объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-819

В.К.Мельников

ЭВОЛЮЦИЯ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в "Letters in Mathematical Physics"

1986

Применение метода обратной задачи рассеяния к исследованию различных нелинейных процессов позволило обнаружить богатое качественное разнообразие в поведении решений, описывающих эти процессы. Настоящая работа посвящена исследованию нового явления - эволюции солитонов в нелинейной интегрируемой системе. Суть этого явления состоит в следующем. В рассматриваемой ниже нелинейной интегрируемой системе найдены решения, которые при $t \to \pm\infty$ имеют асимптотики односолитонных решений. Однако существенные параметры этих двух солитонов не совпадают. Это значит, что названные выше решения описывают эволюцию солитона с одним набором параметров в солитон с другим набором параметров.

Исходным пунктом наших рассмотрений послужит система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\varkappa \frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2 = 0\ , \quad i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\ , \qquad (1)$$

описывающая (при определенных условиях) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Здесь u - амплитуда длинной волны, φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2 = 1$. С помощью непосредственной подстановки нетрудно убедиться, что система (1) обладает решениями, описывающими уединенные волны (солитоны) вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu t+2\sigma y)]}\ , \qquad (2)$$

$$\varphi = C\,\frac{\exp[i\nu(x+2\nu t)+i\tau y]}{ch[\mu(x+2\nu t+2\sigma y)]}\exp[-i(\mu^2+\nu^2)t],$$

где вещественные параметры μ, ν, σ и комплексная величина C

удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu-\sigma)\mu^2+\varkappa|C|^2=0, \qquad (3)$$

и, следовательно, для существования этих решений необходимо выполнение условия $(\nu-\sigma)\varkappa \le 0$. При этом параметр τ может принимать произвольные вещественные значения. Метод обратной задачи рассеяния /1,2/ позволяет найти решение, описывающее взаимодействие произвольного числа волн вида (2).

В настоящей работе мы детально рассмотрим взаимодействие двух таких волн. Уже в этом простейшем случае удаётся обнаружить факты нетривиального взаимодействия солитонов. С этой целью возьмем функции D и Φ вида

$$\begin{aligned}
D = 1 &+ \alpha_1 \exp[2\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)] + \\
&+ \alpha_2 \exp[2\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)] + \\
&+ \gamma_0 \exp[2\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+2\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)] + \\
&+ 2\delta_0 \exp[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)]\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi = 2C_1&\left\{1+\alpha_2\,\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\,\frac{\bar\omega_3^2-\bar\omega_4^2}{\bar\omega_3^2-\omega_4^2}\exp[2\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)]\right\}\times \qquad (4)\\
&\times \exp[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)]\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)+i\tau_1 y-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t]+\\
+2C_2&\left\{1+\alpha_1\,\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\bar\omega_1}\,\frac{\bar\omega_4^2-\bar\omega_3^2}{\bar\omega_4^2-\omega_3^2}\exp[2\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)]\right\}\times\\
&\times \exp[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)]\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)+i\tau_2 y-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],
\end{aligned}$$

где

$$\omega_1=\mu_1+i\nu_1,\quad \omega_2=\mu_2+i\nu_2,\quad \omega_3=\mu_3+i\nu_3,\quad \omega_4=\mu_4+i\nu_4,$$

$$\alpha_1=\frac{\varkappa|C_1|^2}{2\mu_1\mu_3\nu_3},\quad \alpha_2=\frac{\varkappa|C_2|^2}{2\mu_2\mu_4\nu_4},\quad \sigma_1=\nu_1+\frac{\mu_3}{\mu_1}\nu_3,\quad \sigma_2=\nu_2+\frac{\mu_4}{\mu_2}\nu_4,$$

$$\gamma_0=\alpha_1\alpha_2\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right|^2\left|\frac{\omega_3^2-\omega_4^2}{\omega_3^2-\bar\omega_4^2}\right|^2$$

