аналогично, если $\mathcal{K}_\alpha(x, y) = \ln(x^\alpha + y^\alpha)$,

то достаточно воспользоваться каким-либо хорошо сходящимся при $0 \leq Z \leq 1$ разложением или многочленным приближением для $\ln(1+Z)$, чтобы приближенно свести задачу к системе (I.I).

Задачи типа (I.I) неоднократно встречались в квантовой теории поля при решении уравнений Бете-Солпитера и Швингера-Дайсона (см., например, [5]). Мы приведем здесь два примера: уравнение для волновой функции π -мезона с нулевой массой, составленного из кварка и антикварка, связанных силами, возникающими за счет обмена бесконечно большим числом резонансных состояний (с экспоненциально растущим спектром масс) и уравнения для функции Грина кварка в той же модели (см. [1]).

Как показано в работах [1], уравнение для релятивистской волновой функции π -мезона можно представить в виде:

$$U(x) = -\varepsilon \frac{\pi}{2} f \left\{ x^{1/2} N_1(x) \int_0^x J_1(y) \frac{y^{1/2}}{y^2 + \mu^2} U(y) dy + x^{1/2} J_1(x) \int_x^\infty N_1(y) \frac{y^{1/2}}{y^2 + \mu^2} U(y) dy \right\}, \quad (I.5)$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $N_1(x)$ и $J_1(x)$ - функции Неймана и Бесселя, соответственно (два независимых решения уравнения Бесселя). Дифференцируя уравнение (I.5), легко получить для $U(x)$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка с граничными условиями при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$. Граничные условия можно найти, подставляя в (I.5) общее решение дифференциального уравнения и выполняя интегрирование по частям. В данном случае граничные условия легко получить также, переходя к пределу $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ в правой части уравнения (I.5). Соответствующая дифференциальная краевая задача выписана в § 2.

Уравнения для пропагатора кварка в том же приближении [1] сводятся к нелинейной системе (I.I) для двух функций $U_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$.

$$\begin{aligned} M_1 = N_1 = M_2 = N_2 = 1; \quad U_1''(x) = 0; \quad U_2''(x) = 1; \\ A_{\alpha 1}(x) = D_{\alpha 1}(x) = \frac{N_\alpha(x)}{x^\alpha}; \quad C_{\alpha 1}(x) = B_{\alpha 1}(x) = \frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} \quad (I.6) \end{aligned}$$

Эти уравнения можно свести к неоднородной системе двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с соответствующими граничными условиями [1].

Переход от интегральных уравнений (I.1) к дифференциальной краевой задаче часто бывает полезен, так как для дифференциальных уравнений существуют эффективные аналитические и асимптотические методы, позволяющие быстро изучить аналитические свойства решений как функций комплексных параметров X и λ , асимптотическое поведение решений в окрестности особых точек и зависимость решений от параметров (при больших и малых значениях λ). Такая информация чрезвычайно важна в физических задачах. В частности, физическая задача, связанная с уравнением (I.5), требует вычисления собственных функций $U(x)$ не только при $X > 0$, но и во всей комплексной плоскости X , а значения $U(\pm i\mu)$ прямо связаны со значением важной физической величины — константы связи π -мезонов с кварками. В то же время, поскольку функции A, B, C, D и $U^{(n)}$ обычно задаются лишь приближенно (или даже численно), многократное их дифференцирование вносит дополнительные неконтролируемые ошибки, и в общем случае, при численном решении задачи (I.1), желательнее избежать перехода к дифференциальной задаче. Поэтому для численного решения системы (I.1) мы предлагаем использовать континуальный аналог метода Ньютона [6], рассматривая систему (I.1) как уравнение в функциональном пространстве и решая его итерациями. Этот метод, подробно изученный и систематически использовавшийся в работах [6, 18, 19], одинаково хорошо "работает" как в случае интегральных уравнений, так и в случае дифференциальных краевых задач самого общего вида. Его основное преимущество заключается в том, что он позволяет найти с одинаковой, контролируемой в процессе вычислений точностью как собственные функции $U_\lambda(x)$, так и собственные значения λ . Существенный недостаток метода заключается в том, что для его применения необходимо

иметь достаточно хорошее нулевое приближение. Мы сейчас покажем, что для систем типа (I.1) такие приближения построить нетрудно.

Рассмотрим для простоты уравнение (I.5). Обозначим

$$\begin{aligned} A(x, f, \mu) &= -\varepsilon \frac{\pi}{2} f \int_0^x dy \frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^2 + \mu^2} J_1(y) U(y) \\ B(x, f, \mu) &= -\varepsilon \frac{\pi}{2} f \int_x^\infty dy \frac{y^{\frac{1}{2}}}{y^2 + \mu^2} N_1(y) U(y). \end{aligned} \quad (I.7)$$

Тогда решение имеет вид:

$$U(x) = A(x, f, \mu) X^{\frac{1}{2}} N_1(x) + B(x, f, \mu) X^{\frac{1}{2}} J_1(x), \quad (I.8)$$

причем

$$A(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad A(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A; \quad B(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} B, \quad B(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (I.9)$$

Построим некоторые функции $A(x)$ и $B(x)$, зависящие от неопределенных параметров и удовлетворяющие условиям (I.9), где A и B также считаем неопределенными параметрами. Например, в качестве простейшего приближения можно взять

$$A(x) = A(1 - e^{-\alpha x}), \quad B(x) = B e^{-\beta x}. \quad (I.10)$$

Подставим (I.8), (I.10) в правую часть уравнения (I.5), которое символически запишем в виде $u = \hat{K}u$ и потребуем, чтобы параметры $\alpha, \beta, \frac{A}{B}, \mu$ и f были такими, чтобы невязка $\|u - \hat{K}u\|$ была минимальной. Вид невязки, т.е. определения нормы $\|u\|$ в функциональном пространстве, можно задавать по-разному, например, как

$$\|u\| = \int_0^{\infty} dy U^2(y) \rho(y) \quad \text{или} \quad \|u\| = \max_{0 \leq x < \infty} |u(x)|, \quad (I.II)$$

где $\rho(y)$ — некоторая весовая функция. Важно подчеркнуть, что пробные функции имеют правильное асимптотическое поведение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$, а это означает, что при численных расчетах минимизацию невязки можно фактически проводить на некотором конечном интервале, не содержащем граничных точек 0 и ∞ .

В следующих разделах мы детально изучим задачу (I.5). В § 2 рассмотрена и решена методом *JWKB* соответствующая дифференциальная краевая задача и найдено асимптотическое разложение величины $\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}$ при больших значениях x_0 . В § 3 дифференциальная краевая задача решается численно с помощью континуального аналога метода Ньютона. Для собственных значений $f(\mu)$ используется *JWKB* — приближение, а для собственных функций — самая грубая форма приближения (I.8) с разрывными функциями $A(x)$ и $B(x)$. В § 4 строится аналитическое продолжение численного решения $u(x)$ в комплексную плоскость X . Мы полагаем, что предложенный в этом разделе метод аналитического продолжения, основанный на сравнении решений в виде рядов с численными решениями, обладает достаточной общностью и может применяться для решения других задач такого типа.

§ 2. Решение основной краевой задачи асимптотическими методами

Как уже отмечалось, релятивистское рассмотрение задачи о π -мезоне как сильно связанном состоянии в системе кварк-антикварк приводит к уравнению (I.5), которое легко сводится к следующей краевой задаче на интервале $[0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[1 + \frac{\epsilon f}{x^2 + \mu^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \right] u(x) = 0 \quad (2.1)$$

$$u(0) = 0 \quad (2.2)$$

$$u(x) \sim x^{1/2} N_\lambda(x), \quad (2.3)$$

где $\epsilon = \pm 1$, $\lambda = 1$ для π -мезона и $N_\lambda(x)$ — функция Неймана (второе решение уравнения Бесселя). Собственные функции должны быть нормированы согласно условию [1]:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{u(x)}{x^2 + \mu^2} \right]^2 dx = 1. \quad (2.4)$$

В настоящем параграфе мы воспользуемся для решения краевой задачи (2.1)–(2.4) известными асимптотическими методами:

I) Применим метод *JWKB* [7] для построения квазиклассических решений линейного дифференциального уравнения (2.1) и получения квазиклассического спектра собственных значений $f_n(\mu)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ задачи (2.1)–(2.4).

II) Используем асимптотические ряды по обратным степеням X для решений уравнения (2.1) при больших X и на этой основе корректно поставим граничное условие в конечной (доста-

точно удаленной) точке X_{\max} рассматриваемого интервала

$X_{\max} \in [0, \infty)$, что нам понадобится в дальнейшем для реализации численного метода (см. § 3).

