СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С323.2
Г-212

12/V-75

1686/2-75

Р2 - 8648

В.Р.Гарсеванишвили

ОБ ОДНОМ ВЫБОРЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АМПЛИТУД ДВУХЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

1975

P2 - 8648

В.Р.Гарсеванишвили

ОБ ОДНОМ ВЫБОРЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АМПЛИТУД ДВУХЧАСТИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Гарсеванишвили В.Р.

P2 - 8648

Об одном выборе переменных для амплитуд двухчастичных процессов

В работе рассматривается вопрос о выборе переменных для амплитуд двухчастичных процессов и возникающее при этом новое свойство аналитичности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Garsevanishvili V.R.

P2 - 8648

On a Choice of the Variables for the Two-Particle Process Amplitudes

The problem on choosing the variables for the two-particle process amplitudes is considered as well as a new analyticity property appearing in this case.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

Хорошо известно, что выбор переменных играет существенную роль при анализе свойств физических систем /см., напр., /1-6/ /.

В настоящей работе мы хотим указать на одну возможность выбора переменных для описания амплитуд двухчастичных процессов, связанную с некоторым новым свойством аналитичности и соответствующей областью аналитичности.

Физическая амплитуда рассеяния T /мы не будем здесь отделять релятивистский случай от нерелятивистского/ зависит от двух переменных. В качестве этих переменных могут быть выбраны, например, полная энергия E двух частиц, и угол рассеяния θ в системе центра масс, или некоторые их комбинации. Обозначим их через x и y. Имеем:

$$T(x,y) = D(x,y) + iA(x,y) . \qquad /1/$$

Перейдем от переменных (x,y) к некоторым новым переменным (u,v)

$$u = u(x,y); \quad v = v(x,y) \qquad /2/$$

и поставим вопрос: могут ли переменные u и v быть выбраны таким образом, чтобы амплитуда рассеяния, будучи выражена через u и v, была бы аналитической функцией аргумента

$$w = u + iv . \qquad /3/$$

Заметим, что формулы /2/ производят отображение области G изменения переменных x и y в плоскости (xy) на некоторую новую область G' в плоскости (uv). Потребуем теперь, чтобы амплитуда рассеяния

$$T(x,y) = T[\,x(u,v),\, y(u,v)\,] \qquad /4/$$

была аналитической функций комплексного переменного $w = u + iv$, т.е. потребуем выполнения в области G' условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial D}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial v}; \qquad \frac{\partial D}{\partial v} = -\frac{\partial A}{\partial u}. \qquad /5/$$

Расписав подробно условия /5/ и выразив все через x и y, получим:

$$f_4(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - f_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f_2(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} - f_1(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0; \qquad /6а/$$

$$f_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - f_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - f_4(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + f_3(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad /6б/$$

где

$$f_1(x,y) = \frac{\partial D(x,y)}{\partial x}; \qquad f_2(x,y) = \frac{\partial D(x,y)}{\partial y};$$

$$f_3(x,y) = \frac{\partial A(x,y)}{\partial x}; \qquad f_4(x,y) = \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}. \qquad /7/$$

Условия /6/ представляют собой систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для определения двух неизвестных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

В результате несложных преобразований систему /6/ можно привести к виду:

$$u_x = \frac{-F_1(x,y)\,v_x + F_2(x,y)\,v_y}{F_3(x,y)}; \qquad /8а/$$

$$u_y = \frac{-F_4(x,y)\,v_x + F_1(x,y)\,v_y}{F_3(x,y)}; \qquad /8б/$$

где

$$F_1 = f_1 f_2 + f_3 f_4; \qquad F_2 = f_1^2 + f_3^2;$$

$$F_3 = f_1 f_4 - f_2 f_3; \qquad F_4 = f_2^2 + f_4^2. \qquad /9/$$

Введем обозначения:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \qquad /10/$$

Легко видеть, что выполняется следующее соотношение:

$$F_2 F_4 - F_1^2 = F_3^2. \qquad /11/$$

Уравнения /8/ представляют собой систему уравнений Бельтрами[7,8], один из методов решения которой состоит в следующем. Введем в рассмотрение комплексную переменную

$$z = x + iy \qquad /12/$$

и соответствующую комплекснозначную функцию

$$w(z) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

Можно показать, что система уравнений /8/ эквивалентна уравнению:

$$w_{z^*} = \mu w_z . \qquad /13/$$

Здесь

$$\mu = \frac{F_4 - F_2 + 2iF_1}{F_4 + F_2 + 2F_3} \qquad /14/$$

и

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right); \quad w_{z^*} = \frac{\partial w}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right). \qquad /15/$$

Уравнение /13/ также будем называть уравнением Бельтрами. Уравнение /13/ допускает решение вида:

$$w(z) = z - \frac{1}{\pi}\int\int\frac{\phi(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - z} . \qquad /16/$$

Здесь

$$\zeta = \xi + i\eta ,$$

а функция ϕ удовлетворяет уравнению

$$\phi - \mu\Pi\phi = \mu , \qquad /17/$$

где интегральный оператор Π определяется следующим образом:

$$\Pi\phi = -\frac{1}{\pi}\int_G\int\frac{\phi(\zeta)\, d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}. \qquad /18/$$

Уравнение /17/ представляет собой двухмерное сингулярное интегральное уравнение и при определенных условиях разрешимо.

Таким образом, задача нахождения переменной $w = u + iv$ такой, что амплитуда рассеяния, выраженная как функция u и v, аналитична как функция комплексной переменной w, сводится к взятию интеграла /16/, в котором функция ϕ удовлетворяет уравнению /17/.

Отображение $w(z)$, найденное как решение уравнения Бельтрами /13/, принадлежит к одному из классов квазиконформных отображений /см., напр., [9] /.

Заметим, что если искомые переменные u и v известны, то сама амплитуда рассеяния T также удовлетворяет уравнению Бельтрами, в котором коэффициенты определенным образом связаны с $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Представляет интерес включение в рассмотренную схему таких физических требований, как унитарность, а также извлечение следствий из свойств аналитичности по w в духе ограничений, получаемых из общих принципов квантовой теории поля /см., напр., обзор [10] и цитированную там литературу/.

Автор выражает глубокую благодарность Д.К.Гвазава, Г.Джиани, В.Г.Кадышевскому, А.Н.Квинихидзе, В.А.Матвееву, М.А.Мествиришвили, В.А.Мещерякову, Л.А.Слепченко, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову, М.Б.Шефтелю за весьма интересные обсуждения.

Литература

1. *V.A.Fock. Zs.Phys., 98, 145 (1935).*
2. *Н.Н.Боголюбов. УМЖ, 2, 3 /1950/, см. также Избранные труды, т. 2, Киев, Наукова думка, 1970.*
3. *M.Toller. Nuovo Cim., 53A, 671 (1968).*
4. *Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ, 10, 256 /1971/.*
5. *E.Leader, M.Pennington. Phys.Rev.Lett., 27, 1325 (1971).*
6. *U.Maor. Phys.Rev., D6, 2052 (1972).*
7. *И.Н.Векуа. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.*
8. *Р.Курант. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.*
9. *Л.Альфорс. Лекции по квазиконформным отображениям. М., Мир, 1969.*
   Л.И.Волковыский. Квазиконформные отображения.

Львов, Изд. Львовского университета, 1954.
10. *А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, О.А.Хрусталев. ТМФ, 9, 3 /1971/.*

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1975 года.