И-13

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-830

Р.М.Ибадов*, В.Г.Кадышевский

К ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАССОЙ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

*Самаркандский государственный университет им.А.Навои

1986

Цель настоящей статьи – углубить и тем самым упростить формулировку квантовой теории поля (КТП) с фундаментальной массой[1-7]. Напомним, что фундаментальная масса M – это новый гипотетический параметр размерности массы, который должен быть столь же универсальным, как $\hbar$, c или ньютонова гравитационная постоянная $\varkappa$, и выступать в качестве характерного масштаба в области сверхвысоких энергий.

В отличие от предыдущих работ данного цикла построение новой теории теперь с самого начала разворачивается в <u>конфигурационном</u> представлении. Этот момент имеет принципиальное значение и нуждается в комментарии.

В цитированных работах ключевую роль играла следующая <u>геометрическая</u> идея[ж]: для построения КТП, обеспечивающей адекватное описание взаимодействий частиц сверхвысоких энергий, необходимо записать стандартную теорию поля в импульсном представлении, а затем перейти в ней от p -пространства Минковского к p -пространству де Ситтера с достаточно большим радиусом M .

Пространство де Ситтера обладает постоянной кривизной. В соответствии с ее знаком имеются две возможности:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 \equiv g^{KL} p_K p_L = M^2; K,L = 0,1,2,3,5 \qquad (1)$$

(кривизна положительна; $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = g^{55} = 1$)

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_5^2 \equiv g^{KL} p_K p_L = -M^2; K,L = 0,1,2,3,5 \qquad (2)$$

(кривизна отрицательна; $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = -g^{55} = 1$).

Неевклидово 4-пространство (2) называют также мнимым 4-пространством Лобачевского[14].

Естественно, что КТП, опирающаяся на импульсное пространство вида (1)-(2), должна предсказывать новые физические явления при

[ж] Она восходит к работе Ю.А.Гольфанда[8]. См. также[9-13].

энергиях $E \gtrsim M$. В принципе, параметр M может оказаться близким к планковской массе $M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{\varkappa}} \simeq 10^{19}$ ГэВ. Тогда новая схема обязана включать в себя квантовую теорию гравитации.

Стандартной КТП отвечает приближение "малых" 4-импульсов

$$|p_0|, |\vec{p}| \ll M$$
$$p^5 = g^{55} p_5 \doteq M, \tag{3}$$

которое во многих случаях формально достигается при $M \to \infty$ ("плоский предел").

Привлекательными чертами рассматриваемого обобщения теории являются его геометричность и минимальность. Это обусловлено тем, что импульсное 4-пространство Минковского, обладающее постоянной нулевой кривизной, представляет собой вырожденную предельную форму каждого из пространств постоянной ненулевой кривизны (I)-(2).

Формулировка КТП с фундаментальной массой, обсуждаемая в данной работе, основана на квантовой версии де-ситтеровского уравнения (2)[*/], т.е. на полевом уравнении в пяти измерениях

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi(x,x^5) = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{4}$$

получаемом из (2) с помощью стандартной для квантовой теории подстановки

$$p_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$
$$p_5 = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^5}. \tag{5}$$

Мы умышленно используем в (4) нормальные единицы, чтобы подчеркнуть, что три универсальные постоянные $\hbar$, c и M здесь группируются в один параметр - фундаментальную длину $\ell = \hbar/Mc$. На само уравнение (4) естественно также распространить термин "фундаментальный" (сокращенно - ф.у.).

Ф.у. (4) обязаны подчиняться все поля, независимо от их тензорной размерности, поскольку подобной универсальностью обладал "классический" прототип ф.у. - де-ситтеровское p -пространство (2). При-

[*/] Причина, по которой из уравнений (I)-(2) мы предпочли именно (2), выяснится ниже.

менительно к скалярным, спинорным, векторным и др. полям мы будем записывать пятимерную волновую функцию $\Phi(x,x^5)$ в виде $\varphi(x,x^5)$, $\psi_\alpha(x,x^5)$, $A_\mu(x,x^5)$,...

Теория поля, опирающаяся на ф.у. (4), оказывается более последовательной и более общей, чем схема, развиваемая в p -пространстве де Ситтера (2). Так, в силу (2) компоненты 4-импульса должны подчиняться ограничению

$$p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \geq -M^2, \tag{6}$$

которое не следует из ф.у. (4). В самом деле, переходя в (4) к смешанному (p,x^5) -представлению, получаем уравнение

$$\left[p^2 + M^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_5^2}\right]\Phi(p,x^5) = 0, \tag{7}$$

имеющее решение при всех p^2 , включая область

$$p^2 + M^2 < 0. \tag{8}$$

Следовательно, $p^5 = \sqrt{p^2+M^2}$ теперь принимает как вещественные, так и чисто мнимые значения. В расчете на дальнейшие применения определим эту величину как обобщенную функцию:

$$p^5 = \sqrt{p^2+M^2+i0} = \begin{cases} \sqrt{p^2+M^2}, & \text{если} \quad p^2+M^2>0, \\ i\sqrt{-p^2-M^2}, & \text{если} \quad p^2+M^2<0. \end{cases} \tag{9}$$

С помощью (9) легко записать общее решение уравнения (7):

$$\Phi(p,x^5) = \cos\left(x^5\sqrt{p^2+M^2+i0}\right)\Phi(p,0) + \frac{\sin\left(x^5\sqrt{p^2+M^2+i0}\right)}{\sqrt{p^2+M^2+i0}}\frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}, \tag{10}$$