Не теряя общности, мы будем рассматривать случай $\lambda = 1$ и $\xi = -1$, поскольку распространение всех наших результатов на любые λ и $\xi = +1$ не представляет затруднений. При этом легко видеть, что в точке $\mu = 0$ можно сразу выписать точное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничному условию (2.2):

$$U(x) = \text{const } X^{1/2} J_\nu(x), \quad (2.5)$$

где $\nu = (1+f)^{1/2}$ и $J_\nu(x)$ - функция Бесселя. Сравнивая асимптотическое поведение $N_1(x)$ и (2.5) при $x \rightarrow \infty$ и используя условие нормировки (2.4), получаем собственные значения и нормированные собственные функции краевой задачи (2.1)-(2.4) при $\mu = 0$:

$$f_{n(-)}(0) = N(N+2) \quad (2.6)$$

$$U_{n(-)}(x) = 4\pi [2(N+1)(N+2)]^{1/2} X^{1/2} J_{N+1}(x). \quad (2.7)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$, $N = 2n+1 = 1, 3, 5, \dots$ и введено определение: $f_{n(\pm)}(\mu)$ и $U_{n(\pm)}(x)$ - собственные значения и собственные функции краевой задачи (2.1)-(2.4), соответствующие $\xi = \pm 1$. Это точное решение, интересное само по себе, мы используем в дальнейшем для проверки точности различных приближенных аналитических (в частности, JWKB) и численных решеток краевой задачи (2.1)-(2.4).

Рассмотрим задачу I), т.е. построим JWKB решения уравнения (2.1), которое по форме совпадает с нерелятивистским уравнением Шредингера с потенциалом $V(x) = f(x^2 + \mu^2)^{-1}$. Чтобы правильно перейти к квазиклассическому виду [7], необходимо воспользоваться обобщенным преобразованием Лангера [8] или, что то же самое в данном случае, просто сделать замену Крамерса [9]: $\lambda^2 - \frac{1}{4} \rightarrow \lambda^2$. Полученные после такой замены квазиклассические решения будут обладать правильным поведением в особых точках уравнения (2.1) и иметь правильную фазу при $x \rightarrow \infty$.

Уравнение (2.1) имеет на действительной оси регулярную особенность при $x=0$, существенную особенность при $x=\infty$ и одну точку поворота x_1 . Связывая обычным образом решения справа и слева от точки поворота x_1 [7], получаем:

$$U(x) = \frac{B}{\sqrt{|P(x)|}} \exp\left\{-\int_{x_1}^x |P(t)| dt\right\}, \quad 0 \leq x < x_1 \quad (2.8)$$

$$U(x) = \frac{2B}{\sqrt{|P(x)|}} \cos\left\{\int_{x_1}^x P(t) dt - \frac{\pi}{4}\right\}, \quad x_1 < x < \infty, \quad (2.9)$$

где B - нормировочная постоянная и

$$x_1 = \left[\left\{ \frac{1}{4}(\mu^2 - f - 1)^2 + \mu^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{2}(\mu^2 - f - 1) \right]^{1/2}$$

$$P(x) = \left[1 - \frac{f}{x^2 + \mu^2} - \frac{1}{x^2} \right]^{1/2}.$$

JWKB - спектральное условие получается из граничного условия (2.3). При $x \rightarrow \infty$ JWKB - решение (2.9) ведет себя следующим образом:

$$U(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sin \left[x - C(f, \mu) + \frac{\pi}{4} \right]; \quad (2.10)$$

здесь $C(f, \mu)$ определяется как

$$C(f, \mu) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - \int_{x_1}^x P(t) dt \right].$$

Сравнивая (2.10) с известным асимптотическим разложением для $N_1(x)$ при $x \rightarrow \infty$, получаем JWKB-спектральное условие в следующем виде:

$$C(f, \mu) = (n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

При $\mu = 0$ JWKB-спектр совпадает с точным, т.е.

$$\int_{x_1}^x P(t) dt \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x - (f+1) \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $C(f, \mu=0) = (f+1) \frac{\pi}{2}$, откуда получаем $f_{n(f)}^{jwkb}(0) = N(N+2)$, где $N = 2n+1$ т.е. результат, совпадающий с (2.6).

В общем случае $0 \leq \mu < \infty$ функцию $C(f, \mu)$, входящую в JWKB-спектральное условие (2.11), можно выразить через эллиптические интегралы, что весьма удобно как для численных расчетов, так и для асимптотических оценок:

$$C(f, \mu) = -\frac{\alpha + \lambda}{(\alpha - c)^{1/2}} F\left(\frac{\pi}{2}, q\right) + (\alpha - c)^{1/2} E\left(\frac{\pi}{2}, q\right) + \frac{\mu^2}{\alpha \beta (\alpha - c)^{1/2}} \left[(\beta - \alpha) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\beta}{\alpha}, q\right) + \alpha F\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \right], \quad (2.12)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} (\lambda^2 + 4\mu^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \lambda \equiv \lambda_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} (\lambda^2 + 4\mu^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \lambda;$$

$$c = -\mu^2; \quad \lambda = \mu^2 - f - 1; \quad q = \left(\frac{\beta - c}{\alpha - c} \right)^{1/2};$$

и F, E и Π - эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, соответственно (см. [10, 11], где даны определения и полезные соотношения).

При $\mu \rightarrow 0, \infty$ из (2.12) можно получить следующие весьма эффективные для физических приложений асимптотические оценки собственных значений:

$$\mu \rightarrow 0 \quad f_{n(f)}^{jwkb}(\mu) = N(N+2) + \frac{\mu^2}{2} \frac{N(N+2)}{N(N+2)+1} + \dots \quad (2.13)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad f_{n(f)}^{jwkb}(\mu) = 2N\mu - \frac{N^2}{2} + \dots \quad (2.14)$$

($N = 2n+1 = 1, 3, 5, \dots$).

Для проверки точности JWKB-метода интересно рассмотреть случай $\lambda = 1/2$. Для этого частного значения λ уравнение (2.1) может быть приведено к уравнению для сфероидальных функций, из теории которых известны решения следующей краевой задачи [12]:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \left[\mu^2 - \frac{f}{z^2 + 1} \right] U(z) = 0 \quad (2.15)$$

$$U(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z; \quad U(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sin(\mu z).$$

Собственными функциями этой краевой задачи будут

$$U_n(z) = A_n (z^2 + 1)^{1/2} R_{1n}^{(1)}(\mu, z), \quad (2.16)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N = 2n$ и $R_{1n}(\mu, z)$ - сфероидальные функции (см. [12]), где даны определения и полезные соотно-

ношения). Собственные значения краевой задачи (2.15) $f_n(\mu)$ имеют при $\mu \rightarrow 0, \infty$ следующие асимптотические разложения [12]:

$$\mu \rightarrow 0 \quad f_n(\mu) = N(N+1) + a_n \mu^2 + \dots \quad (2.17)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad f_n(\mu) = 2N\mu - \frac{N^2}{2} + \dots \quad (2.18)$$

(коэффициенты a_n равны: $a_1 = 4/7$, $a_2 = 40/77$, $a_3 = 28/55$, ...). С другой стороны, задача (3.15) может быть решена JWKB-методом, который дает следующие асимптотические разложения для собственных значений:

$$\mu \rightarrow 0 \quad f_n^{jwkb}(\mu) = N(N+1) + \frac{\mu^2}{2} \frac{N(N+1)}{N(N+1) + 1/4} + \dots \quad (2.19)$$

$$\mu \rightarrow \infty \quad f_n^{jwkb}(\mu) = 2N\mu - \frac{N^2}{2} + \dots \quad (2.20)$$

где $N = 2n = 2, 4, 6, \dots$. Как видно из приведенных разложений, JWKB-метод в точности воспроизводит главные члены разложений и обеспечивает хорошую точность для вторых членов. Это позволяет доверять квазиклассике и в других случаях, когда точные решения не известны, скажем, для $\lambda = 1$, т.е. краевой задаче (2.1)-(2.4), соответствующей физической задаче о " π -мезоне".

