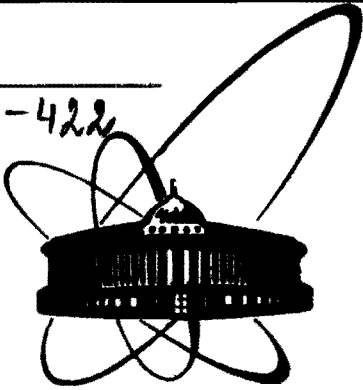


**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**



P2-86-798

К.В.Рерих

О СТРУКТУРЕ ПОЛЮСОВ НОВОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1986

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно /1/, широкий класс уравнений Чу-Лоу /2/ и им подобных, отличающихся от последних по существу только матрицей кроссинг-симметрии, допускает формулировку их в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений /1.3/:

$$S_i(-w) = \sum_j A_{ij} S_j(w), S_i(w+1) = 1/\sum_j A_{ij} S_j(w). \quad /1/$$

Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S -матрицы в состояниях i , A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $n \times n$ со свойствами $A^2 = E$, $\sum_j A_{ij} = 1$. Решения системы /1/ должны быть мероморфными действительными функциями униформизирующей переменной $w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$, где ω - энергия пиона в лабораторной системе.

Ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных разностных уравнений система /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, на решение которой были направлены многолетние исследования ряда авторов /см. ссылки, например, в /3,5,6/.

Особое место в методическом отношении принадлежит системе /1/ с матрицей $A(1,1)$:

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad /2/$$

для которой в /4/ были найдены помимо известных ранее /1/ решений, являющихся рациональными функциями w , также решения, которые являются рациональными функциями $e^{\lambda w}$, где $\lambda = \text{const}$. В предыдущей работе /6/ были найдены преобразования, приводящие уравнения /1/ с матрицей /2/ к весьма простому виду, что позволило найти новые частные решения в виде ряда по переменной $z = e^{\lambda w}$, коэффициенты которого задаются рекуррентным соотношением. Этот ряд сходится в некоторой окрестности начала координат в плоскости z . В настоящей работе установлено, что в плоскости z новое решение является мероморфной функцией с точкой сгущения полюсов на бесконечности, и получено для него разложение на простейшие дроби. Эти полюса расположены при значениях $z = -|z_i| \lambda^k$, где

$k = 1, 2, \dots, \infty$, а $z_i (i = 1, 2, \dots, \infty)$ есть корни трансцендентного уравнения $v_1(z) + 1 = 0$. В приложении дан алгоритм вычисления найденных решений для произвольных значений z /вне области сходимости рядов/. Обсуждаются свойства новых решений и их графическое представление.

2. СТРУКТУРА ПОЛЮСОВ НОВОГО РЕШЕНИЯ

Введем /7/ вместо искомых функций $S_i(w)$ функции определенной четности по w $x(w)$, $y(w)$ и $t(w)$ согласно

$$S_i(w) = (\xi_i + \eta_i y(w) + \mu_i x(w)) / t(w), \quad /3/$$

$$x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w), \quad t(-w) = t(w),$$

где ξ, η, μ - собственные векторы матрицы $A(2)$,

$$A(\xi, \eta) = (\xi, \eta), \quad A\mu = -\mu, \quad \xi = (1, 1, 1), \quad \eta = \left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \mu = (-4, -2, 2). \quad /4/$$

Система уравнений /1/ распадается на систему нелинейных разностных уравнений для $x(w)$ и $y(w)$ и уравнение для $t(w)$:

$$x' = F_1(x, y) / D(x, y), \quad F_1(x, y) = x + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2,$$

$$y' = F_2(x, y) / D(x, y), \quad F_2(x, y) = -y + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2,$$

$$D(x, y) = 1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2 /1'/$$

$$x' = x(w+1), \quad y' = y(w+1), \quad x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w),$$

$$t' \cdot t = \left(1 - \frac{5}{4}y + 2x\right) \left(1 - \frac{5}{4}y' - 2x'\right), \quad t' = t(w+1), \quad t(-w) = t(w),$$

которое ввиду зависимости его от $x(w)$ и $y(w)$ целесообразно рассматривать при найденных полностью функциях $x(w)$ и $y(w)$.