где "начальные данные" $\Phi(p,0)$ и $\frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}$ определены при всех значениях 4-импульсов. Производя над (10) преобразование Фурье, находим формальное решение ф.у. (4):

$$\Phi(x,x^5) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ipx} d^4p\ \Phi(p,x^5) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} d^4p \left\{ \cos\left(x^5\sqrt{p^2+M^2+i0}\right)\Phi(p,0) + \frac{\sin\left(x^5\sqrt{p^2+M^2+i0}\right)}{\sqrt{p^2+M^2+i0}} \frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5} \right\}. \quad \text{(II)}$$

Чтобы скомпенсировать растущие члены $ch(\sqrt{-p^2-M^2}\,x^5)$ и $sh(\sqrt{-p^2-M^2}\,x^5)$ и придать таким образом смысл интегралу (II), необходимо подчинить произвольные функции $\Phi(p,0)$ и $\frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}$ по меньшей мере экспоненциальным условиям убывания в области (8) при $|p|\to\infty$. Можно сказать и так: удовлетворяющие указанному критерию $\Phi(p,0)$ и $\frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}$ образуют класс функций[*], в пределах которого допустима корректная постановка задачи Коши[I5,I6] для ф.у. (4) по переменной x^5:

$$\begin{cases} \left(\Box - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - M^2\right)\Phi(x,x^5) = 0, & \text{(I2а)} \\ \Phi(x,x^5)\Big|_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx}\Phi(p,0)\,d^4p, & \text{(I2б)} \\ \frac{\partial\Phi(x,x^5)}{\partial x^5}\Big|_{x^5=0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ipx} \frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}\,d^4p. & \text{(I2в)} \end{cases}$$

Заметим, что если бы мы развивали евклидов вариант новой КТП (ср.[4]), то ф.у. имело бы вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} + M^2\right)\Phi(x,x^5) = 0, \quad n=1,2,3,4, \quad \text{(I3)}$$

аналогом (8) была бы область

$$p_n^2 > M^2,$$

а условие корректности соответствующей задачи Коши для ф.у. (I3) потребовало бы от начальных данных в p -представлении $\Phi(p,0)$ и $\frac{\partial\Phi(p,0)}{\partial x^5}$ экспоненциального убывания вне сферы $p_n^2 = M^2$. Таким образом, на фундаментальную массу M в определенном смысле возлагается роль параметра обрезания в ультрафиолетовой области.

М.б., развиваемая теория будет свободна от ультрафиолетовых расходимостей? В настоящий момент у нас еще нет ответа на этот кардинальный вопрос, однако мы можем объяснить, зачем вообще нужно рассматривать задачу Коши для ф.у. по координате x^5 и именно в корректной постановке. Дело в том, что данные Коши $\Phi(x,0)$ и $\frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x^5}$ суть поля, определенные в четырехмерном пространстве-времени. Число этих данных определяется порядком дифференциального уравнения (I2а)

[*] По поводу точного описания этого класса см.[I5].

по переменной x^5. Если задача Коши (I2) корректна, то решение ф.у. дается интегралом Фурье (II), причем по самому построению оно является единственным. Следовательно, существует взаимооднозначное соответствие

$$\Phi(x,x^5) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi(x,0) \\ \frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x^5} \end{pmatrix}.$$

Другими словами, утверждение о том, что всем полям в 5-пространстве сопоставляется своя волновая функция $\Phi(x,x^5)$, подчиняющаяся ф.у. (4), равносильно утверждению, что каждое из этих полей в обычном пространстве-времени описывается волновой функцией с удвоенным, по сравнению с прежним, числом компонент:

$$\begin{pmatrix} \Phi(x,0) \\ \frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x^5} \end{pmatrix}. \quad \text{(I4)}$$

Далее естественно предположить, что начальные данные (I4) подчиняются лагранжевым уравнениям движения, которые следуют из условия стационарности действия

$$S = \int d^4x\, L\left[\Phi(x,0), \frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x^5}\right]. \quad \text{(I5)}$$

Главная задача новой теории состоит в том, чтобы построить конкретные выражения для лагранжианов $L\left[\Phi(x,0), \frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial x^5}\right]$ в физически интересных случаях, выяснить смысл дополнительных полевых переменных и дать описание новых физических эффектов в области сверхвысоких энергий $E \gtrsim M$. Частично эта задача уже была решена прежде[I,2,5-7]. Однако некоторые из полученных ранее результатов не воспроизводятся в нашем новом подходе и поэтому утрачивают силу. В этой связи заметим, что, положив в основу КТП задачу Коши (I2), мы фактически ввели новую концепцию поля. Эта концепция не эквивалентна тому понятию поля, которое было разработано в теории с импульсным пространством постоянной кривизны, а только мотивирована им. Тем не менее многие чисто геометрические черты прежнего подхода находят специфическое отражение и в новой схеме. Ведь в конечном счете p -пространство у нас тоже имеет де-ситтеровскую структуру с той оговоркой, что импульс p_μ нужно при этом трактовать как квантово-механический оператор $p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Кстати сказать, естественность и минимальность такого обобщения теории фактически была аргументирована выше (см. абзац после формулы (3)).

При преобразованиях группы де Ситтера $O(1,4)$, являющейся группой движений пространства отрицательной кривизны (2), величины ($i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$i\frac{\partial}{\partial x^5}$) ведут себя как компоненты 5-вектора $i\frac{\partial}{\partial x^L}$ $(L=0,1,2,3,5)$.
В частности, при "вращениях" в $(\mu 5)$ -плоскостях

$$i\frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{q_\mu}{M}\left[-i\frac{\partial}{\partial x^5} + \frac{q^\nu}{M-q_5}\, i\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right],$$
$$i\frac{\partial}{\partial x^{5\prime}} = -\frac{iq^\nu}{M}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - i\frac{q_5}{M}\frac{\partial}{\partial x^5}, \qquad (16)$$

где $q^2 - q_5{}^2 = -M^2$.