$$\delta_0^2=\frac{|\omega_1+\bar\omega_1||\omega_2+\bar\omega_2||\omega_3^2-\bar\omega_3^2||\omega_4^2-\bar\omega_4^2|}{|\omega_1+\bar\omega_2|^2\,|\omega_3^2-\bar\omega_4^2|^2}\,|\alpha_1\alpha_2|, \qquad (5)$$

$$\tau_1=-\mu_1^2+\mu_3^2+\nu_1^2-\nu_3^2,\quad \tau_2=-\mu_2^2+\mu_4^2+\nu_2^2-\nu_4^2,$$

$$\theta=(\nu_1-\nu_2)x+(\tau_1-\tau_2)y-(\mu_1^2-\mu_2^2-\nu_1^2+\nu_2^2)t+\theta_0.$$

Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение. Согласно результатам работы /2/ функции

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D}.$$

удовлетворяют системе (I), т.е. являются ее решением. На основании (4) и (5) нетрудно убедиться, что если выполнены условия

$$(\sigma_1-\nu_1)\varkappa>0,\quad (\sigma_2-\nu_2)\varkappa>0, \qquad (6)$$

$$|\omega_1+\bar\omega_1||\omega_2+\bar\omega_2||\omega_3^2-\bar\omega_3^2||\omega_4^2-\bar\omega_4^2|\le|\omega_1+\bar\omega_2|^2|\omega_3^2-\bar\omega_4^2|^2, \qquad (6')$$

то имеем $\alpha_1\ge 0$, $\alpha_2\ge 0$, $0\le\delta_0^2\le\alpha_1\alpha_2$, $\gamma_0\ge 0$ и, следовательно, функция D положительна при любых вещественных значениях x, y, t. Таким образом, при выполнении условий (6) и (6′) интересующее нас решение не имеет особенностей при любых вещественных x, y, t.

Выясним теперь, каково поведение у этого решения. Рассмотрим сначала случай, когда выполнено неравенство $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)\ne 0$. Нетрудно убедиться, что если $\sigma_1\ne\sigma_2$, то при любом фиксированном t в области $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)\gg 1$ наше решение имеет асимптотику вида

$$u \sim u_1^+ = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^+]}, \qquad (7)$$

$$\varphi \sim \varphi_1^+ = C_1^+ \frac{exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)+i\tau_1 y]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^+]} exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t],$$

где

$$\delta_1^+ = \frac{1}{2}(\ln\gamma_0 - \ln\alpha_2), \quad C_1^+ = c_1 \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\,\frac{\bar\omega_3^2-\bar\omega_4^2}{\bar\omega_3^2-\omega_4^2} exp(-\delta_1^+),$$

а в области $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y) \ll -1$ оно имеет асимптотику вида

$$u \sim u_1^- = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^-]}, \qquad (8)$$

$$\varphi \sim \varphi_1^- = C_1^- \frac{exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)+i\tau_1 y]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^-]} exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t],$$

где

$$\delta_1^- = \frac{1}{2}\ln\alpha_1, \quad C_1^- = c_1 exp(-\delta_1^-).$$

С помощью (5) находим, что

$$\delta_1 = \delta_1^+ - \delta_1^- = \ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right| + \ln\left|\frac{\omega_3^2-\omega_4^2}{\omega_3^2-\bar\omega_4^2}\right|, \quad |C_1^+| = |C_1^-|.$$

Если мы теперь устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^+ = 0$, то обнаружим, что асимптотика (7) будет иметь место при $y\to\infty$, если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2 > 0$, а при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2 < 0$ асимптотика (7) будет выполняться, если $y\to-\infty$. Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1^- = 0$, мы видим, что асимптотика (8) справедлива при $y\to\infty$, если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2 < 0$, а при

$(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2 > 0$ асимптотика (8) выполняется, если $y\to-\infty$.