Следуя /6/, сделаем замену искомых функций $x(w)$ и $y(w)$ на $u_1(w)$ и $u_2(w)$ /см. рис. 1/:

$$u_1 = \frac{1}{2(\lambda+1)} \left(\frac{\lambda^2-1}{2\lambda} v + u \right), \quad u = \frac{x(y-4)}{y^2-4x^2},$$

$$u_2 = \frac{1}{2(\lambda+1)} \left(\frac{\lambda^2-1}{2\lambda} v - u \right), \quad v = \frac{y(\dot{y}-4)}{y^2-4x^2}, \quad /5/$$

где $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ есть корень уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Инвариантные относительно преобразований /1'/ кривые $y - x^2 = 0$ и $y - 4 = 0$, приведенные на рис. 1, соответствуют частным решениям из /1/ и /4/,

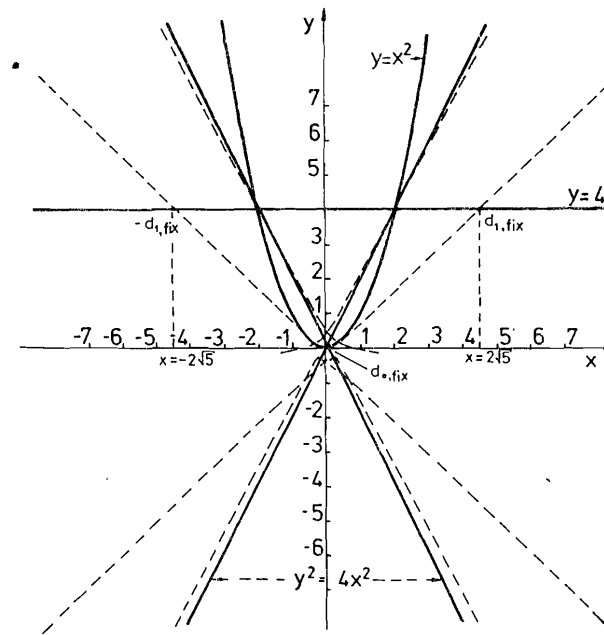


Рис. 1. Инвариантные кривые $y - x^2 = 0$, $y - 4 = 0$, $y^2 - 4x^2 = 0$, штриховая кривая - новое решение $d_{0,fix}$, $\pm d_{1,fix}$ - неподвижные точки /1'//.

а кривая $y^2 - 4x^2 = 0$ распадается на пару прямых, которые под действием /1' / отображаются друг в друга. Следующие из /1/-/4/ уравнения для $u_1(w)$ и $u_2(w)$ имеют теперь весьма простой вид:

$$u_1(w+1) = \frac{\lambda u_1 - u_2(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2}, \quad u_2(w+1) = \frac{\lambda^{-1} u_2 - u_1(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2} /6/$$

Благодаря этому в /6/ были получены два новых частных решения, из которых ниже ввиду их подобия мы рассмотрим первое. Оно имеет вид

$$u_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{a_k}{\sqrt{\lambda}^{k+1}} z^k(w), \quad /7/$$

$$u_2(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\lambda(\lambda^{k-1} - 1)a_k}{(\lambda^{k+1} - 1)\sqrt{\lambda}^{k+1}} z^k(w),$$

где $z(w) = \exp(\ln \lambda \cdot w)$, а числа a_k определяются через a_1 рекуррентным соотношением /в /6/ и ниже мы выбрали $a_1 = 1$ /:

$$a_k = \frac{(\lambda-1)(\lambda^2-1)(\lambda^k-1)}{(\lambda^{k-1}-1)} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{a_m a_{k-m} \lambda^{m-1}}{(\lambda^{k-m+1}-1)(\lambda^{m+1}-1)} /8/$$

Напомним /6/, что второе решение легко получается из /7/ в результате замены:

$$u_1^{\text{II}} = u_2^{\text{I}}(z_2), \quad u_2^{\text{II}} = u_1^{\text{I}}(z_2), \quad z(w) \rightarrow z_2(w) = \exp(-(\ln \lambda) \cdot w).$$

Разложения /7/ сходятся /6/ в области $|z| < \sqrt{\lambda}$. Сделаем ради удобства замену:

$$v_1 = \lambda u_1 - u_2, \quad v_2 = \lambda u_2 - u_1. \quad /9/$$

Тогда уравнения /6/ для решения /7/ примут вид

$$v_1(\lambda z) = \frac{3v_1(z) + v_2(z) - v_2(z)v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_2(\lambda z) = -v_1(z). \quad /10/$$

Функция $v_1(z)$ внутри области $|z| < \sqrt{\lambda}$ задана, как это следует из /7/-/9/, рядом

$$v_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{\lambda}^{k-1} (\lambda^2 - 1)}{(\lambda^{k+1} - 1)} a_k z^k. \quad /11/$$

Поскольку все $a_k > 0$ и, как показывает расчет на ЭВМ, $a_{k+1} < a_k$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = q$, где $q \approx 1,028511$, это означает, что $v_1(z)$ при отрицательных z строго отрицательна, монотонно убывая от нуля при $z=0$ до $-\infty$ при $z = z_1 \lambda$, где $z_1 = -\frac{q}{\sqrt{\lambda}} \approx -0,635655$.