В плоском пределе $M\to\infty$ эти соотношения должны вырождаться в преобразования сдвига псевдоевклидова p -пространства

$$i\frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + q_\mu .$$

Отсюда и из (16), с учетом (3), заключаем, что при $M\to\infty$

$$\left|i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi(x,x^5)\right| \ll M\left|\phi(x,x^5)\right|, \qquad (17а)$$

$$i\frac{\partial\phi(x,x^5)}{\partial x^5} \simeq -M\,\phi(x,x^5). \qquad (17б)$$

Соотношение (17б) можно проинтегрировать:

$$\phi(x,x^5) \simeq e^{iMx^5}\phi(x,0). \qquad (18)$$

Таким образом, в плоском пределе $M\to\infty$ зависимость от дополнительной координаты x^5 исчезает, если в качестве пятимерной волновой функции использовать $e^{-iMx^5}\phi(x,x^5)$:

$$\frac{\partial}{\partial x^5}\left(e^{-iMx^5}\phi(x,x^5)\right) \underset{M\to\infty}{\simeq} 0. \qquad (19)$$

Нетрудно убедиться, что соотношение (19) одновременно является предельной формой ф.у. (4) при $M\to\infty$. С помощью (18) находим, что начальные условия (12б,в) в плоском пределе принимают следующий вид:

$$\phi(x,x^5)\Big|_{x^5=0} = \phi(x,0), \qquad (20а)$$

$$\frac{\partial\phi(x,x^5)}{\partial x^5}\Big|_{x^5=0} = iM\phi(x,0). \qquad (20б)$$

Таким образом, характерное для новой схемы удвоение числа полевых степеней свободы исчезает при $M\to\infty$. Отсюда, в частности (см. (15)),

$$\lim_{M\to\infty} L\left[\phi(x,0),\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x^5}\right] = L\left[\phi(x,0)\right]. \qquad (21)$$

На основании (21) мы вправе сделать вывод, что при конечном M аналогом обычной полевой переменной следует считать $\phi(x,0)$. Разумеется, если бы при постановке задачи Коши (12) мы задавали начальные условия при произвольном фиксированном значении $x^5 = const$, то все наши выводы остались бы прежними, а формулы претерпели бы тривиальные изменения. Например, вместо (15) появилось бы следующее выражение для действия:

$$S = \int\limits_{x^5=const} d^4x\, L\left[\phi(x,x^5),\frac{\partial\phi(x,x^5)}{\partial x^5}\right]. \qquad (22)$$

Чтобы показать, как работает развитый формализм, рассмотрим конкретные примеры.

1. Поле, постоянное во всем пространстве-времени:

$$\phi(x,x^5) = \phi_0(x^5).$$

Из (4) с учетом (18) находим:

$$\phi_0(x^5) = e^{iMx^5}\phi_0 . \qquad (23)$$

Начальные данные (12б,в) имеют вид:

$$\phi_0(x,0) = \phi_0,$$
$$-\frac{i}{M}\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x^5} = \phi_0. \qquad (24)$$

2. Поле $\varphi(x,x^5)$ нейтральных скалярных частиц с нулевой массой. Согласно (18), в плоском пределе $M\to\infty$

$$\varphi(x,x^5) \simeq e^{iMx^5}\varphi(x,0), \qquad (25)$$

где, в силу (21), мы должны считать, что

$$\Box\varphi(x,0) = 0. \qquad (26)$$

Приближенное выражение (25) является решением предельной формы ф.у. (19). Легко видеть, что точное выражение

$$\varphi(x,x^5) = e^{iMx^5}\varphi(x,0), \qquad (27)$$

аналогичное (25), удовлетворяет самому ф.у. (4), если только выполняется (26). Таким образом, пятимерное поле (27) описывает у нас скалярные частицы с нулевой массой. Условие нейтральности означает

$\varphi^+(x,0)=\varphi(x,0)$, что для поля (27) эквивалентно условию комбинированной эрмитовости:

$$\varphi(x,x^5)^+ = \varphi(x,-x^5). \tag{28}$$

Выбор решения ф.у. в виде (27) отвечает следующим начальным данным (I2б,в):

$$\varphi(x,x^5)\Big/_{x^5=0} \equiv \varphi(x) = \varphi(x,0), \tag{29}$$

$$-\frac{i}{M}\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^5}\Big/_{x^5=0} \equiv \chi(x) = \varphi(x,0), \tag{30}$$

где для эрмитовых полей, заданных на плоскости $x^5=0$, мы ввели обозначения $\varphi(x)$ и $\chi(x)$. Согласно сказанному выше и в силу (29)-(30) уравнения, которым эти поля подчиняются, имеют вид:

$$\Box\,\varphi(x,0)=0, \qquad \chi(x)=\varphi(x) . \tag{31}$$

На основании (3I) можно сделать вывод, что из двух полевых функций $\varphi(x)=\varphi(x,0)$ и $\chi(x)=\frac{-i}{M}\frac{\partial}{\partial x^5}\varphi(x,0)$, привлекаемых в новом формализме для описания нейтрального скалярного поля с массой нуль, физической является лишь первая - $\varphi(x)$, поскольку для нее существует полноценное уравнение движения. Поле $\chi(x)$ - чисто вспомогательное. У него нет своего уравнения движения, и его значения целиком определяются значениями поля $\varphi(x)$.