Далее, легко проверить, что при любом фиксированном t в области $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y) \gg 1$ рассматриваемое нами решение имеет асимптотику вида

$$u \sim u_2^+ = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^+]}, \qquad (9)$$

$$\varphi \sim \varphi_2^+ = C_2^+ \frac{exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)+i\tau_2 y]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^+]} exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где

$$\delta_2^+ = \frac{1}{2}(\ln\gamma_0 - \ln\alpha_1), \quad C_2^+ = c_2 \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\bar\omega_1}\,\frac{\bar\omega_4^2-\bar\omega_3^2}{\bar\omega_4^2-\omega_3^2} exp(-\delta_2^+),$$

а в области $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y) \ll -1$ оно имеет асимптотику вида

$$u \sim u_2^- = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^-]}, \qquad (10)$$

$$\varphi \sim \varphi_2^- = C_2^- \frac{exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)+i\tau_2 y]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^-]} exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где

$$\delta_2^- = \frac{1}{2}\ln\alpha_2, \quad C_2^- = c_2 exp(-\delta_2^-).$$

В силу (5) получаем, что

$$\delta_2 = \delta_2^+ - \delta_2^- = \ln\left|\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\bar\omega_2}\right| + \ln\left|\frac{\omega_3^2-\omega_4^2}{\omega_3^2-\bar\omega_4^2}\right|, \quad |C_2^+| = |C_2^-|.$$

Устремляясь на этот раз на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^+ = 0$, мы видим, что асимптотика (9) имеет место при $y\to\infty$, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1 > 0$, а при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1 < 0$ асимптотика (9) выполняется, если $y\to-\infty$. Аналогичным образом, если мы устремимся в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2^-=0$, то обнаружим, что асимптотика (10) справедлива при $y\to\infty$, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1<0$, а при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$ асимптотика (10) имеет место, если $y\to-\infty$.

Таким образом, при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)\neq 0$ и $\sigma_1\neq\sigma_2$ интересующее нас решение описывает взаимодействие двух уединенных волн вида (2), которые распространяются на плоскости x, y под углом друг к другу. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению обеих волн в окрестности точки

$$x+2\sigma_1 y+2\nu_1 t+\frac{\delta_1^+ + \delta_1^-}{2\mu_1}=0,\quad x+2\sigma_2 y+2\nu_2 t+\frac{\delta_2^+ + \delta_2^-}{2\mu_2}=0.$$

Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любой из взаимодействующих волн профиль каждой из волн приобретает указанный ранее вид. Вдали от области взаимодействия результат взаимодействия выражается только в фазовых сдвигах обеих волн.

В том случае, когда $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)\neq 0$, а $\sigma_1=\sigma_2$, наше решение описывает взаимодействие двух волн, только если $\nu_1\neq\nu_2$. При этом обе волны распространяются в одном и том же направлении, если $\nu_1\nu_2>0$, и распространяются в прямо противоположных направлениях, если $\nu_1\nu_2<0$. Заметим, что если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$, то при $t\to\infty$ асимптотика одной из волн имеет вид (7), а при $t\to-\infty$ ее асимптотика имеет вид (8). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$, то при $t\to\infty$ асимптотика этой волны имеет вид (8), а при $t\to-\infty$ она имеет вид (7). Заметим, далее, что если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$, то при $t\to\infty$ асимптотика второй из взаимодействующих волн имеет вид (9), а при $t\to-\infty$ ее асимптотика имеет вид (10). Наоборот, если $(\nu_1-\nu_2)\mu_1<0$, то при $t\to\infty$ выполняется асимптотика (10), а при $t\to-\infty$ справедлива асимптотика (9). Искажение обеих волн в этом случае достигает максимума в момент времени

$$t=\frac{(\delta_1^+ + \delta_1^-)\mu_2-(\delta_2^+ + \delta_2^-)\mu_1}{4(\nu_2-\nu_1)\mu_1\mu_2}$$

и стремится к нулю при $t\to\pm\infty$.