Согласно /10/ это означает, что z_1 является простым корнем уравнения $v_1(z) + 1 = 0$, а $z_1 \lambda$ - простым полюсом $v_1(z)$. Анализируя /10/, можно установить, что при $z = z_1 \lambda^{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $v_1(z)$ будет иметь простые полюса. Поскольку $v_1(z)$ в интервале $(z_1 \lambda^{2k+1}, z_1 \lambda^{2k-1})$ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то это означает, что имеется бесконечная серия корней z_i уравнения

$$v_1(z_i) + 1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad /12/$$

В соответствии с /10/ каждый корень z_i порождает бесконечную серию полюсов функции $v_1(z)$ при $z = z_i \lambda^{2k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, и $v_2(z)$ при $z = z_i \lambda^{2k}$. Из /10/ следует, что

$$v_2(z) = -v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right), \quad /13/$$

а $v_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$v_1(\lambda^2 z) + v_1(z) + (v_1(\lambda^2 z) - v_1(z) - 3) v_1(\lambda z) = 0. \quad /14/$$

Будем искать решение /14/ в виде

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{1,k,i} \phi_{k,i}(z), \quad /15/$$

где

$$\phi_{k,i}(z) = \frac{1}{z - z_i \lambda^{2k-1}} + \frac{1}{z_i \lambda^{2k-1}}$$

есть простейшие дроби. Подставляя разложение /15/ в /14/, получим уравнения на коэффициенты $v_{1,k,i}$ / $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ /:

$$v_{1,k+1,i} = \lambda^2 v_{1,k,i} \frac{v_1(z_i \lambda^{2k}) - 1}{v_1(z_i \lambda^{2k}) + 1}, \quad /16/$$

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) - v_1(z_i \lambda^{2k-2}) - 3 = 0, \quad /17/$$

$$v_1(z_i) = -1. \quad /18/$$

Решая рекуррентное соотношение /17/ с учетом /18/, получим

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) = 3k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots \quad /19/$$

Подставляя /19/ в /16/, находим коэффициенты $v_{1,k,i}$:

$$v_{1,k,i} = \lambda^{2(k-1)} v_{1,1,i} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)}. \quad /20/$$

Подставляя /20/ в /15/ и вводя обозначения

$$b_i = \frac{v_{1,1,i} \gamma}{\lambda z_i}, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)} \cdot \frac{1}{\lambda^{2k-1} - 1} \approx 0,63976,$$

получим для $v_1(z)$:

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_i}{\gamma} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)} \frac{z}{z - z_i \lambda^{2k-1}}. \quad /21/$$

Выражая вычеты в полюсах $v_1(z)$ при $z = z_i \lambda / k = 1/$, с одной стороны, через значения $v_1(\frac{z_i}{\lambda})$ и $v_1'(z_i)$, а с другой - через коэффициенты b_i из /21/, получим

$$b_i = - \frac{3 + 2v_1\left(\frac{z_i}{\lambda}\right)}{v_1'(z_i)z_i} \quad /22/$$

Дифференцируя /10/, получим связь производной $v_1'(\lambda z)$ со значениями $v_1(z)$, $v_1'(z)$, $v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)$ и $v_1'\left(\frac{z}{\lambda}\right)$:

$$v_1'(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_1'\left(\frac{z}{\lambda}\right)[v_1^2(z) - 1] + \lambda v_1'(z)[3 + 2v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right)]}{[1 + v_1(z)]^2} \quad /23/$$

При малых значениях z из области сходимости $|z| < \sqrt{\lambda} q$ $v_1(z)$ и $v_1'(z)$ можно вычислить с нужной точностью с помощью ряда /11/, учитывая соответствующее количество членов.

Вычислив с помощью ряда /11/ значения $v_1(z)$ и $v_1'(z)$ в двух точках z и z/λ и используя итерации /10/ и /23/ нужное число раз, мы можем определить путем поиска корни z_i и коэффициенты b_i согласно /22/ (см. приложение).

Расчет на ЭВМ дает для первых 4 значений z_i и b_i следующие приближенные значения: $z_1 \approx -0,635655$, $z_2 \approx -9,4125$, $z_3 \approx -21,326$, $z_4 \approx -53,622$, $b_1 \approx 0,98123$, $b_2 \approx 0,34288$, $b_3 \approx 0,0832$, $b_4 \approx 0,0212$. Остальные корни расположены при больших отрицательных значениях z и имеют точку сгущения на бесконечности. При положительных значениях z $v_1(z)$ положительна. В приложении обсуждаются свойства многозначной функции $v_2(z) = f(v_1(z))$ /см. рис. 2, где приведены несколько первых ветвей $460 < z < +\infty$ /, обсуждаются свойства и вид кривой в плоскости x, y /см. также рис. 1/.