Если ограничиться квадратичными по полям лагранжианами $L[\varphi(x),\chi(x)]$, то интеграл действия (I5) для рассматриваемой системы находится с точностью до постоянного коэффициента α :

$$S=\int L[\varphi(x),\chi(x)]d^4x=\frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}+\alpha M^2(\chi(x)-\varphi(x))^2\right]. \tag{32}$$

Этот коэффициент можно фиксировать следующим образом. Запишем действие в виде интеграла (22), т.е. применительно к случаю, когда начальные значения $\varphi(x,x^5)$ и $-\frac{i}{M}\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^5}$ заданы на произвольной плоскости $x^5=const$:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{x^5=const}d^4x\left[\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x,x^5)^+}{\partial x_\mu}+\alpha\left|-i\frac{\partial\varphi}{\partial x^5}(x,x^5)-M\varphi(x,x^5)\right|^2\right]. \tag{33}$$

Уравнения движения для рассматриваемых начальных данных имеют вид

$$\Box\,\varphi(x,x^5)=0 \quad , \quad -i\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^5}=M\,\varphi(x,x^5), \tag{34}$$

где $x^5=const$. Эти уравнения не меняются при переходе к любому другому фиксированному значению x^5, т.е. сохраняют свою форму при сдвигах

$$x^5\to x^5+a^5. \tag{35}$$

Обычно симметрия уравнения движения является одновременно и симметрией действия. Если следовать этой традиции, то от действия (33) нужно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial S}{\partial x^5}=0. \tag{36}$$

Поскольку поле $\varphi(x,x^5)$ подчиняется ф.у. (4), то равенство (36) означает, что действие (33) должно быть интегралом движения ф.у. Нетрудно убедиться, что для выполнения (36) необходимо положить в (33) $\alpha=1$. Таким образом, действие для поля невзаимодействующих нейтральных скалярных частиц с нулевой массой имеет в нашем подходе следующий окончательный вид:

$$S=\frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x,x^5)^+}{\partial x_\mu}+\left|-i\frac{\partial\varphi(x,x^5)}{\partial x^5}-M\varphi(x,x^5)\right|^2\right]= \tag{37}$$
$$=\frac{1}{2}\int d^4x\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}+M^2(\chi(x)-\varphi(x))^2\right].$$

Это выражение удовлетворяет принципу соответствия с обычной теорией, т.к. при $M\to\infty$, в силу (25),

$$S\simeq\frac{1}{2}\int d^4x\;\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}. \tag{38}$$

Подобно тому, как стандартное действие (38) остается инвариантным при сдвигах поля на постоянную величину $\varphi(x)\to\varphi(x)+\varphi_0$, так и новое действие (37) инвариантно относительно преобразования сдвига

$$\varphi(x,x^5)\to\varphi(x,x^5)+\varphi_0\,e^{iMx^5}, \tag{39}$$

где $\varphi_0\,e^{iMx^5}$ - "постоянное" поле вида (23). Судя по этому признаку, лагранжеву плотность в действии (37) следует воспринимать как обобщенный кинетический член. Заметим, что это выражение является локальным в 5-пространстве.

Перейдем теперь в (37) к p -представлению, используя соотношения (II), (I2б,в) и (9). Очевидно,

$$\varphi(x,x^5)=\varphi^+(x,-x^5)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ipx}\,d^4_p\;\varphi(p,x^5)=$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int e^{-ipx} d^4p \left\{ \cos(p^5x^5)\varphi(p) + \frac{iM}{p^5}\sin(p^5x^5)\chi(p) \right\}, \tag{40}$$

где

$$\varphi(p) = \varphi^+(-p) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int e^{ipx} d^4x\, \varphi(x),$$
$$\chi(p) = \chi^+(-p) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int e^{ipx} d^4x\, \chi(x). \tag{4I}$$

Введем далее амплитуды

$$\varphi(p, \pm p^5) = \left[\varphi(-p, \pm p^{5*})\right]^+ = \frac{|p^5|}{2M}\left[\varphi(p) \pm \frac{M}{p^5}\chi(p)\right]. \tag{42}$$

Легко видеть, что волновую функцию (40) можно представить как

$$\varphi(x, x^5) = \frac{M}{(2\pi)^{5/2}} \int e^{-ipx} \frac{d^4p}{|p^5|} \left\{ e^{ip^5x^5}\varphi(p,p^5) + e^{-ip^5x^5}\varphi(p,-p^5) \right\}. \tag{43}$$

Следовательно, $\varphi(p,p^5)$ и $\varphi(p,-p^5)$ преобразуются неприводимым образом при сдвигах (35):

$$\varphi(p, \pm p^5) \to e^{\pm ip^5a^5}\varphi(p, \pm p^5). \tag{44}$$

Из (37) и (4I) находим:

$$S = \pi \int d^4p \left[p^2|\varphi(p)|^2 + M^2|\chi(p) - \varphi(p)|^2\right]. \tag{45}$$

Если импульсное 4-пространство, по которому производится интегрирование в (45), разбить на две области – (6) и (8), то интеграл по первой из них

$$\pi \int_{p^2+M^2 \geq 0} d^4p \left[p^2|\varphi(p)|^2 + M^2|\chi(p) - \varphi(p)|^2\right] \equiv S_I \tag{46}$$

можно осмыслить как вклад в действие от полей, заданных на де-ситтеровском гиперболоиде (2). Действительно, переходя в (46) к переменным $\varphi(p,p^5)$ и $\varphi(p,-p^5)$ согласно (42), будем иметь (ср.[3]):

$$S_I = \pi M \int_{p^2+M^2 \geq 0} \frac{d^4p}{p^5} \left[2M(p^5-M)|\varphi(p,p^5)|^2 + 2M(p^5-M)|\varphi(p,-p^5)|^2\right] = \tag{47}$$
$$= 2\pi M \int d^5p\, \varepsilon(p^5)\delta(p^2 - p_5^2 + M^2)\, 2M(p^5-M)|\varphi(p,p^5)|^2,$$

где $\varepsilon(p^5) = p^5/|p^5|$. Подчеркнем, что данное выражение является квадратичной эрмитовой формой по $\varphi(p,p^5)$ и $\varphi(p,-p^5)$. Поэтому его инвариантность относительно преобразований (44) очевидна.