Наконец, при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)\neq 0$ и $\sigma_1=\sigma_2$, $\nu_1=\nu_2$ рассматриваемое нами решение описывает одну уединенную волну, которая получилась из двух слившихся волн и движется как одно целое. Однако конфигурация получившейся волны сильно отличается от конфигураций исходных волн.

Ситуация меняется коренным образом, если $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)=0$. Рассмотрим сначала случай, когда $\sigma_1\neq\sigma_2$. Тогда при любом фиксированном t в области $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)\gg 1$ справедлива нулевая асимптотика, а в области $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)\ll -1$ имеем

$$u\sim\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1]},\tag{11}$$

$$\varphi\sim\hat{c}_1\frac{\exp[i\nu_1(x+2\nu_1 t)+i\tau_1 y]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t],$$

где

$$\delta_1=\frac{1}{2}\ln\alpha_1,\quad \hat{c}_1=c_1\exp(-\delta_1).$$

Далее, при любом фиксированном t в области $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)\gg 1$ выполняется нулевая асимптотика, а в области $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)\ll -1$ имеем

$$u\sim\frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2]},\tag{12}$$

$$\varphi\sim\hat{c}_2\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)+i\tau_2 y]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где

$$\delta_2=\frac{1}{2}\ln\alpha_2,\quad \hat{c}_2=c_2\exp(-\delta_2).$$

При этом согласно (5) справедливы равенства

$$|\hat{c}_1|^2=2(\sigma_1-\nu_1)\mu_1^2\varkappa,\quad |\hat{c}_2|^2=2(\sigma_2-\nu_2)\mu_2^2\varkappa,\tag{13}$$

аналогичные соотношению (3). Таким образом, если мы устремимся на плоскости x, y в бесконечность вдоль прямой $\mu_1(x+2\nu_1 t+2\sigma_1 y)+\delta_1=0$, то обнаружим, что при $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2>0$ наше решение имеет нулевую асимптотику, если $y\to\infty$, а при $y\to-\infty$ справедлива асимптотика (11). Наоборот, если $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2<0$, то, устремляясь в бесконечность вдоль этой же прямой, мы видим, что при $y\to-\infty$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а при $y\to\infty$

выполняется асимптотика (II). Аналогичным образом, устремляясь в бесконечность вдоль прямой $\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma_2 y)+\delta_2=0$, легко находим, что при $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$ наше решение имеет нулевую асимптотику, если $y\to\infty$, а при $y\to-\infty$ справедлива асимптотика (I2). Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1<0$, то, устремляясь в бесконечность вдоль только что упомянутой прямой, мы видим, что при $y\to-\infty$ наше решение имеет нулевую асимптотику, а при $y\to\infty$ выполняется асимптотика (I2). Отсюда следует, что при $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3^2-\omega_4^2)=0$ и $\sigma_1\neq\sigma_2$ рассматриваемое нами решение описывает процесс гашения одного солитона другим солитоном. Это явление было недавно обнаружено в работе /3/. Приведенное там решение получается из рассматриваемого здесь решения с помощью простого предельного перехода. Действительно, полагая $C_1=\omega_3=0$, мы видим, что согласно (5) справедливы равенства $\sigma_1=\nu_1$, $\delta_0=0$, а величина α_0, равная предельному значению величины α_1 при $C_1\to0$ и $\omega_3\to0$, может быть взята произвольно. Далее, беря $\omega_2^2=\bar\omega_4^2$, легко находим, что $\sigma_2=\tau_2=0$. Таким образом, в силу (4) выражения для функций D и ϕ принимают вид

$$D=1+\alpha_0\exp[2\mu_1x+4\mu_1\nu_1(y+t)]+\alpha_2\exp[2\mu_2(x+2\nu_2t)]+$$

$$+\gamma_0\exp[2\mu_1x+4\mu_1\nu_1(y+t)+2\mu_2(x+2\nu_2t)],$$

$$\phi=2C_2\left\{1+\alpha_0\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\bar\omega_1}\exp[2\mu_1x+4\mu_1\nu_1(y+t)]\right\}\times$$

$$\times\exp[\mu_2(x+2\nu_2t)]\exp[i\nu_2(x+2\nu_2t)-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

что с точностью до обозначений совпадает с приведенными в работе /3/ выражениями.