Окончательно для $u_1(z)$ и $u_2(z)$ в соответствии с /9/, /13/ и /21/ имеем

$$u_1(z) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\lambda v_1(z) - v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right) \right], \quad u_2(z) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[-\lambda v_1\left(\frac{z}{\lambda}\right) + v_1(z) \right],$$

так что $u_1(z)$ и $u_2(z)$ имеют полюса при $z = -|z_i|\lambda^k$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

Поскольку $z = \exp(\ln \lambda \cdot w)$, то в плоскости w этим полюсам соответствуют полюса при

$$w = k + \frac{\ln |z_i|}{\ln \lambda} \pm \frac{i\pi(2m - 1)}{\ln \lambda}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Автор глубоко благодарен академику Н.Н.Боголюбову за поддержку. Автору также приятно поблагодарить М.И.Граева, В.Г.Кадышевского, И.М.Кричевера, Е.П.Жидкова и Б.Н.Хоромского за полезные обсуждения.

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_{1,k,i} \phi_{k,i}(z), \quad /15/$$

где

$$\phi_{k,i}(z) = \frac{1}{z - z_i \lambda^{2k-1}} + \frac{1}{z_i \lambda^{2k-1}}$$

есть простейшие дроби. Подставляя разложение /15/ в /14/, получим уравнения на коэффициенты $v_{1,k,i}$ / $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ /:

$$v_{1,k+1,i} = \lambda^2 v_{1,k,i} \frac{v_1(z_i \lambda^{2k}) - 1}{v_1(z_i \lambda^{2k}) + 1}, \quad /16/$$

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) - v_1(z_i \lambda^{2k-2}) - 3 = 0, \quad /17/$$

$$v_1(z_i) = -1. \quad /18/$$

Решая рекуррентное соотношение /17/ с учетом /18/, получим

$$v_1(z_i \lambda^{2k}) = 3k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots \quad /19/$$

Подставляя /19/ в /16/, находим коэффициенты $v_{1,k,i}$:

$$v_{1,k,i} = \lambda^{2(k-1)} v_{1,1,i} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)}. \quad /20/$$

Подставляя /20/ в /15/ и вводя обозначения

$$b_i = \frac{v_{1,1,i} \gamma}{\lambda z_i}, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)} \cdot \frac{1}{\lambda^{2k-1} - 1} \approx 0,63976,$$

получим для $v_1(z)$:

$$v_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_i}{\gamma} \frac{\Gamma(k - \frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(k)} \frac{z}{z - z_i \lambda^{2k-1}}. \quad /21/$$

Выражая вычеты в полюсах $v_1(z)$ при $z = z_i \lambda / k = 1/$, с одной стороны, через значения $v_1\left(\frac{z_i}{\lambda}\right)$ и $v_1'(z_i)$, а с другой - через коэффициенты b_i из /21/, получим

$$b_i = - \frac{3 + 2v_1(\frac{z_i}{\lambda})}{v_1'(\frac{z_i}{\lambda}) z_i} \quad /22/$$

Дифференцируя /10/, получим связь производной $v_1'(\lambda z)$ со значениями $v_1(z)$, $v_1'(z)$, $v_1(\frac{z}{\lambda})$ и $v_1'(\frac{z}{\lambda})$:

$$v_1'(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{v_1'(\frac{z}{\lambda}) [v_1^2(z) - 1] + \lambda v_1'(z) [3 + 2v_1(\frac{z}{\lambda})]}{[1 + v_1(z)]^2} \quad /23/$$

При малых значениях z из области сходимости $|z| < \sqrt{\lambda} q$ $v_1(z)$ и $v_1'(z)$ можно вычислить с нужной точностью с помощью ряда /11/, учитывая соответствующее количество членов.

Вычислив с помощью ряда /11/ значения $v_1(z)$ и $v_1'(z)$ в двух точках z и z/λ и используя итерации /10/ и /23/ нужное число раз, мы можем определить путем поиска корни z_i и коэффициенты b_i согласно /22/ (см. приложение).

Расчет на ЭВМ дает для первых 4 значений z_i и b_i следующие приближенные значения: $z_1 \approx -0,635655$, $z_2 \approx -9,4125$, $z_3 \approx -21,326$, $z_4 \approx -53,622$, $b_1 \approx 0,98123$, $b_2 \approx 0,34288$, $b_3 \approx 0,0832$, $b_4 \approx 0,0212$. Остальные корни расположены при больших отрицательных значениях z и имеют точку сгущения на бесконечности. При положительных значениях z $v_1(z)$ положительна. В приложении обсуждаются свойства многозначной функции $v_2(z) = f(v_1(z))$ /см.рис.2, где приведены несколько первых ветвей $-60 < z < +\infty$ /, обсуждаются свойства и вид кривой в плоскости x, y /см. также рис. 1/.