Уравнения движения для полей $\varphi(p, \pm p^5)$ имеют вид:

$$2M(p^5 - M)\varphi(p,p^5) = 0, \tag{48a}$$

$$2M(p^5 + M)\varphi(p,-p^5) = 0, \tag{48б}$$

где $p^5 = +\sqrt{p^2+M^2}$. Т.о., $\varphi(p,-p^5) = 0$, а $\varphi(p,p^5)$ описывает рассматриваемое поле скалярных нейтральных частиц с нулевой массой. Как неоднократно указывалось ранее[I2-I3,3], волновые операторы в (48а,б) могут быть с точностью до константы найдены с помощью разложения на множители стандартного волнового оператора p^2 в духе известного дираковского приема:

$$p^2 = (p^5)^2 - M^2 = (p^5 + M)(p^5 - M). \tag{49a}$$

В силу (48)-(49а) поля $\varphi(p, \pm p^5)$ автоматически удовлетворяют уравнению

$$p^2\varphi(p, \pm p^5) = 0. \tag{49б}$$

Полезно иметь в виду, что если в левой части (49а) к волновому оператору добавить, по Фейнману, бесконечно малую мнимую часть $i0$, то это соотношение можно распространить на все импульсное 4-пространство:

$$p^2 + i0 = \left(\sqrt{M^2 + p^2 + i0} + M\right)\left(\sqrt{M^2 + p^2 + i0} - M\right) =$$
$$= (p^5 + M)(p^5 - M),$$

где величина p^5 определена так же, как в (9).

В[3] был приведен алгоритм, позволяющий получать функционал типа (47) из обычного выражения для действия $S = \pi\int d^4p\, p^2|\varphi(p)|^2$ с помощью формальной подстановки:

$$\psi(p) \to \psi(p,p^5),$$
$$d^4p \to 2\pi\,\varepsilon(p^5)\,\delta(p^2 - p_5^2 + M^2)\,d^5p, \qquad (50)$$
$$p^2 \to 2M(p^5 - M).$$

Аналогичный алгоритм, с соответствующим выбором численных множителей и волновых операторов, удобно применять для построения действия S_I в случае любых полей. Соответствующее полное действие S потом легко находится посредством простой экстраполяции S_I в область (8).

Рассмотрим, в частности, спинорное поле /4/. Принимая за образец дираковское разложение

$$p^2 = (p_\mu \gamma^\mu)^2 \equiv (\not p)^2, \qquad (51)$$

представим новый волновой оператор $2M(p^5 - M) = 2M(\sqrt{p^2+M^2} - M)$ в подобной факторизованной форме:

$$2M(p^5 - M) = p^2 - (p^5 - M)^2 = \not p^{\,2} - (p^5 - M)^2 =$$
$$= (\not p + p^5 - M)(\not p - p^5 + M). \qquad (52)$$

Теперь мы вправе принять любую из этих скобок, скажем вторую, в качестве аналога $\not p$ и написать уравнение Дирака для спинорной волновой функции $\psi(p,p^5)$ (ср. (42)) в виде

$$(\not p - p^5 + M)\,\psi(p,p^5) = 0. \qquad (53)$$

Соответственно, для функции $\psi(p,-p^5)$ будем иметь

$$(\not p + p^5 + M)\,\psi(p,-p^5) = 0, \qquad (54)$$

откуда следует, что $\psi(p,-p^5) = 0$.

Применяя далее алгоритм типа (50), в котором последняя подстановка выглядит как

$$\not p \to \not p - p^5 + M, \qquad (55)$$

получим следующее выражение для действия дираковского поля на гиперболоиде (2):

$$S_I = 4\pi M \int d^4p\, \varepsilon(p^5)\,\delta(p^2 - p_5^2 + M^2)\,\bar\psi(p,p^5)(\not p - p^5 + M)\psi(p,p^5). \qquad (56)$$

Переходя в (56) к новым полевым переменным $\psi(p)$ и $\chi(p)$ по формулам (ср. (42))

$$\psi(p,p^5) = \frac{p^5\psi(p) + M\chi(p)}{2M},$$
$$\psi(p,-p^5) = \frac{p^5\psi(p) - M\chi(p)}{2M}, \qquad (57)$$

нетрудно установить, что

$$S_I = \pi \int\limits_{p^2+M^2 \geq 0} d^4p \left[\bar\psi(p)(\not p + M)\chi(p) + \bar\chi(p)(\not p + M)\psi(p) - M\bar\chi(p)\chi(p) - \left(M + \frac{p^2}{M}\right)\bar\psi(p)\psi(p)\right]. \qquad (58)$$