Случай $\varepsilon = +1$ может быть рассмотрен совершенно аналогично. JWKB-спектр по-прежнему определяется формулами (2.11)-(2.12), но уже с другим набором параметров:

$$a = \frac{1}{2}(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1/2} - \frac{1}{2}\lambda \equiv X_1; \quad b = -\mu^2;$$

$$c = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1/2} - \frac{1}{2}\lambda; \quad \lambda = \mu^2 + f - 1; \quad q = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^{1/2};$$

Асимптотическое разложение для собственных значений при $\mu \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$\mu \rightarrow \infty \quad f_{n(\pm)}^{jwkb} = 2N\mu + \frac{N^2}{2} + \dots \quad (2.21)$$

($N = 2n+1 = 1, 3, 5, \dots$). Можно показать, что отличительной особенностью случая $\varepsilon = +1$ является тот факт, что все кривые $f_{n(\pm)}(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ сходятся в одну точку: $f_{n(\pm)}(0) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. при каждом фиксированном $f > 0$ число собственных значений μ будет бесконечным в отличие от случая $\varepsilon = -1$, где это число всегда конечно.

JWKB-спектральное условие (2.11)-(2.12) очень удобно для выполнения численных расчетов собственных значений $f_{n(\pm)}(\mu)$ на ЭВМ во всем интервале $0 \leq \mu < \infty$. Результаты расчетов приводятся на рис. 1 и в табл. 1 - для основных уровней $f_{0(\pm)}(\mu)$, $\lambda = 1$, и на рис. 2 - для первых трех уровней. Из этих графиков видно, что $f_{n(\pm)}(\mu)$ довольно быстро выходит на асимптотики (2.14), (2.21). Например, при $\varepsilon = -1$ для основного уровня при $\mu \geq 5$ асимптотическая формула $f_{0(-)}(\mu) \sim 2\mu - \frac{1}{2}$ соблюдается с точностью не менее 3%. В случае $\varepsilon = +1$ кривые $f_{n(\pm)}(\mu)$ выходят на асимптотики еще быстрее.

Из вышеизложенного видны главные преимущества JWKB-метода: его простота в применении, его универсальность и хорошая точность, по крайней мере, в предсказании собственных зна-

чений, которую, однако, очень нелегко оценить a priori [13]. Несколько хуже обстоит дело с собственными JWKB-функциями, которые имеют сингулярность в точке поворота, в то время как точное решение непрерывно в этой точке. Преодолеть последнюю трудность, а также повысить точность приближения позволяет лангеровский метод эталонного уравнения [14], согласно которому необходимо подобрать наиболее простое уравнение, обладающее теми же особыми точками и точками поворота, что и исследуемое уравнение. Зная решения эталонного уравнения, можно построить асимптотические ряды для решений исходного уравнения либо по способу Лангера [14] и Олвера [15], когда эталонное решение умножается на асимптотический ряд, либо по способу Черри [16], когда в виде асимптотического ряда ищем аргумент эталонного уравнения. В связи с последним методом необходимо упомянуть работу Хекта и Мейера [17], которым удалось построить итерационную схему нахождения членов вышеуказанных асимптотических рядов. В настоящей работе мы не будем, однако, использовать высшие члены асимптотических разложений для собственных функций и высшие поправки к собственным значениям [7], т.е. это в достаточной мере громоздко, а стандартный JWKB-метод дает вполне удовлетворительную точность для краевой задачи (2.1)-(2.4) (см. § 3, где проводится сравнение с численным решением).

Рассмотрим задачу П). Асимптотическое поведение при $X \rightarrow \infty$ решения уравнения (2.1), удовлетворяющего граничному условию (2.3), имеет следующий вид [4]:

$$U(x) \sim \sin \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{x^{2n}} \right\} + \cos \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{x^{2n+1}} \right\} \quad (2.22)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} \sim \cos \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d'_n}{x^{2n}} \right\} - \sin \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta'_n}{x^{2n+1}} \right\}, \quad (2.23)$$

$$\left(\begin{aligned} \xi &\equiv x - \frac{3\pi}{4}, \quad a \\ \left\{ \begin{aligned} d'_n &= d_n - (2n-1)\beta_{n-1}; \quad \beta_{-1} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \beta'_n &= \beta_n + 2nd_n \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Коэффициенты разложения d_n и β_n удовлетворяют системе рекуррентных соотношений:

$$\left\{ \begin{aligned} d_0 &= 1 \\ 2(2n+1)\beta_n &= -\left[2n(2n+1) - \frac{3}{4}\right]d_n + f \sum_{i=0}^n (-\mu^2)^i d_{n-i} \\ 2(2n+2)d_{n+1} &= \left[(2n+2)(2n+1) - \frac{3}{4}\right]\beta_n - f \sum_{i=0}^n (-\mu^2)^i \beta_{n-i} \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

и могут быть легко рассчитаны на ЭВМ при любых μ и f . Асимптотические разложения (2.22), (2.23) можно использовать для корректной постановки граничного условия в некоторой конечной достаточно удаленной точке $X = X_{\max}$, т.к. они позволяют представить логарифмическую производную в виде:

$$\begin{aligned} \frac{U'(x)}{U(x)} \Big|_{X=X_{\max}} &= \frac{\operatorname{ctg} \left\{ \sum_{n=0}^{n_0} \frac{d'_n}{X_{\max}^{2n}} \right\} - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\beta'_n}{X_{\max}^{2n+1}}}{\sum_{n=0}^{n_0} \frac{d_n}{X_{\max}^{2n}} + \operatorname{ctg} \left\{ \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\beta_n}{X_{\max}^{2n+1}} \right\}} \equiv \\ &\equiv F(f, \lambda, \mu, X_{\max}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Выбор n_0 определяется асимптотической природой рядов, входящих в (2.26). При фиксированном $X = X_{\max}$ члены этих рядов с ростом номера падают до некоторого номера (зависящего от X_{\max} и, быть может, разного для всех четырех рядов, входящих в (2.26)), а потом начинают расти. Обозначим номера,

при которых имеют место минимумы, через n_i ($i = 1, 2, 3, 4$ - для каждого из четырех рядов). Максимальная точность будет достигнута, если мы возьмем именно эти n_i в качестве верхних пределов в суммах (2.26). Для удобства можно взять универсальное $n_0 = \min\{n_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Важно отметить, что точность, с которой мы можем поставить граничное условие (2.26) при фиксированной точке X_{max} , является ограниченной, но ее можно как угодно повысить, просто увеличив X_{max} .

Основные результаты этого параграфа ($JWKVB$ - спектр, асимптотики собственных значений при $\mu \rightarrow 0, \infty$, граничное условие в конечной точке), интересные сами по себе, будут использованы в следующем параграфе в качестве основы для применения численных методов (в частности, непрерывного аналога метода Ньютона), которые позволяют повысить точность решения краевой задачи (2.1)-(2.4).

§ 3. Численный метод решения основной краевой задачи

При фиксированных значениях двух параметров, например, λ и μ , задачу (2.1)-(2.3) можно рассматривать как задачу на собственные значения относительно третьего параметра $f = f(\lambda, \mu)$. Изменяя дискретным образом параметры λ и μ в необходимых пределах и решая для каждой пары задачу на собственные значения относительно f , можно установить интересующую нас функциональную зависимость $f = f(\lambda, \mu)$. В изложенной постановке исследуемая задача аналогична задаче о квазистационарных состояниях, рассмотренной в [18]. Различие заключается в том, что период асимптотических колебаний волновой функции в рассматриваемой задаче (2.1)-(2.3) не зависит от собственно-

го значения. При корректном сведении граничных условий (2.2)-(2.3) на некоторый конечный интервал $0 \leq X \leq X_{max}$ численное решение задачи на собственные значения может быть реализовано одним из стандартных методов.

В данной работе численное решение изложенной проблемы осуществлено с помощью непрерывного аналога метода Ньютона [6] с использованием стандартной процедуры [19] для ЭВМ. Преимущества названного метода перед остальными заключаются в том, что он позволяет эффективно использовать построенные начальные (в данном случае $JWKVB$) приближения к решению рассматриваемой проблемы, а также дает возможность одновременно получать с одинаковой точностью как собственные значения, так и собственные функции. Вычислительная схема устойчива, что необходимо при решении задач, имеющих множество решений.

Остановимся на некоторых особенностях численного решения задачи (2.1)-(2.4).

А) Аппроксимация граничных условий.

При численном решении задачи на собственные значения (2.1)-(2.3) полубесконечный интервал $0 \leq X < \infty$ заменяется конечным отрезком $0 \leq X < X_{max}$, где X_{max} - достаточно велико. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестную асимптотическую константу в (2.3), граничное условие при $X = X_{max}$ формулируется в виде условия на логарифмическую производную (2.26), которую мы обозначили через $F(t, \lambda, \mu, X_{max})$. Для осциллирующей функции $U(x)$ логарифмическая производная имеет особые точки, совпадающие с нулями $U(x)$. Поэтому точка X_{max} должна быть неособой. Асимптотическое условие (2.3) для функции $U(x)$ с достаточной точностью

выполняется лишь при больших X . Поэтому для аппроксимации граничного условия (2.3) на конечном отрезке $0 \leq X < X_{\max}$ необходимо уточнение асимптотики, выполненное в предыдущем параграфе. Данная процедура позволяет аппроксимировать граничное условие (2.3) с помощью граничного условия на конечном отрезке $0 \leq X < X_{\max}$ (2.26), причем точность аппроксимации определяется выбором X_{\max} и может быть сделана сколь угодно высокой (см. обсуждение в конце § 2).