На основании (5) и (6) из равенств (I3) следует, что $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\nu_3\nu_4>0$. Далее, с помощью равенства $(\omega_1-\omega_2)\times(\omega_3^2-\omega_4^2)=0$ находим, что $(\mu_1-\mu_2)(\mu_3\nu_3-\mu_4\nu_4)=0$. Значит, справедливы неравенства $\mu_1\mu_2>0$, $\mu_3\mu_4\nu_3\nu_4>0$. Отсюда следует, что в рассматриваемой нами ситуации выполняется условие (6′), т.е. интересующее нас решение действительно не имеет особенностей при любых вещественных значениях x, y, t. Кроме того, в силу неравенства $\mu_1\mu_2>0$ из неравенства $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$ следует неравенство $(\sigma_2-\sigma_1)\mu_2<0$. Это значит, что если

$(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1>0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при

$$y\gg\frac{\mu_2\delta_1-\mu_1}{2(\sigma_2-\sigma_1)\mu_1\mu_2}-\frac{\nu_2-\nu_1}{\sigma_2-\sigma_1}t,$$

рассматриваемое нами решение имеет асимптотику (II), а в нижней полуплоскости, т.е. при

$$y\ll\frac{\mu_1\delta_2-\mu_2}{2(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1\mu_2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{\sigma_1-\sigma_2}t,$$

справедлива асимптотика (I2). Наоборот, если $(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1<0$, то в верхней полуплоскости, т.е. при

$$y\gg\frac{\mu_1\delta_2-\mu_2}{2(\sigma_1-\sigma_2)\mu_1\mu_2}-\frac{\nu_1-\nu_2}{\sigma_1-\sigma_2}t,$$

наше решение имеет асимптотику (I2), а в нижней полуплоскости, т.е. при

$$y\ll\frac{\mu_2\delta_1-\mu_1}{2(\sigma_2-\sigma_1)\mu_1\mu_2}-\frac{\nu_2-\nu_1}{\sigma_2-\sigma_1}t,$$

выполняется асимптотика (II). Таким образом, ненулевые асимптотики обеих волн всегда расположены по разные стороны от некоторой прямой, параллельной оси x.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $\omega_3^2=\omega_4^2$, $\sigma_1=\sigma_2$, а $\nu_1\neq\nu_2$. Положим $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$. Тогда при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении образуется бегущая волна вида

$$u=\frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1t+2\sigma y)+\delta_1]},\tag{14}$$

$$\varphi=\hat c_1\frac{\exp[i\nu_1(x+2\nu_1t)+i\tau_1y]}{ch[\mu_1(x+2\nu_1t+2\sigma y)+\delta_1]}\exp[-i(\mu_1^2+\nu_1^2)t],$$

где

$$\delta_1=\frac12\ln\alpha_1,\quad \hat c_1=c_1\exp(-\delta_1),$$

а при $(\nu_2-\nu_1)\mu_2<0$ эта волна появляется при $t\to\infty$. Кроме того, при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1>0$ и $t\to-\infty$ в нашем решении содержится вторая бегущая волна вида

$$u = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t + 2\sigma y)+\delta_2]},$$

$$\varphi = \hat{c}_2 \frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)+i\tau_2 y]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t+2\sigma y)+\delta_2]} \exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t], \tag{I5}$$

где

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\ln\alpha_2, \quad \hat{c}_2 = c_2\exp(-\delta_2),$$