Распространяя интегрирование в (58) на все p-пространство, приходим к полному действию свободного поля Дирака в нашем подходе:

$$S = \pi \int d^4p \left[\bar\psi(p)(\not p + M)\chi(p) + \bar\chi(p)(\not p + M)\psi(p) - M\bar\chi(p)\chi(p) - \left(M + \frac{p^2}{M}\right)\bar\psi(p)\psi(p)\right] = \qquad (59)$$

$$= 2\pi \int d^4p \left[\bar\psi(p)\not p\,\psi(p) - \frac{M}{2}\left(\bar\chi(p) - \frac{1}{M}\bar\psi(p)(\not p + M)\right)\left(\chi(p) - \frac{1}{M}(\not p + M)\psi(p)\right)\right].$$

Второе из этих двух выражений получается из первого благодаря тождеству

$$p^2\,\bar\psi(p)\psi(p) = \bar\psi(p)\not p^{\,2}\psi(p),$$

которое перестает выполняться после включения взаимодействия с калибровочными полями. Таким образом, чтобы избежать неоднозначности, нам надо уточнить, следует ли понимать величину p^2 в (58)-(59) как лоренцевский квадрат 4-вектора p_μ или как квадрат матрицы $\not p$.

В контексте стандартной дираковской теории свободный волновой оператор p^2 интерпретируется только как $\not p^{\,2}$, о чем свидетельствует само разложение (5I). В теории спинорного поля, основанной на уравнении Клейна-Гордона /I8/, последнее нужно записывать в виде $(\not p^{\,2} - m^2)\psi = 0$, чтобы после включения электромагнитного поля появлялось характерное для дираковской частицы взаимодействие $\sim e\bar\Psi\sigma_{\mu\nu}\Psi F^{\mu\nu}$. Сказанное вынуждает признать, что в нашем варианте дираковской теории скалярный волновой оператор $2M(p^5-M)=2M(\sqrt{p^2+M^2}-M)$ необходимо толковать только как $2M(\sqrt{\not p^2+M^2}-M)$ [*]. Тогда легко видеть, что p^2 в (58)-(59) приобретает смысл $\not p^2$.

Из (59) следуют уравнения движения для полей $\Psi(p)$ и $\chi(p)$

$$\not p\,\Psi(p)=0$$
$$\chi(p)=\frac{1}{M}(\not p+M)\,\Psi(p)=\Psi(p), \tag{60}$$

вид которых позволяет заключить, что поле $\Psi(p)$ является физическим, а $\chi(p)$ – вспомогательным (ср. (31)).

Действие (59) может быть записано и в конфигурационном 5-пространстве (ср. (37))[4]:

$$S=\frac{1}{2}\int d^4x\Big\{\bar\Psi(x,x^5)(i\gamma+M)\Big(\frac{-i}{M}\frac{\partial}{\partial x^5}\Psi(x,x^5)\Big)+$$
$$+\overline{\Big(\frac{-i}{M}\frac{\partial}{\partial x^5}\Psi(x,x^5)\Big)}(i\gamma+M)\Psi(x,x^5)-M\overline{\Big(-i\frac{\partial\Psi(x,x^5)}{M\,\partial x^5}\Big)}\Big(\frac{-i}{M}\frac{\partial\Psi(x,x^5)}{\partial x^5}\Big)- \tag{61}$$
$$-\bar\Psi(x,x^5)\Big[M+\frac{(i\gamma)^2}{M^2}\Big]\Psi(x,x^5)\Big\},$$

где спинорное поле $\Psi(x,x^5)$ удовлетворяет ф.у. (4). В соответствии с нашей общей концепцией, $\Psi(p)$ и $\chi(p)$ суть Фурье-образы начальных данных $\Psi(x,0)\equiv\Psi(x)$, $\frac{-i}{M}\frac{\partial}{\partial x^5}\Psi(x,0)\equiv\chi(x)$, достаточно хорошо убывающие в области (8) при $|p|\to\infty$.

При сдвигах $\Psi(x,x^5)\to\Psi(x,x^5)+\Psi_0\,e^{iMx^5}$, где Ψ_0 – постоянный спинор, действие (61) не меняется, т.е. подынтегральное выражение ведет себя как кинетический член (ср. скалярный случай). Отметим также, что из ф.у. следует $\frac{\partial S}{\partial x^5}=0$, и поэтому в (61) можно положить $x^5=0$. Наконец, если $M\to\infty$, то в силу (25)

$$S\simeq\int d^4x\,\bar\Psi(x,0)\,i\gamma\,\Psi(x,0)=S_{DIRAC}$$

Здесь уместно подчеркнуть, что в том варианте КТП с фундаментальной массой, в котором "классическим прототипом" ф.у. служит уравнение (I)

[*] Кстати сказать, в плоском пределе $M\to\infty$ это выражение совпадает с $\not p^2$.

и, следовательно, пятое измерение является времениподобным[*], обобщенное действие спинорного поля в плоском пределе $M\to\infty$ не совпадает со стандартным выражением S_{DIRAC}, а оказывается псевдоскалярной величиной

$$S\simeq\int d^4x\,\bar\Psi(x,0)\,i\gamma^5\gamma\,\Psi(x,0)\,.$$

Из соображений, связанных с принципом соответствия, мы в этой работе предпочли иметь дело с уравнением (2). Однако делать окончательный выбор между вариантами (I) и (2) нам кажется преждевременным, поскольку оба они еще мало изучены. В частности, интересно было бы исследовать, не возникает ли в случае (I) принципиальное различие между киральными полями Ψ_L и Ψ_R (см. в этой связи[19, стр. 212]).