В) Условие нормировки волновой функции.

Задача на собственные значения на конечном интервале (2.1), (2.2) и (2.26) доопределяется условием нормировки на волновую функцию (2.4), которое следует из физического содержания исходной задачи (уравнения Бете-Солпитера). Условие нормировки волновой функции весьма существенно при реализации непрерывного аналога метода Ньютона. В используемой вычислительной процедуре условие нормировки изменено и задается в виде:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{X_{\max}} \left[\frac{U(x)}{x^2 + \mu^2} \right]^2 dx = 1. \quad (3.1)$$

После достижения требуемой точности вычислений волновая функция перенормируется таким образом, чтобы выполнялось соотношение:

$$\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \int_0^{X_{\max}} \left[\frac{U(x)}{x^2 + \mu^2} \right]^2 dx + \mathcal{D}^2 \int_{X_{\max}}^{\infty} \left[\frac{U_a(x)}{x^2 + \mu^2} \right]^2 dx \right\} = 1, \quad (3.2)$$

где $U_a(x)$ - асимптотическое выражение для волновой функции (2.22), а константа \mathcal{D} определяется из условия:

$$U(X_{\max}) = \mathcal{D} U_a(X_{\max}). \quad (3.3)$$

Выражение (3.2) является, таким образом, аппроксимирующим для условия нормировки (2.4).

С) Оценка точности результатов.

Алгоритм решения задачи на собственных значениях для линейного дифференциального оператора второго порядка с помощью непрерывного аналога метода Ньютона, детально описанный в работах [6, 19], использует трехточечную конечноразностную аппроксимацию исходного оператора второго порядка точности на равномерной сетке узлов. Согласно [20], можно ожидать, что точность результата будет тоже второго порядка относительно шага разностной сетки. Естественно, что при этом необходимо также учитывать влияние погрешности аппроксимации граничных условий. О точности вычисления собственного значения и волновой функции можно косвенно судить по величине максимума невязки δ , получающейся при подстановке их приближенных значений в конечноразностный оператор.

Определение оптимальных параметров X_{\max} и шага разностной сетки h , а также количества членов в разложении (2.26), обеспечивающих необходимую точность вычислений, выполнено экспериментально на частном случае задачи (2.1)-(2.4) при $\lambda = 1$ и $\mu = 0$, когда краевая задача имеет точное решение (2.6) и (2.7). Контрольные вычисления проводились с различными значениями параметров X_{\max} и h и различным числом членов разложения в граничных условиях (2.26). Наиболее характерные результаты приведены в табл. 2. Случай № 1 соответствует учету только первого члена разложения (2.22), а случай № 2 - учету первых четырех членов (до X^{-3} включительно). Из этой таблицы видно, что точность вычислений слабо зависит от увели-

чения X_{max} . Так, при $X_{max} = 31$ и $X_{max} = 40$, точность результата при $h = 0.025$ оказывается одного порядка. Можно заключить также, что приближенное граничное условие в точке X_{max} достаточно хорошо аппроксимирует граничное условие (2.3). Кроме того, наблюдается квадратичная зависимость ошибки вычисления от шага h разностной сетки. Это позволяет сделать вывод, что разностная сетка с параметрами $X_{max} = 20$, $h = 0.0125$ обеспечивает относительную точность результата 0.005. В процессе численного решения задачи (2.1)–(2.4) контроль за точностью результатов осуществлялся для некоторых значений λ и μ путем изменения параметров разностной сетки. Некоторые результаты приведены в табл. 3, 4. Они позволяют заключить, что относительная ошибка как для собственного значения f , так и для волновой функции $U(x)$ не превосходит 0.005. Численные результаты для основного уровня $f_{0(\pm)}(\mu)$ при различных λ и в наиболее интересной для физических приложений области по μ приведены в табл. 1. Нормированные собственные функции $U_{0(\pm)}(x)$ приведены на рис. 3.

Д) Выбор начального приближения.

Процесс сходимости последовательности итераций при численной реализации непрерывного аналога метода Ньютона зависит от выбора начальных приближений к собственному значению и собственной функции. На основе JWKB-метода были получены достаточно хорошие приближения к собственному значению f во всем диапазоне λ и μ . Практика вычислений показала, что использование асимптотических JWKB-разложений для собственных значений при $\mu \rightarrow 0, \infty$ (см., например, (2.13) (2.14) и (2.21)) в качестве начальных приближений для реализа-

ции непрерывного аналога метода Ньютона оказалось весьма эффективным. Исходное приближение для волновой функции строилось следующим образом:

$$U_{нач}(x) = \begin{cases} k x \sin \frac{\pi x}{X_{ac}}, & 0 \leq x \leq X_{ac} \\ \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \right], & X_{ac} < x \leq X_{max}. \end{cases} \quad (3.4)$$

(k и X_{ac} – параметры, выбираемые из условия минимума начальной невязки δ_0). Следует отметить, что начальные невязки имели порядок 10^3 , а в результате уточнения в процессе счета конечные значения невязки имели порядок 10^{-6} . Для достижения этого порядка было необходимо выполнить около 100 итераций. Время вычисления одного варианта составляло примерно 70 сек. на ЭВМ СДС-6200.

Из табл. 1 видно, что результаты численных расчетов основного уровня $f_{0(\pm)}(\mu)$ при разных λ , полученные на ЭВМ из JWKB-спектра (2.11) и (2.12) и уточненные данные, полученные с помощью непрерывного аналога метода Ньютона, совпадают с 1%-ной точностью. (Такое расхождение практически неотличимо в масштабах, в которых построены графики рис. 1 и рис. 2).

§ 4. Аналитическое продолжение численных решений.

Вычисление константы связи π -мезона

В предыдущих параграфах мы построили асимптотические (JWKB) и численные решения краевой задачи (2.1)–(2.4) на интервале $0 \leq x < \infty$. Естественным образом возникает

задача аналитического продолжения полученных решений на всю комплексную плоскость независимого переменного. В связи с этой важной задачей, имеющей большой теоретический и практический интерес, рассмотрим следующие вопросы:

I) Применение метода Фробениуса [21] к уравнению (2.1), т.е. построение линейно независимых решений в виде степенных рядов в окрестности точки $X=0$, имеющих конечный радиус сходимости $|X| < \mu$. Связав степенное разложение с численным решением (т.е. вычислив нормировочную постоянную) на интервале $0 \leq X < \mu$, мы тем самым аналитически продолжим численное решение во всю область $|X| < \mu$.

II) Вычисление значений собственных функций краевой задачи (2.1)-(2.4) в особых точках уравнения (2.1) $X = \pm i\mu$ с помощью асимптотического метода решения соответствующего разностного уравнения для коэффициентов степенных разложений.

III) Аналитическое продолжение решений, заданных степенными рядами, за пределы круга сходимости этих рядов. Получение асимптотических разложений для собственных функций при больших $|X|$, т.е. в области комплексной плоскости $|X| > \mu$.

Прежде чем приступить к рассмотрению этих вопросов, сделаем в основном уравнении (2.1) удобную замену переменных ($\mu \neq 0$, а при $\mu = 0$ мы имеем точное решение (2.6)-(2.7)):

$$U(x) = X^{-1/2} \mathcal{U}(x); \quad Z = -\frac{x^2}{\mu^2}. \quad (4.1)$$

После этого для функции $\mathcal{U}(Z)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}(Z)}{dZ^2} - \frac{1}{4Z} \left[\mu^2 + \frac{\varepsilon f}{1-Z} \right] \mathcal{U}(Z) = 0. \quad (4.2)$$

Особые точки уравнения (2.1) $X = 0, \pm i\mu, \infty$ преобразуются в особые точки уравнения (4.2) $Z = 0, 1, \infty$ и наша задача сводится, таким образом, к аналитическому продолжению численных решений в области $|Z| < 1$, $|Z| > 1$ и вычислению $\mathcal{U}(1)$.