Окончательно для $u_1(z)$ и $u_2(z)$ в соответствии с /9/, /13/ и /21/ имеем

$$u_1(z) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} [\lambda v_1(z) - v_1(\frac{z}{\lambda})], \quad u_2(z) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} [-\lambda v_1(\frac{z}{\lambda}) + v_1(z)],$$

так что $u_1(z)$ и $u_2(z)$ имеют полюса при $z = -|z_i| \lambda^k$, $i = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

Поскольку $z = \exp(\ln \lambda \cdot w)$, то в плоскости w этим полюсам соответствуют полюса при

$$w = k + \frac{\ln |z_i|}{\ln \lambda} \pm \frac{i\pi(2m-1)}{\ln \lambda}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Автор глубоко благодарен академику Н.Н.Боголюбову за поддержку. Автору также приятно поблагодарить М.И.Граева, В.Г.Кадышевского, И.М.Кричевера, Е.П.Жидкова и Б.Н.Хоромского за полезные обсуждения.

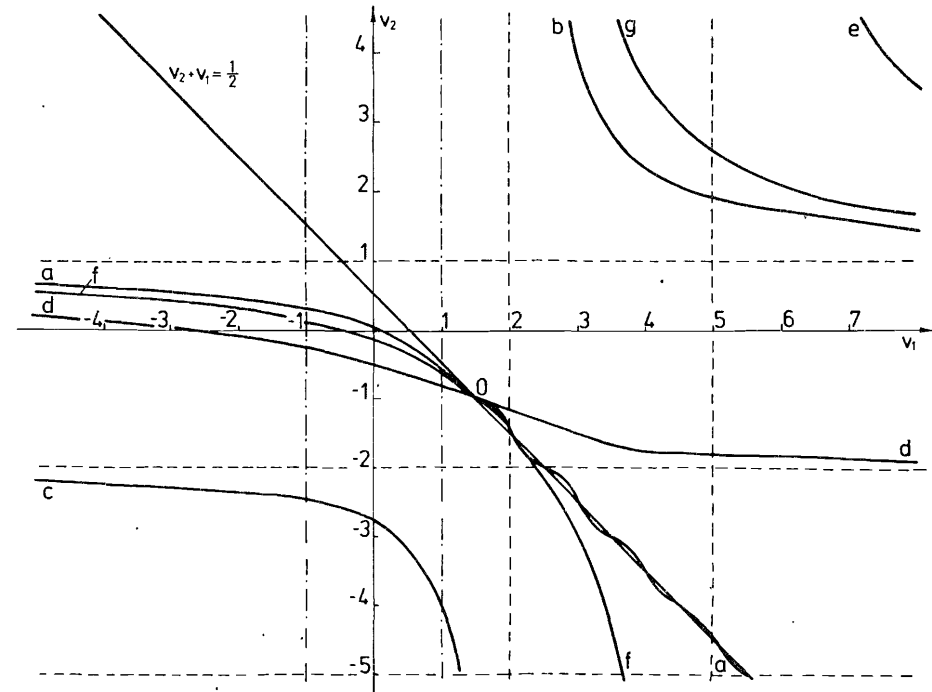


Рис. 2. График функции $v_2 = f(v_1)$. Отражены первые ветви ($z > z_3 \lambda$). Условные обозначения: а, b, c, d, e, f, g - ветви кривой, ----- - асимптоты ветвей $v_2 = -3k + 4$, $v_1 = 3k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, - - - - - прямые $v_1 = \pm 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим через $v = (\frac{v_1}{v_2})$ двумерный вектор. Тогда преобразование /10/ представим в символическом виде:

$$v(\lambda z) = T v(z) \quad /П.1/$$

Для k степени преобразования /П.1/ имеем

$$v(\lambda^k z) = T^k v(z) \quad /П.2/$$

Тогда для любого z мы можем указать такое k и $z_k = \frac{z}{\lambda^k}$, что $|\dot{z}_k| \leq \epsilon \sqrt{\lambda}$, где $\epsilon < 1$ (мы полагаем $\epsilon = 1/4$). Тогда, учитывая в разложении /11/ первые N членов /мы ограничиваемся $N = 20$ /, мы получим значения $v_1(z_k)$ и $v_2(z_k) = -v_1(\frac{z_k}{\lambda})$ с абсолютной по-

грешностью $|\Delta v_1(z_k)| \leq (\frac{1}{4})^{2k}$. Применяя к вычисленным значениям $v_1(z_k) / i = 1,2/$, преобразование /П.2/, мы получим с высокой степенью точности значения $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Это позволяет получить весьма точное представление о виде кривой $v_2 = f(v_1)$, параметрически заданной разложением /11/ и соотношением /13/. На рис. 2 приведены несколько ветвей многозначной функции $v_2 = f(v_1)$, которые соответствуют значениям параметра z из области $(z_3 \lambda < z < +\infty)$. Остановимся на свойствах этой кривой при $z > 0$. Рассмотрим функцию

$$\phi(z) = v_1(z) + v_2(z) - \frac{1}{2}. \quad /П.3/$$

Тогда $\phi(z), v_1(z)$ подчиняются уравнениям

$$\phi(\lambda z) = \phi(z) \frac{1 - v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_1(\lambda z) = \phi(\lambda z) + v_1(z) + \frac{1}{2}. \quad /П.4/$$