Теперь дадим совсем краткое описание теории электромагнитного поля в новых терминах[1,4,7]. Пусть $A_\mu(p,p^5)$ и $A_\mu(p,-p^5)$ – компоненты вектор-потенциала, определенные, подобно $\Psi(p,\pm p^5)$ в (47), на гиперболоиде (2). Очевидно, вместо (49б), для $A_\mu(p,\pm p^5)$ надо выписывать уравнения Максвелла

$$p^2A_\mu(p,\pm p^5)=p_\mu\left(p^\nu A_\nu(p,\pm p^5)\right). \tag{62}$$

Как найти аналог более детальных уравнений движения (48а,б)? Для этого факторизуем волновой оператор в (62), применяя (49а). В случае $p^5>0$ будем иметь:

$$(p^5+M)\Big[(p^5-M)A_\lambda(p,p^5)-p_\lambda\frac{p^\nu A_\nu(p,p^5)}{p^5+M}\Big]=0\,.$$

Выражение в квадратных скобках, хотя и похоже на (48а), оказывается непригодным для дальнейших построений из-за фактора $1/p^5+M$. Поэтому введем в рассмотрение вспомогательное поле

$$A_5(p,p^5)\equiv\frac{p^\nu A_\nu(p,p^5)}{p^5+M}, \tag{63}$$

которое поглощает этот фактор. В итоге возникает следующая система уравнений для электромагнитного 5-потенциала $A_L(p,p^5)=$ $=\left(A_\lambda(p,p^5),A_5(p,p^5)\right)$:

[*] Евклидова версия такой теории детально изучается в[2,4].

$$\begin{cases} 2M(p^5-M)\,A_\lambda(p,p^5) - 2Mp_\lambda A_5(p,p^5) = 0 \\ 2M\left[p^\nu A_\nu(p,p^5)\right] - 2M(p^5+M)\,A_5(p,p^5) = 0 \end{cases} \qquad (64)$$

Аналогичные уравнения для $A_L(p,-p^5)$ получаются из (64) при $p^5 \to -p^5$.

Легко убедиться, что максвелловские уравнения (62) являются следствием (64). Для поперечного поля $A^\perp_\lambda(p,p^5) = A_\lambda(p,p^5) - \frac{p_\lambda(pA)}{p^2}$ из (64) находим аналог уравнения Даламбера (ср. (48а)):

$$2M(p^5-M)\,A^\perp_\lambda(p,p^5) = 0.$$

Степени свободы $p^\nu A_\nu(p,p^5)$ и $A_5(p,p^5)$ – чисто калибровочные. В силу (64) они подчиняются системе уравнений

$$\begin{cases} (p^5-M)(p\cdot A) - p^2 A_5 = 0, \\ M(pA) - M(p^5+M)A_5 = 0, \end{cases}$$

которая имеет нетривиальные решения, т.к.

$$\det\begin{vmatrix} p^5-M & -\frac{p^2}{M} \\ M & -(p^5+M) \end{vmatrix} = p^2 - p_5^2 + M^2 = 0.$$

Поскольку в то же время $A_5(p,p^5) = \frac{(pA)}{p^5+M}$, то можно заключить, что 5- я компонента электромагнитного потенциала является вспомогательным полем штюкельбергова типа.

Система уравнений (64) остается инвариантной при следующих калибровочных преобразованиях 5-потенциала:

$$\begin{aligned} A_\lambda(p,p^5) &\to A_\lambda(p,p^5) + ip_\lambda \Lambda(p,p^5), \\ A_5(p,p^5) &\to A_5(p,p^5) + i(p_5-M)\Lambda(p,p^5). \end{aligned} \qquad (65)$$

Далее легко установить, что аналогом функционалов действия (47) и (56), определенных на гиперболоиде (2), в электромагнитной теории является выражение

$$S_I = 2\pi M\int d^4p\,\varepsilon(p^5)\,\delta(p^2-p_5^2+M^2)\,2M(p^5-M)\left[A^\mu(p,p^5) - p^\mu\frac{A_5(p,p^5)}{p^5-M}\right]^+\left[A_\mu(p,p^5) - p_\mu\frac{A_5(p,p^5)}{p^5-M}\right] \qquad (66)$$

Та же процедура, которая применялась нами в скалярном и спинорном случаях, приводит к следующему интегралу полного действия электромагнитного поля в КТП с фундаментальной массой:

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\left\{F_{KL}(x,x^5)F^{KL}(x,-x^5) + 2\left|\frac{\partial A^\mu(x,x^5)}{\partial x^\mu} - iMA_5(x,x^5) - \frac{\partial A_5(x,x^5)}{\partial x^5}\right|^2\right\}, \qquad (67)$$

где

$$F_{KL}(x,x^5) = \frac{\partial}{\partial x^K}\left(e^{-iMx^5}A_L(x,x^5)\right) - \frac{\partial}{\partial x^L}\left(e^{-iMx^5}A_K(x,x^5)\right). \qquad (68)$$

Лагранжева плотность в (67) – это не просто локальное выражение в конфигурационном 5-пространстве, а величина, инвариантная относительно локальных калибровочных преобразований 5-потенциала (ср. (65))

$$e^{-iMx^5}A_K(x,x^5) \to e^{-iMx^5}A_K(x,x^5) - \frac{\partial}{\partial x^K}\left(e^{-iMx^5}\Lambda(x,x^5)\right), \qquad (69)$$

$$K = 0,1,2,3,5,$$

где функция $\Lambda(x,x^5)$, как и $A_K(x,x^5)$, подчиняется ф.у. (4). Разумеется, по-прежнему $\frac{\partial S}{\partial x^5} = 0$.