Решение уравнения (4.2) в виде степенного ряда, абсолютно и равномерно сходящегося [21] в круге $|Z| < 1$, удовлетворяющее граничному условию (2.2), имеет следующий вид:

$$\mathcal{U}(Z) = N(f, \mu) \sum_{n=1}^{\infty} C(n) Z^n. \quad (4.3)$$

Здесь $N(f, \mu)$ - нормировочная постоянная, которая определяется из сравнения с численным решением, полученным в § 3, а коэффициенты $C(n)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$(n+2)(n+1)C(n+2) - [(n+1)n + (a^2 - b)]C(n+1) + a^2 C(n) = 0 \quad (4.4)$$

$$C(1) = 1; \quad C(0) = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

($a = \frac{1}{4}\mu^2$ и $b = \frac{1}{4}(\mu^2 - f)$). Таким образом, нашей задачей является вычисление нормировочной постоянной $N(f, \mu)$ при разных значениях μ . Чтобы сделать это как можно точнее, используя численные решения, мы разобьем отрезок $[-1, 0]$ на точки Z_i , $0 \leq i \leq K$ и в каждой точке найдем отношение

$$N(\mu, Z_i) = \frac{\mathcal{U}^{числ}(Z_i)}{\sum_{n=0}^{\infty} C(n) Z_i^n}. \quad (4.6)$$

Функция $\mathcal{U}^{\text{числ}}(z)$ связана с численным решением $U(x)$, найденным в § 3 посредством соотношений (4.1), и в каждой точке z_i определена с некоторой ошибкой, зависящей от точности использованного численного метода (в нашем случае - непрерывного аналога метода Ньютона). Сумма сходящегося степенного ряда, стоящего в знаменателе (4.6), может быть без труда найдена с любой желаемой точностью. Вычисляя $N(\mu, z_i)$ для разных i , можно найти среднее значение нормировочной постоянной и оценить среднеквадратичное отклонение величины $N(\mu, z)$ от среднего значения:

$$\bar{N}(\mu) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K N(\mu, z_i) \quad (4.7)$$

$$\sigma(\mu) = \left[\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{N(\mu, z_i) - \bar{N}(\mu)\}^2 \right]^{1/2}$$

В качестве примера приведем результаты, полученные для собственной функции краевой задачи (2.1)-(2.4) $U_{0(-)}(x)$, соответствующей основному уровню $f_{0(-)}(\mu)$ при $\lambda = 1$ и $\mu = 3$. Разбивая отрезок $[-1, 0]$ точками $z_i = \frac{1}{2}i$; $i=1, 2, \dots, 5$ и вычисляя степенной ряд в каждой из этих точек с относительной ошибкой $< 10^{-4}\%$, мы получаем $\bar{N}(3)=288.89$ и $\sigma(3)=0.003\%$. Для всех значений μ , для которых проводились вычисления, мы получали $\sigma < 0.01\%$, что является вполне удовлетворительным.

Таким образом, можно a posteriori оценить точность численного метода, примененного в § 3, и получить зависимость $N(\mu)$, что существенно для физических приложений. При известной нормировочной постоянной $N(\mu)$ степенное разложение (4.3) осуществляет аналитическое продолжение численного ре-

шения краевой задачи (2.1)-(2.4), заданного на отрезке $[-1, 0]$, во всю область $|z| < 1$.

Обратимся к задаче П), т.е. рассмотрим поведение на границе круга сходимости $|z|=1$. Используя рекуррентные соотношения (4.4), можно легко показать, что ряд (4.3) сходится абсолютно при $|z|=1$, осуществляя тем самым аналитическое продолжение численного решения в область $|z|=1$. Функция $\mathcal{U}(z)$ при $z=1$ (в особой точке дифференциального уравнения (4.2)) конечна и для ее вычисления можно использовать степенной ряд:

$$\mathcal{U}(1) = N(\mu) \sum_{n=1}^{\infty} C(n), \quad (4.8)$$

который, однако, медленно сходится: $C(n) \sim n^{-2}$. Альтернативная возможность вычисления $\mathcal{U}(1)$, на которой мы остановимся ниже, - применение асимптотического метода, быстро ведущего к цели.

Линейное разностное уравнение второго порядка (4.4) имеет два независимых решения $C_1(n)$ и $C_2(n)$, которые при $n \rightarrow \infty$ ведут себя следующим образом:

$$C_1(n) \sim \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots \right]; \quad C_2(n) \sim \frac{1}{n!(n+1)!} \quad (4.9)$$

Общее решение разностного уравнения (4.4) можно записать как линейную комбинацию двух независимых решений [22]:

$$C(n) = A(f, \mu) C_1(n) + B(f, \mu) C_2(n), \quad (4.10)$$

где коэффициенты A и B определяются из граничных условий (4.5).

Для эффективного вычисления суммы, входящей в (4.8), перепишем рекуррентные соотношения (4.4) в более удобном для этой цели и безусловно эквивалентном виде:

$$(n+2)(n+1)C(n+2) - (a^2 - b)C(n) + b \sum_{k=1}^n C(k). \quad (4.11)$$

Подставляя в (4.11) общее решение (4.10) вместо первых двух членов и переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, мы сразу получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C(k) = - \frac{A(f, \mu)}{b}, \quad (4.12)$$

т.е. решение $C_2(n)$ не вносит вклада в сумму, определяющую $\mathcal{U}(1)$, и вычисление $\mathcal{U}(1)$ сводится, таким образом, к определению асимптотической нормировочной постоянной $A(f, \mu)$.

В дальнейших вычислениях выберем n конечным, но достаточно большим (скажем, $n = 8$) и воспользуемся тем, что асимптотические разложения при $n \rightarrow \infty$ для $C(n)$ и $C_2(n)$ эквивалентны (см. (4.9) и (4.10)) [4]. Таким образом, асимптотическая нормировочная постоянная определится из соотношения:

$$A(f, \mu) = \frac{C^{\text{точн}}(n)}{C^{\text{асим}}(n)}, \quad (4.13)$$

где $C^{\text{точн}}(n)$ можно найти точно и довольно просто из рекуррентных соотношений (4.4), используя в качестве начальных условий (4.5), а $C^{\text{асим}}(n)$ определяется асимптотическим рядом:

$$C(n) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{n^{k+2}}; \quad d_0 = 1. \quad (4.14)$$

Таким образом, наша задача свелась к вычислению функции $C(n)$ при больших n с помощью асимптотического ряда (4.14) и оценке точности такого рода вычислений. Чтобы эффективно реализовать эту программу, нам необходимо использовать рекуррентные соотношения (4.4) (предварительно для удобства сделав в них замену $n \rightarrow n-1$) для нахождения рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют сами коэффициенты d_i . Сначала найдем разложения $C(n \pm 1)$ непосредственно по степеням n^{-1} :

$$C(n \pm 1) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{(n \pm 1)^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^{(\pm)}}{n^{k+2}}, \quad (4.15)$$

т.е. выразим коэффициенты $\beta_k^{(\pm)}$ через d_i . Это можно сделать довольно просто, используя теорему Бюрмана [23]. После тривиальной алгебры результат принимает вид:

$$\beta_k^{(\pm)} = \sum_{i=0}^{k+1} (\mp 1)^{k-i+1} C_{k+1}^i d_{i-1}, \quad (4.16)$$

где $C_m^i \equiv \frac{m!}{i!(m-i)!}$ - биномиальные коэффициенты. Подставляя (4.14), (4.15) и (4.16) в рекуррентные соотношения (4.4) и выполняя несложные, но громоздкие выкладки, получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов d_i :

$$(k+1)d_{k+1} - \left[b + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right] d_k - \sum_{i=0}^{k-1} d_i A_k^i = 0. \quad (4.17)$$

Здесь A_k^i просто выражаются через биномиальные коэффициенты:

$$A_k^i = (-1)^{k-1} C_{k+2}^i + a^2 C_{k+1}^{i+1}. \quad (4.18)$$

Используя рекуррентные соотношения (4.17), мы можем последовательно находить любое нужное количество коэффициентов

Δ_i . С помощью (4.17) легко показать, что $\Delta_i \sim i!$

Поэтому величины Δ_k/n^{k+2} при заданном n убывают до некоторого номера $K_0(n)$, который зависит от n , а потом начинают расти. Максимальная точность будет достигнута

[24], если при вычислении суммы асимптотического ряда (4.14) мы ограничимся членом с $K = K_0(n)$:

$$C^{\text{асим}}(n) = \sum_{k=0}^{K_0(n)} \frac{\Delta_k}{n^{k+2}} \quad (4.19)$$

Абсолютная ошибка, которая при этом делается, будет пропорциональна члену суммы с $K = K_0(n)$: $\Delta C(n) \sim \Delta_{K_0}/n^{K_0+2}$. Относительная ошибка

$\varphi(n) = \frac{\Delta C(n)}{C(n)}$ быстро убывает с ростом n и при каждом фиксированном n может быть легко оценена.