а при $(\nu_1-\nu_2)\mu_1 < 0$ эта волна появится при $t\to\infty$. В силу неравенства $\mu_1\mu_2 > 0$ отсюда следует, что если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 > 0$, то при $t\to-\infty$ наше решение имеет асимптотику (I4), а при $t\to\infty$ справедлива асимптотика (I5). Наоборот, если $(\nu_2-\nu_1)\mu_2 < 0$, то при $t\to-\infty$ выполняется асимптотика (I5), а асимптотика (I4) имеет место при $t\to\infty$. Таким образом, в рассматриваемой сейчас ситуации наше решение описывает эволюцию солитона (I4) в солитон (I5) и наоборот. В процессе эволюции происходит изменение параметров солитона. При этом в силу равенств

$$|\hat{c}_1|^2 = 2(\sigma-\nu_1)\mu_1^2\varkappa, \quad |\hat{c}_2|^2 = 2(\sigma-\nu_2)\mu_2^2\varkappa$$

выполняются соотношения

$$\nu_1 = \sigma - \frac{\varkappa|\hat{c}_1|^2}{2\mu_1^2}, \quad \nu_2 = \sigma - \frac{\varkappa|\hat{c}_2|^2}{2\mu_2^2}, \tag{I6}$$

из которых следует, что величины μ_1^2, μ_2^2, $|\hat{c}_1|$, $|\hat{c}_2|$ могут принимать любые положительные значения. Предположим, что эти величины выбраны так, что выполняется условие $\mu_1^2|\hat{c}_2|^2 \neq \mu_2^2|\hat{c}_1|^2$. Пусть, далее, ζ_1 и ζ_2 равны соответственно меньшей и большей из величин $\frac{\varkappa|\hat{c}_1|^2}{2\mu_1^2}$ и $\frac{\varkappa|\hat{c}_2|^2}{2\mu_2^2}$. Тогда из равенств (I6) следует, что если σ лежит вне интервала (ζ_1,ζ_2), то справедливо неравенство $\nu_1\nu_2 > 0$. В противном случае, т.е. при $\sigma\in(\zeta_1,\zeta_2)$, имеем $\nu_1\nu_2 < 0$. Это значит, что если $\sigma\,\bar{\in}\,(\zeta_1,\zeta_2)$, то солитоны (I4) и (I5) движутся в одном и том же направлении, если же $\sigma\in(\zeta_1,\zeta_2)$,

то солитоны (I4) и (I5) движутся в прямо противоположных направлениях. Таким образом, при $\sigma\,\bar{\in}\,(\zeta_1,\zeta_2)$ рассматриваемое нами решение описывает такую перестройку одного солитона в другой, при которой сохраняется направление движения. Наоборот, при $\sigma\in(\zeta_1,\zeta_2)$ наше решение описывает перестройку, при которой происходит изменение направления движения солитона на прямо противоположное, т.е. солитон как бы отражается.

Здесь уместно заметить, что столь необычное поведение решений системы (I) тесно связано с определенными свойствами используемого для интегрирования этой системы линейного дифференциального оператора. Детальному изучению этой связи будет посвящена отдельная работа.

Литература

I. **Mel'nikov V.K.-Lett.Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.129-136.**

2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-724, Дубна, I986.

3. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-234, Дубна, I986.

Рукопись поступила в издательский отдел
I8 декабря I986 года.

Мельников В.К. Р2-86-819
Эволюция солитонов в нелинейной интегрируемой системе

В нелинейной интегрируемой системе найдены решения, которые при $t \to \pm\infty$ имеют асимптотики односолитонных решений. Однако наборы существенных параметров этих солитонов разные, т.е. указанные решения описывают эволюцию солитона с одним набором параметров в солитон с другим набором параметров. Излагаемые результаты получены с помощью метода обратной задачи рассеяния и имеют тесную связь с рядом проблем гидродинамики, физики плазмы и т.д.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-86-819
Evolution of Solitons in a Nonlinear Integrable System

Solutions with asymptotics of the one-soliton type as $t \to -\infty$ and $t \to \infty$ are found in a nonlinear integrable system. However, sets of essential parameters of these solitons are different, i.e. solutions describe evolution of a soliton with one set of parameters into a soliton with another set of parameters. The results presented here are obtained by the scattering method and are relevant to some problems of hydrodynamics, plasma physics, etc.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986