Обратим внимание, что "естественными" полевыми переменными в (64) следует считать не $A_K(x,x^5)$, а $e^{-iMx^5}A_K(x,x^5)$, которые в плоском пределе $M \to \infty$ не зависят от x^5 (см. (19)). Подчеркнем также, что к числу вспомогательных полей, кроме известных калибровочных степеней свободы, содержащихся в вектор-потенциале $A_\lambda(x,0)$, здесь принадлежат компоненты

$$\begin{aligned} A_5(x) &\equiv A_5(x,0), \\ X_5(x) &\equiv \frac{-i}{M}\frac{\partial A_5(x,0)}{\partial x^5}, \\ F_{\lambda 5}(x,0) &= \frac{\partial A_5(x)}{\partial x^\lambda} + iMA_\lambda(x,0) - \frac{\partial A_\lambda(x,0)}{\partial x^5}. \end{aligned} \qquad (70)$$

Предполагая, что данные Коши для заряженного спинорного поля на произвольной плоскости $x^5 = const$ преобразуются по представлению калибровочной группы (69)

$$\psi(x,x^5) \to \exp\{ i q e^{-iMx^5} \Lambda(x,x^5)\} \psi(x,x^5), \qquad (71)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^5}(x,x^5) \to \frac{\partial}{\partial x^5}\left[\exp\{ i q e^{-iMx^5} \Lambda(x,x^5)\} \psi(x,x^5)\right]$$

(q - электрический заряд)

и принимая во внимание (6I) и (67), можно обобщить квантовую электродинамику в духе нашей гипотезы о фундаментальной массе /I,3/. Соответствующее обобщение объединенной электрослабой теории не вызывает особых затруднений. В принципе, уже видно, как применить развитый формализм к описанию гравитационного взаимодействия.

В этой работе мы, однако, не ставили своей целью дать конкретные физические приложения КТП с фундаментальной массой, а стремились лишь к тому, чтобы сделать более ясной логическую структуру новой теории.

Авторы искренне благодарны А.Д.Донкову, М.Д.Матееву и М.В.Чижову за плодотворное сотрудничество и конструктивные дискуссии, а также Ш.А.Алимову, А.К. Атаходжаеву, Н.Н.Боголюбову, Р.М.Кашаеву, А.А.Логунову, Я.А.Смородинскому, Д.В.Фурсаеву, М.П.Чавлейшвили за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

I. Kadyshevsky V.G. Nuclear Physics, 1978, B141, p.477;
Kadyshevsky V.G., In: Proc. of Intern. Integrative Conference on Group Theory and Math. Physics, Austin, Texas (1978);

Кадышевский В.Г. ЭЧАЯ, I980, II, вып. I, с. 5.

2. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Phys. Lett., 1981, 106B, p.139.

3. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. Nuovo Cimento, 1985, v.87A, N 3, p.324.

4. Донков А.Д., Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Чижов М.В. Труды УП Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, I984, ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, с.I72-I90.
Chizhov M.V., Donkov A.D., Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G. and Mateev M.D., 1985, v.87A, N 3, p.350; 1985, v.87A, N 4, p.373.

5. Донков А.Д., Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Чижов М.В. Известия АН СССР, сер.физ., I982, 46, № 9, с. I772;
Ибадов Р.М., Чижов М.В. Известия АН УзССР, сер.физ.-мат.наук, I983, № 5, с. 38.

6. Ибадов Р.М. Известия АН УзССР, сер.физ.-мат.наук, I984, № 3, с.44.

7. Кадышевский В.Г. Квантовая теория поля и "максимон"Маркова; доклад на III Международном семинаре "Квантовая теория гравитации" (Москва, I984), ОИЯИ, I984, Р2-84-753.

8. Гольфанд Ю.А. ЖЭТФ, I959, 37, 504.

9. Кадышевский В.Г. ЖЭТФ, I96I, 4I, I885; ДАН СССР, I962, I47, 588, I336.

I0. Гольфанд Ю.А. ЖЭТФ, I962, 43, 256; I963, 44, I248.

II. Мир-Касимов Р.М. ЖЭТФ, I965, 49, 905, II6I; I967, 52, 533.

I2. Кадышевский В.Г. В кн.: "Проблемы теоретической физики", посвященной памяти акад. И.Е.Тамма, М., "Наука", I972.

I3. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M. Bulg. J. of Physics, 1974, 1, 58, 150, 233; 1975, 2, 3.

I4. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции. Выпуск 5, Физматгиз, М., I962.

I5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции. Выпуск 3, Физматгиз, М., I958.

I6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач., М., "Наука", I986.

I7. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, М., I963.

I8. Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс. М., "Мир", I984.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря I986 года.

Ибадов Р.М., Кадышевский В.Г. P2-86-830

К теории поля с фундаментальной массой

Работа продолжает цикл исследований, посвященных построению последовательной теории поля с фундаментальной массой M - гипотетическим универсальным масштабом в области сверхвысоких энергий. Ранее в развиваемом подходе ключевая роль принадлежала де-ситтеровскому импульсному пространству радиуса M. В настоящей статье разрабатывается квантовая версия данной идеи: p-пространство по-прежнему предполагается де-ситтеровским, однако импульс p_μ при этом трактуется только как квантовомеханический оператор $i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Ibadov R.M., Kadyshevsky V.G. P2-86-830

Towards a Field Theory with Fundamental Mass

This paper is a continuation of our investigations along the lines of constructing a consistent field theory with fundamental mass M - a hypothetical universal scale in the ultrahigh energy region.Earlier, in the developed approach the key role was played by the de Sitter momentum space of radius M. In this paper a quantum version of this idea is worked out: p-space is assumed to be a de Sitter one like before; however, the four-momentum p_μ is treated as a quantum mechanical operator $i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ only.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986