Для примера приведем относительную ошибку $\varphi(n)$ вычисления суммы (4.14), (4.19) и соответствующие $K_0(n)$ для $\lambda = 1$,

$\varepsilon = -1$, $\mu = 3.0$ и $f = 6.073$ (основной уровень $f_{0(-)}$ краевой задачи (2.1)-(2.4)) при разных n : $K_0(4)=6$, $\varphi(4)=8.18\%$;

$K_0(5)=9$, $\varphi(5)=1.91\%$; $K_0(6)=14$, $\varphi(6)=0.27\%$.

Численные расчеты $\mathcal{U}(1)$ проводились посредством суммирования медленно сходящихся степенных рядов (4.8), (4.4), (4.5) на ЭМ СДС-6200 (10^4 членов ряда (4.8)) и по описанному выше асимптотическому методу (не более 10 членов ряда (4.19)) вручную на ИМБ-86-S. Результаты хорошо согласуются в пределах ошибок асимптотических вычислений, которые приведены в табл. 5. В физической проблеме, которая свелась к краевой задаче (2.1)-(2.4), непосредственный физический смысл имеет функция $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = X^{-3/2} \mathcal{U}(x), \quad (4.20)$$

которая представляет собой вершинную функцию π -мезона как связанного состояния в системе кварк-антикварк. При этом важной физической величиной является

$$g(\mu) = \frac{\Gamma^2(x)}{4\pi} \Big|_{x^2 = -\mu^2} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\mathcal{U}(1)}{\mu^2} \right]^2, \quad (4.21)$$

имеющая смысл константы связи π -мезона с парой кварк-антикварк. Поэтому, имея в виду дальнейшие физические приложения, мы сформулировали в табл. 5 наши результаты, касающиеся вычисления $\mathcal{U}(1)$ и ошибок асимптотического метода, в терминах констант связи $g(\mu)$ для случая $\lambda = 1$, $\varepsilon = -1$, $\mu = 2.5; 3.0; 3.5; 4.0$;

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу проблемы Ш. Аналитическое продолжение решений, заданных степенными рядами, может быть осуществлено за пределы круга сходимости этих рядов, во-первых, с помощью билинейного преобразования [21,25] независимой переменной

$$t = \frac{z}{z+p}, \quad (4.22)$$

где константа p выбирается таким образом, чтобы оптимизировать сходимость результирующих степенных рядов по переменной. Практическому применению этого метода посвящена работа [25], где подробно рассмотрены все детали метода и приведены результаты численных расчетов. Во-вторых, эту же задачу можно последовательно решить с помощью метода, предложенного Фордом [4], который, используя теоремы Линделёфа и Барнса [26] и применяя метод Лапласа [22] для получения решений разностных уравнений типа (4.4), (4.5) (с полиномиальными коэффициентами), получил

асимптотические разложения для решений исходного дифференциального уравнения при больших $|Z|$. В последней главе своей книги [4] Форд подробно рассматривает применения этого метода к дифференциальным уравнениям второго порядка с полиномиальными коэффициентами, частным случаем которых является уравнение (4.2), и получает формулы перехода для двух независимых решений, представимых сходящимися степенными рядами $R_1(z)$ и $R_2(z)$ в окрестности точки $Z=0$ и рядами $R_3(z)$ и $R_4(z)$ в окрестности точки $Z=\infty$ (эти ряды сходящиеся, если $Z=\infty$ - регулярная особая точка исходного уравнения и асимптотические, если $Z=\infty$ - существенная особенность):

$$\begin{aligned} R_1(z) &\sim A_{13} R_3(z) + A_{14} R_4(z) \\ R_2(z) &\sim A_{23} R_3(z) + A_{24} R_4(z). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Знание коэффициентов A_{ij} , которые зависят от параметров, входящих в исходное дифференциальное уравнение, особенно важно и полезно для решения краевых задач. Метод Форда применим к линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, у которых либо все особые точки регулярны, либо одна особая точка существенная, а остальные регулярны. Этот метод был обобщен и существенно дополнен в работах [27].

§ 5. З а к л ю ч е н и е

Выше мы подробно изучили методы численного решения задачи (I.5). Мы нашли численное решение этой задачи с помощью континуального аналога метода Ньютона, примененного к дифференциальной краевой задаче, эквивалентной уравнению (I.5). Переход к дифференциальной задаче использовался, во-первых, потому, что

для ее решения имелась хорошо проверенная и отлаженная программа и, во-вторых, потому, что для дифференциальных уравнений легко находить решения в виде степенных рядов и можно найти достаточно точное приближенное решение краевой задачи методом *JWKB*. *JWKB*-решение использовалось в качестве начального приближения для реализации континуального аналога метода Ньютона.

Сравнение численного и *JWKB*-решений показывает, что *JWKB*-метод дает неплохое приближение для собственных значений даже в той области, где условия его применимости не выполняются. Для получения хороших *JWKB*-приближений для волновой функции нужно было бы применять более рафинированные варианты *JWKB*-метода (см. работы [14] и обзоры [7]).

Сравнение численного решения с решением, представленным в виде степенного ряда, позволило нам найти аналитическое продолжение $U(x)$ на комплексные значения X , которое можно выполнить с той же степенью точности, с какой решение известно при вещественных X . Этот результат очень важен для физических приложений.

В последующих работах мы предполагаем рассмотреть полную реализацию намеченной в § I программы решения уравнений (I.I) на простых примерах, допускающих точное аналитическое решение, и затем численно решать нелинейную систему (I.I), (I.6).

Эта работа была начата во время визита двух авторов (И.В.П. и А.Т.Ф.) в Институт Руджера Бошковича (Загреб, Югославия) в конце 1973 года, где и были выполнены первые численные расчеты. Авторы выражают благодарность сотрудникам

этого института за гостеприимство и полезные дискуссии. Авторы также глубоко благодарны Н.Трусковой за помощь при выполнении некоторых численных расчетов на ЭВМ (*JWKB* - спектр и суммирование степенных рядов) и за ценные обсуждения. Один из авторов (Д.П.М.) считает своим приятным долгом поблагодарить проф. С.Ю.Славянова за интересные дискуссии, касающиеся *JWKB* - метода, проф. Ф.Олвера за плодотворную переписку и профессоров М.У.Белого, А.З.Жмудского, В.И.Стрижака и В.К.Тартаковского из Киевского госуниверситета за интерес к работе и поддержку.

Таблица I. Собственные значения $f_{0(\pm)}(\mu)$, полученные с помощью непрерывного аналога метода Ньютона и *JWKB*-методом.

$\mu \backslash \lambda$	$f_{0(-)}(\mu)$ $\lambda=0.5$	$f_{0(-)}(\mu)$ $\lambda=1.0$	$f_{0(-)}(\mu)$ $\lambda=1.5$	$f_{0(-)}(\mu)$ $\lambda=2.0$	$f_{0(+)}(\mu)$ $\lambda=1.0$	$f_{0(-)}^{JWKB}(\mu)$ $\lambda=1.0$	$f_{0(+)}^{JWKB}(\mu)$ $\lambda=1.0$
3.0	5.59	6.07	6.67	7.36	6.65	6.03	6.69
3.5	6.53	6.93	7.46	8.08	7.63	6.92	7.66
4.0	7.50	7.83	8.29	8.85	8.62	7.84	8.65
4.5	8.48	8.77	9.17	9.67	9.61	8.79	9.64
5.0	9.48	9.72	10.07	10.52	10.60	9.75	10.63
5.5	10.48	10.69	11.00	11.40	11.59	10.72	11.62
6.0	11.49	11.66	11.94	12.30	12.59	11.70	12.61
6.5	12.48	12.65	12.89	13.22	13.58	12.67	13.60
7.0	14.48	13.63	13.85	14.14	14.57	13.66	14.60

Таблица 2. Влияние изменения параметров сетки X_{max} и h и граничных условий на собственное значение $f_{0(t)}(0)$ и значение невязки δ .