Отсюда следует $\phi(0) = -\frac{1}{2}$, так как $v_1(0) = v_2(0) = 0$

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - v_1(\frac{z}{\lambda^k})}{1 + v_1(\frac{z}{\lambda^k})}. \quad /П.5/$$

Расчет на ЭВМ дает, что при $z = z_0^* = \frac{5,4874}{\lambda} v_1(z_0^*) = 1$. Тогда из /П.5/, /П.4/ и монотонности $v_1(z)$ при $z > 0$ следует, что

$$\phi(\lambda^m z_0^*) = 0, \quad v_1(\lambda^m z_0^*) = 1 + \frac{1}{2}m, \quad m \geq 1. \quad /П.6/$$

Из /П.5/ имеем

$$\phi(z \lambda^m) = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} \phi(z). \quad /П.7/$$

Так как $v_1(z) > 1$ при $z > z_0^*$, то для $z \in (z_0^*, z_0^* \lambda)$

$$\text{sgn } \phi(z \lambda^m) = (-1)^m \text{sgn } \phi(z). \quad /П.8/$$

Так как функция $\phi(z) 0 < z < z_0^* \lambda$ отрицательна, то согласно /П.8/ при $z > z_0^* \lambda$ она будет осциллировать. Амплитуда этих осцилляций будет стремиться к нулю. Действительно, так как $\frac{x-1}{x+1} > \frac{y-1}{y+1}$, если $x > y (x, y > 0)$, то

$$\frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} < \frac{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) - 1}{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) + 1} = \frac{k+1}{k+5}, \quad z \in (z_0^*, z_0^* \lambda). \quad /П.9/$$

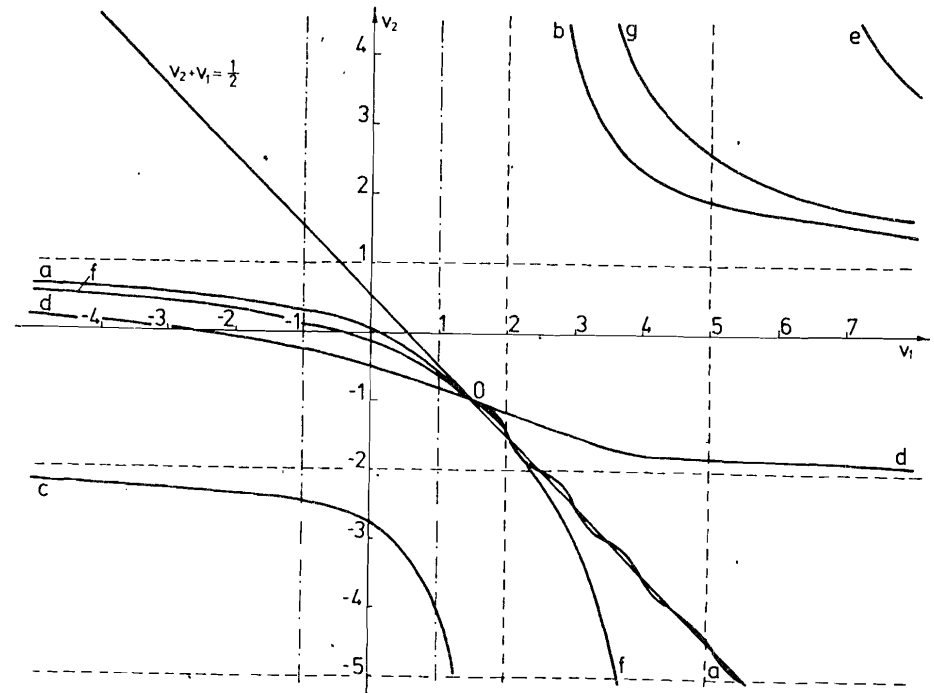


Рис. 2. График функции $v_2 = f(v_1)$. Отражены первые ветви ($z > z_3 \lambda$). Условные обозначения: a, b, c, d, e, f, g - ветви кривой, - - - - - асимптоты ветвей $v_2 = -3k+4, v_1 = 3k-1, k = 1, 2, \dots, \infty$, - · - · - прямые $v_1 = \pm 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим через $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ двумерный вектор. Тогда преобразование /10/ представим в символическом виде:

$$v(\lambda z) = T v(z). \quad /П.1/$$

Для k степени преобразования /П.1/ имеем

$$v(\lambda^k z) = T^k v(z). \quad /П.2/$$

Тогда для любого z мы можем указать такое k и $z_k = \frac{z}{\lambda^k}$, что $|z_k| \leq \epsilon \sqrt{\lambda}$, где $\epsilon < 1$ (мы полагаем $\epsilon = 1/4$). Тогда, учитывая в разложении /11/ первые N членов /мы ограничиваемся $N = 20/$, мы получим значения $v_1(z_k)$ и $v_2(z_k) = -v_1(\frac{z_k}{\lambda})$ с абсолютной по-