Параметры сетки	$X_{max}=20$ $h=0.0125$		$X_{max}=31$ $h=0.025$		$X_{max}=40$ $h=0.025$		$X_{max}=80$ $h=0.050$	
	$f_{0(t)}(0)$	δ	$f_{0(t)}(0)$	δ	$f_{0(t)}(0)$	δ	$f_{0(t)}(0)$	δ
Случай № 1	3.00035	$1.7 \cdot 10^{-7}$	3.00164	$2.2 \cdot 10^{-7}$	3.00248	$2.2 \cdot 10^{-7}$	3.02164	$2.0 \cdot 10^{-7}$
Случай № 2	3.00031	$1.8 \cdot 10^{-7}$	3.00158	$2.5 \cdot 10^{-7}$	3.00242	$3.4 \cdot 10^{-7}$	3.02133	$2.1 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3. Сходимость для собственного значения $f_{0(t)}(\mu)$ при изменении параметров разностной сетки.

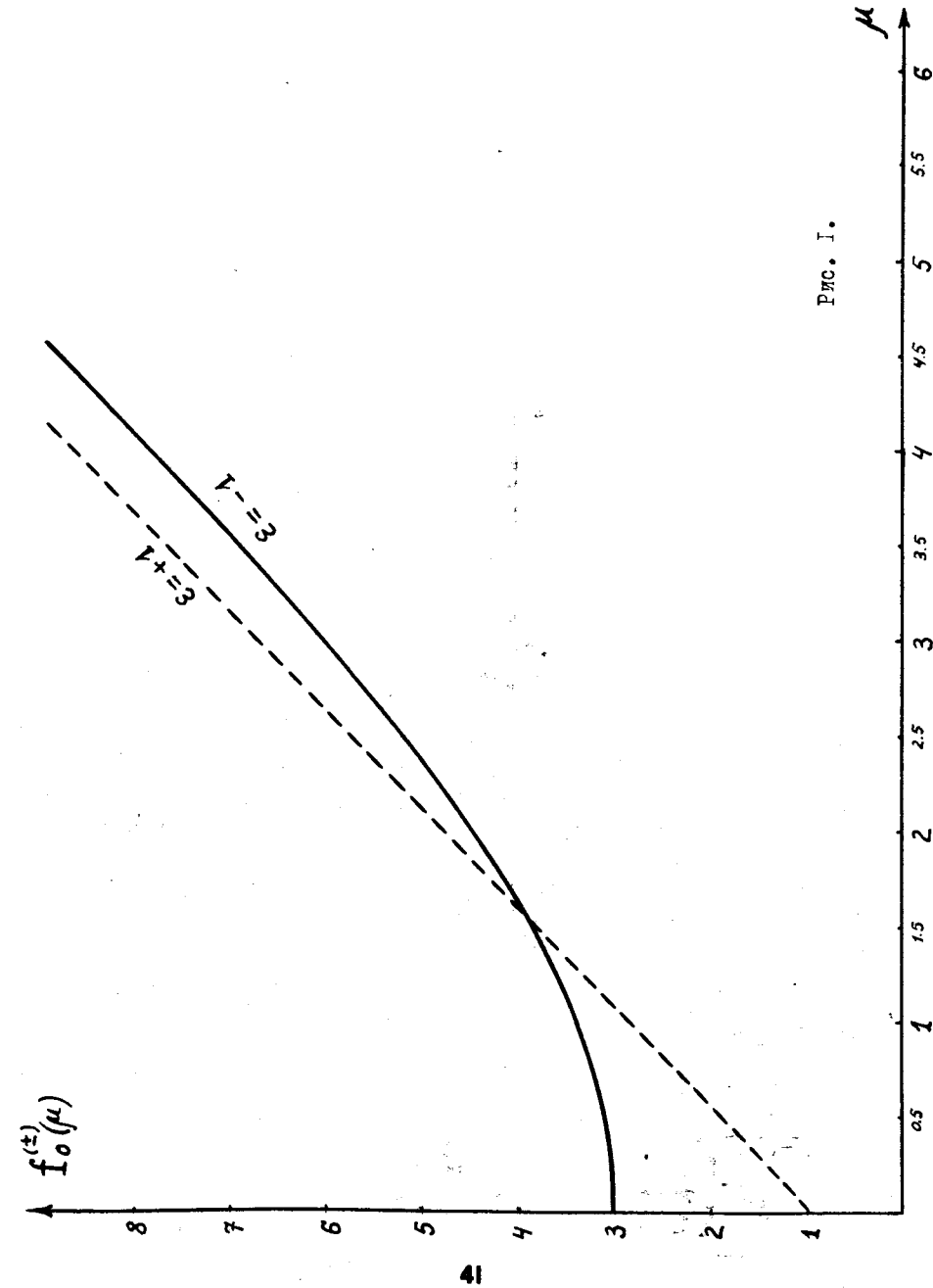
X_{max}	h	$f_{0(t)}(1)$	$f_{0(t)}(4)$
40	0.0250	6.264	9.487
32	0.0200	6.263	9.486
20	0.0125	6.261	9.482

Таблица 5. Константа связи $g(\mu)$ и относительная ошибка асимптотического метода.

μ	$g(\mu)$	$\frac{\Delta g}{g}, \%$
2.5	13.80	0.12
3.0	32.80	0.55
3.5	78.40	1.30
4.0	122.9	0.46

Таблица 4. Сходимость для собственной функции $U_{0(t)}(x)$
при изменении параметров разностной сетки.

$U_{0(t)}(x)$ X_{max} h X	$U_{0(t)}(x)$ $X_{max} = 32$ $h = 0.0200$	$U_{0(t)}(x)$ $X_{max} = 20$ $h = 0.0125$
2	12.75	12.76
4	87.48	87.56
6	75.72	75.76
8	-78.19	-78.27
10	-35.97	-35.97
12	95.65	95.72
14	-28.25	-28.29
18	82.63	82.70
δ	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$



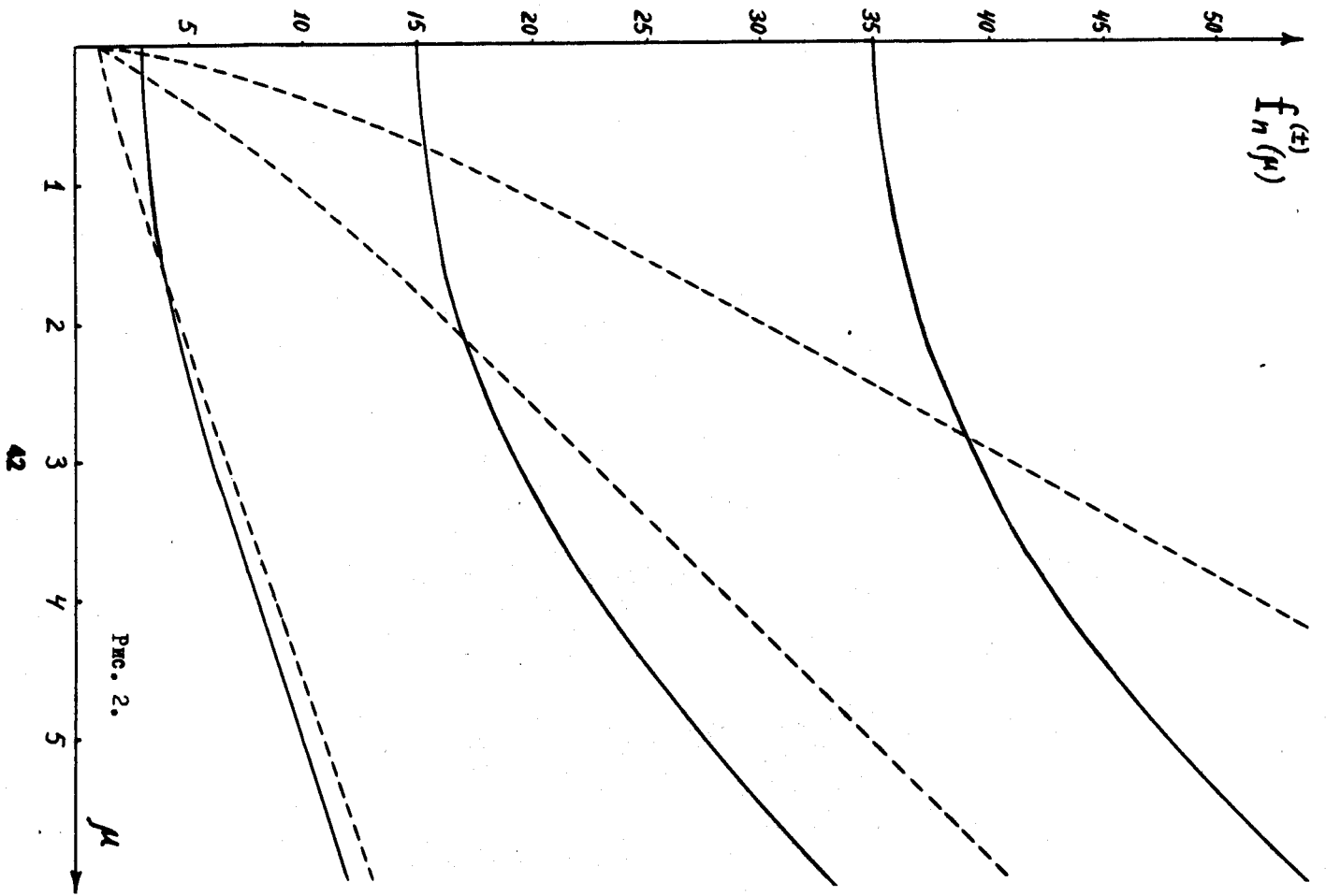


Рис. 2.