грешностью $|\Delta v_1(z_k)| \leq (\frac{1}{4})^{2k}$. Применяя к вычисленным значениям $v_1(z_k) / i = 1, 2, \dots$, преобразование /П.2/, мы получим с высокой степенью точности значения $v_1(z)$ и $v_2(z)$. Это позволяет получить весьма точное представление о виде кривой $v_2 = f(v_1)$, параметрически заданной разложением /11/ и соотношением /13/. На рис. 2 приведены несколько ветвей многозначной функции $v_2 = f(v_1)$, которые соответствуют значениям параметра z из области $(z_3 \lambda < z < +\infty)$. Остановимся на свойствах этой кривой при $z > 0$. Рассмотрим функцию

$$\phi(z) = v_1(z) + v_2(z) - \frac{1}{2}. \quad /П.3/$$

Тогда $\phi(z), v_1(z)$ подчиняются уравнениям

$$\phi(\lambda z) = \phi(z) \frac{1 - v_1(z)}{1 + v_1(z)}, \quad v_1(\lambda z) = \phi(\lambda z) + v_1(z) + \frac{1}{2}. \quad /П.4/$$

Отсюда следует $\phi(0) = -\frac{1}{2}$, так как $v_1(0) = v_2(0) = 0$

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - v_1(\frac{z}{\lambda^k})}{1 + v_1(\frac{z}{\lambda^k})}. \quad /П.5/$$

Расчет на ЭВМ дает, что при $z = z_0^* = \frac{5,4874}{\lambda} v_1(z_0^*) = 1$. Тогда из /П.5/, /П.4/ и монотонности $v_1(z)$ при $z > 0$ следует, что

$$\phi(\lambda^m z_0^*) = 0, \quad v_1(\lambda^m z_0^*) = 1 + \frac{1}{2}m, \quad m \geq 1. \quad /П.6/$$

Из /П.5/ имеем

$$\phi(z \lambda^m) = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} \phi(z). \quad /П.7/$$

Так как $v_1(z) > 1$ при $z > z_0^*$, то для $z \in (z_0^*, z_0^* \lambda)$

$$\text{sgn } \phi(z \lambda^m) = (-1)^m \text{sgn } \phi(z). \quad /П.8/$$

Так как функция $\phi(z) 0 < z < z_0^* \lambda$ отрицательна, то согласно /П.8/ при $z > z_0^* \lambda$ она будет осциллировать. Амплитуда этих осцилляций будет стремиться к нулю. Действительно, так как $\frac{x-1}{x+1} > \frac{y-1}{y+1}$, если $x > y (x, y > 0)$, то

$$\frac{v_1(z \lambda^k) - 1}{v_1(z \lambda^k) + 1} < \frac{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) - 1}{v_1(z_0^* \lambda^{k+1}) + 1} = \frac{k+1}{k+5}, \quad z \in (z_0^*, z_0^* \lambda). \quad /П.9/$$

Тогда из /П.7/ и /П.9/ следует

$$\left| \frac{\phi(z \lambda^m)}{\phi(z)} \right| \leq \prod_{k=0}^{m-1} \frac{k+1}{k+5} = \frac{4!}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}. \quad /П.10/$$

Таким образом, амплитуда осцилляции при $m \rightarrow \infty$ быстро стремится к нулю. Пусть $z_i^* / i = 1, \dots, \infty$ - корни /отрицательные/ уравнения $v_1(z) - 1 = 0$. При $z > 0$ ввиду монотонности $v_1(z)$ есть только один корень z_0^* . Тогда при $z = z_i^* \lambda^m / m = 1, 2, \dots, \infty$ /согласно /П.4/ $\phi(z_i^* \lambda^m) = 0$,

$$v_1(z_i^* \lambda^m) = 1 + \frac{1}{2}m.$$

Таким образом, для функции $v_2 = f(v_1)$ точки пересечения этой кривой с прямой $v_1 + v_2 = \frac{1}{2} / \phi = 0$, $v_1 = 1 + \frac{1}{2}m$, $v_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}m$ являются точками самопересечения этой многозначной кривой, причем для каждого $m = 1, 2, \dots, \infty$ существует бесконечное число самопересечений $(i = 1, 2, \dots, \infty)$ /см. рис. 2/. Заметим, что второму решению соответствует кривая, которая получается заменой $v_2 \rightarrow v_1$: $v_1 = f(v_2)$. Интересно обсудить свойства этих решений в плоскости x, y . Согласно /5/, /24/ $x(z)$ и $y(z)$ можно выразить через функцию $v_1(z)$:

$$x(z) = \epsilon : \frac{2[v_1(z) + v_1(\frac{z}{\lambda})]}{v_1(z) - v_1(\frac{z}{\lambda}) + 8v_1(z)v_1(\frac{z}{\lambda})}, \quad /П.11/$$

$$y(z) = \frac{4[v_1(z) - v_1(\frac{z}{\lambda})]}{v_1(z) - v_1(\frac{z}{\lambda}) + 8v_1(z)v_1(\frac{z}{\lambda})},$$