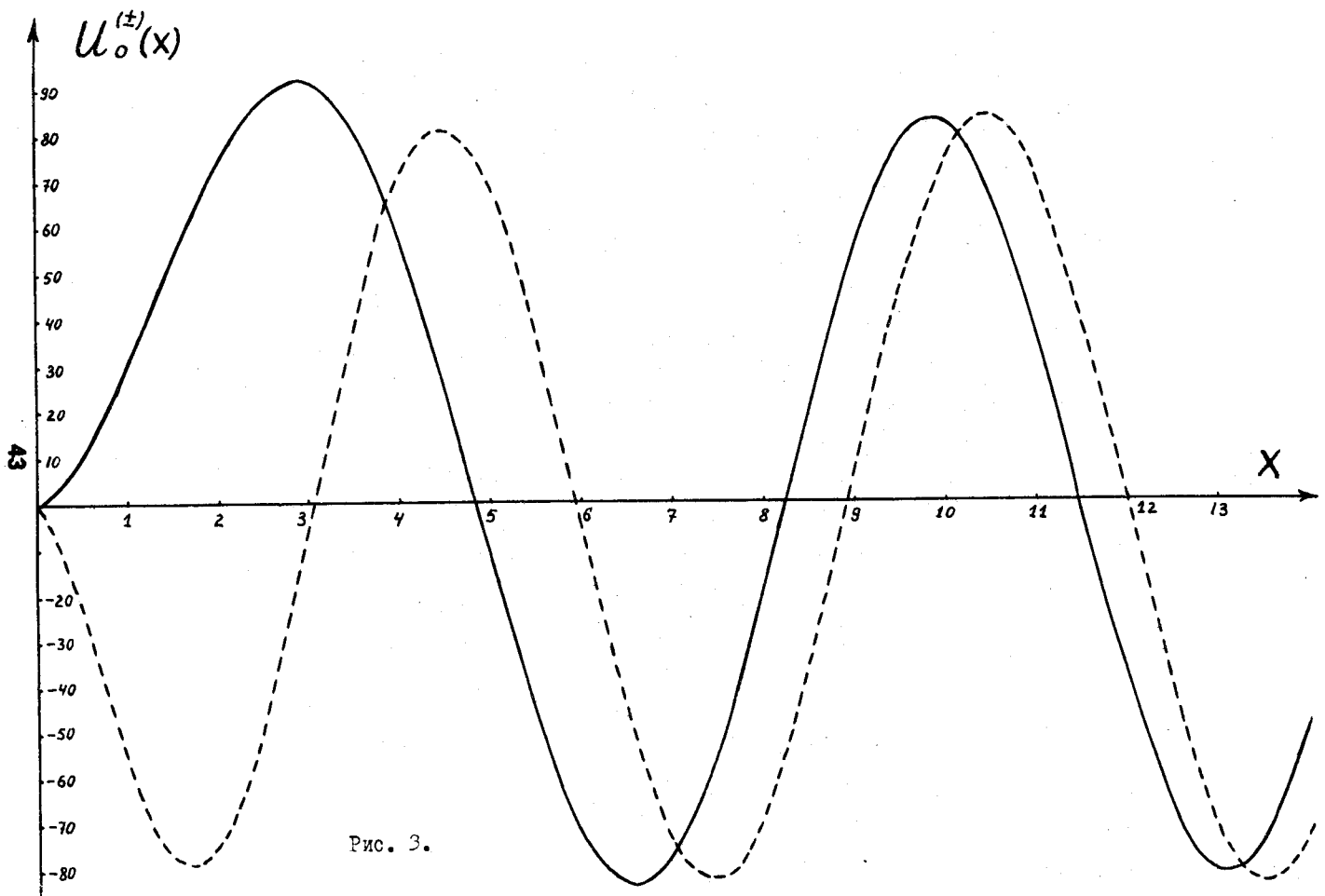


Рис. 3.

Л и т е р а т у р а

1. А.Т.Филиппов. Preprint, JINR, E2-7563, Dubna, 1973; Preprint, JINR, E2-7939, Dubna, 1974; Phys. Lett., 51B, 379 (1974).
2. В.А.Арбузов, А.Т.Филиппов. Phys. Lett., 13, 95 (1964).
3. W.M.Frank, D.J.Land, R.M.Spector. Rev. Mod. Phys., 43, 36 (1971).
4. W.B.Ford, The Asymptotic Developments of Functions Defined by Maclaurin Series, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
5. В.А.Арбузов, А.Т.Филиппов. Nuovo Cim., 38, 796 (1965); Б. А. Арбузов, А.Т.Филиппов, ЖЭТФ, 49,990 (1965).
6. L.I.Ponomarev, I.V.Puzynin, T.P.Puzynina. J.Comput.Phys, 13, 1 (1973).
7. M.V.Berry, K.E.Mount, "Semiclassical Approximations in Wave Mechanics", Rep. Prog. Phys., 35, 315 (1972); J. McHugh, "Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with Large Parameter", Arch. Hist. Exact. Sci., 7, 277 (1971).
8. R.E.Langer. Phys. Rev., 51, 669 (1937).
9. H.A.Kramers. Zs. Phys., 39, 828 (1926).
10. Handbook of Mathematical Functions, edited by M.Abramowitz and I.E.Stegun, Dover, New York, 1965.
11. P.F.Byrd, M.D.Friedman. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Berlin, 1954.
12. K.Flammer, Spheroidal Wave Functions, Stanford University Press, 1957; J.A.Stratton, L.J.Chu, P.M.Morse, I.D.Little, F.J.M.Corbato, Spheroidal Wave Functions, London, 1956.
13. F.W.J.Olver, J.Res. Nat. Bur.Stand.Sect. B, 69, 271 (1965) ibid 69, 291 (1965).
14. R.Langer. Trans. Am. Math. Soc., 33, 23 (1931); ibid 34, 447 (1932); ibid 36, 90 (1934); R.B.Dingle. Appl. Sci. Res., B5, 345 (1956); M.J.Richardson. Phys. Rev., A8, 781 (1973)
15. F.W.J.Olver. Phyl Trans. Roy. Soc. London, A250, 479 (1959).
16. Т.М.Черри. Сб. переводов ин. статей, Математика, 9, № 4, 87 (1965).
17. С.Е.Неcht, J.Е.Мayer. Phys. Rev., 105, 1150 (1957).
18. J.K.Peek, Physica, 64, 93 (1973).
19. I.V.Puzynin, T.P.Puzynina. Algorithms and Programs for Solution of Some Problems in Physics, Central Research Institute for Physics, KFKI-74-34, Budapest, 1974, 93.
20. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, ЖВМиФ, I, 784 (1961).
21. Э.Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ОНТИ, Харьков, 1939.
22. L.M.Milne-Thompson, The Calculus of Finite Differences, Macmillan and Company Ltd., London, 1951.
23. Э.Т.Уиттекер, Дж. Н.Ватсон, Курс современного анализа, Москва, 1963.
24. W.B.Ford, Studies on Divergent Series and Summability, Chelsea Publishing Company, New York, 1960; J.G. van der Corput, J.Analyse Math, 4, 341 (1955-1956); ibid 5, 315 (1956-1957); ibid 9, 195 (1961).
25. J.G.Fikioris. Tech. Rept. No 395, Cruft Laboratory, Harvard University, 1963; J. Math. Phys., 6, 1131 (1965).
26. Lindelöf, Le Calcul des residues, Gauthier-Villars, Paris, 1905; E.W.Barnes. Philosoph. Trans. Roy. Soc. London, A205, 249 (1906).

27. E.H.Wright. Phil Trans. Roy. Soc. London, A233, 423 (1940); *ibid* A239, 217 (1941); *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, 409 (1948);
H.k.Hughes. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50, 425 (1944); *ibid.* 51, 456 (1945);
F.D.Riney. *Trans. Amer. Math. Soc.* 88, 214 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 1975 года.