где $\epsilon = 1$ для 1-го решения, $\epsilon = -1$ для 2-го решения. Это параметрическое задание кривой в плоскости x, y /см. рис. 1/. При $z > 0$ кривая выходит из неподвижных точек $y = 4$, $x = \pm 2\sqrt{5}$ и при $z = z_0^* \lambda^k / k = 1, 2, \dots, \infty$ /пересекает параболу $y = x^2$ в точках

$$x = \pm \frac{2}{2k+3}, \quad y = \left(\frac{2}{2k+3}\right)^2, \quad /П.12/$$

осциллируя вокруг нее затухающим образом, асимптотически приближаясь к точке $y = x = 0$. На рис. 1 указана только первая точка пересечения $k = 1$. При $z < 0$ кривая устремляется на бесконечность при $z_1 = -0,2023$ /знаменатель в /П.11/ обращается в нуль/ вдоль асимптот $y = \pm 0,9547x$, затем вдоль тех же асимптот стремится к точкам

$$x(z_i \lambda^{2k+1}) = \pm \frac{2}{24k-7}, \quad y(z_i \lambda^{2k+1}) = \frac{4}{24k-7} \quad /П.13/$$

/i = 1, k = 0/ на прямых $y = \pm 2x$, пересекая потом их в точках
/i = 1, k = 1/

$$x(z_i \lambda^{2k}) = \mp \frac{2}{24k-9}, \quad y(z_i \lambda^{2k}) = -\frac{4}{24k-9} \quad /П.14/$$

Затем вдоль асимптот $y \approx -1,84x$ стремится к $y = -\infty$, $x = \pm \infty$ при $\bar{z}_2 = -8,3775$ и потом $+$ вдоль этих асимптот, выходя из точек $y = +\infty$, $x = \mp \infty$ /, пересекает параболу в точках $x = -2$, $y = 4$, прямые $y = \pm 2x$ в точках /П.13/ ($i = 1$, $k = 1$) и т.д. При дальнейшем абсолютном увеличении $z \rightarrow -\infty$ кривая будет бесконечное число раз /i = 1, 2, ..., ∞ / пересекать параболу и прямые $y = \pm 2x$ в точках /П.12/, /П.13/ и /П.14/ для каждого значения $k = 1, 2, \dots, \infty$, асимптотически приближаясь к началу координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков В.А. ОИЯИ, P-2369, Дубна, 1965.
2. Chew G.F., Low F.E. - Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
3. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. - Ann. of Phys., 1970, 59, p.408.
4. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. - ЯФ, 1968, 10, с.168.
5. Rerikh K.V. - In: Proceedings of the XIII International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics. Shumen, Bulgaria, 1984, World Scientific, 1986, p.170-178.
6. Рерих К.В. ОИЯИ, P2-85-725, Дубна, 1985; - In: Proceedings of the XIX International Symposium. Ahrenshoop, DDR, 1985, p.236-247.
7. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ОИЯИ, P2-7976, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 декабря 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжёлых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
D1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Рерих К.В.

P2-86-798

О структуре полюсов нового решения уравнений типа уравнений Чу-Лоу

Исследуется структура нового решения уравнений типа уравнений Чу-Лоу, полученного ранее автором в виде рядов по степеням $z = e^{\ln \lambda w}$, сходящихся в некоторой окрестности начала координат в плоскости z . Показано, что эти ряды представляют трансцендентные мероморфные функции z , имеющие бесконечные серии простых полюсов в точках $z = z_i \lambda^k$, где z_i есть корни некоторого уравнения. Указана процедура численного нахождения корней и вычетов в полюсах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Roerich C.V.

P2-86-798

About the Pole Structure of a New Solution of Chew-Low-Type Equations

The structure is studied of a new solution of Chew-Low-type equations earlier obtained as series in powers of $z = e^{\ln \lambda w}$ convergent in a vicinity of the coordinate origin in the plane z . It is shown that these series are transcendental meromorphic functions of z with an infinite number of simple poles at points $z = z_i \lambda^k$ where z_i are roots of a certain equation. The procedure of determining roots and residues at poles is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986