86-724

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-724

В.К.Мельников

О ПРЯМОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x,y

Направлено в журнал "Известия АН СССР, серия математическая"

1986

Применение метода обратной задачи к исследованию различных нелинейных процессов за прошедшие два десятилетия обогатило науку рядом глубоких результатов, существенно углубивших наше понимание многих явлений. В действительности многие из этих результатов могут быть получены без использования метода обратной задачи. В настоящей работе это утверждение будет продемонстрировано на примере системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{I}$$

описывающей (в некотором приближении) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу /I/. Здесь u - амплитуда длинной волны, φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2 = 1$. Нами получены явные выражения для многосолитонного решения системы (I). При этом основную роль играют некоторые очень элементарные факты, относящиеся к матрицам весьма специального вида. Достигается это следующим образом.

§I. Решение вспомогательной системы уравнений

Пусть B - квадратная матрица порядка $r_0 = r_1 + 2r_2,\ r_1 > 0,\ r_2 > 0$, с элементами $B_{r,s}$, $r, s = 1, \dots, r_0$. Предположим, что отличные от нуля элементы матрицы B имеют вид

$$B_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r \exp[(\omega_r-\sigma_s)x-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r-\sigma_s}, & \text{если } r=1,\dots\\ \dots, r_1, r_1+r_2+1,\dots,r_0, & \text{а } s=1,\dots,r_0+r_1,\\ -\dfrac{f_r \exp[-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y]}{\omega_r^2-\sigma_s^2}, & \text{если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0.\end{cases} \tag{I.I}$$

Остальные элементы матрицы B предполагаются равными нулю, т.е.

$$B_{r,s}=0, \text{ если } \begin{cases} 1) \ 1\le r\le r_1, \ r_1+r_2<s\le r_0, \\ 2) \ r_1<r\le r_1+r_2, \ 1\le s\le r_1+r_2, \\ 3) \ r_1+r_2<r, s\le r_0. \end{cases} \qquad (I.2)$$

При этом предполагается, что величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ от координат x, y не зависят. Кроме того, предположим, что величины $f_1,\dots f_{r_0}$ зависят от времени t так, что выполняются равенства

$$\frac{\partial f_r}{\partial t}+i(\omega_r^2-\sigma_r^2)f_r=0 \text{ при } r=1,\dots,r_1,$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial t}-i\sigma_r^2 f_r=0 \text{ при } r=r_1+1,\dots,r_1+r_2, \qquad (I.3)$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial t}+i\omega_r^2 f_r=0 \text{ при } r=r_1+r_2+1,\dots,r_0.$$

Однако величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ считаются не зависящими от t. Возьмем теперь векторы-столбцы λ и ℓ соответственно с компонентами λ_r и ℓ_r вида

$$\lambda_r=\begin{cases} f_r\exp[\omega_r x-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y], \text{ если } r=1,\dots,r_1,r_1+r_2+1,\dots,r_0, \\ f_r\exp[-i(\omega_r^2-\sigma_r^2)y], \text{ если } r_1<r\le r_1+r_2, \end{cases} \qquad (I.4)$$

$$\ell_r=\begin{cases} \exp(-\sigma_r x), \text{ если } 1\le r\le r_1+r_2, \\ 1, \text{ если } r_1+r_2<r\le r_0. \end{cases} \qquad (I.5)$$

Возьмем, далее, диагональные матрицы J, J_0, J_1, J_2 порядка r_0, имеющие соответственно вид

$$\begin{aligned} J&=diag(1,\dots,1,1,\dots,1,0,\dots,0), \\ J_0&=diag(1,\dots,1,0,\dots,0,1,\dots,1), \\ J_1&=diag(0,\dots,0,1,\dots,1,0,\dots,0), \\ J_2&=diag(0,\dots,0,0,\dots,0,1,\dots,1), \end{aligned} \qquad (I.6)$$

где первые группы нулей и единиц имеют длину r_1, а вторые и третьи - имеют длину r_2.

Положим

$$D=det(1+B), \qquad (I.7)$$

$$\Phi=det\begin{vmatrix} 0 & \tilde\ell J_2 \\ J_0\lambda & 1+B\end{vmatrix}, \quad \Psi=det\begin{vmatrix} 0 & \tilde\ell J \\ J_1\lambda & 1+B\end{vmatrix}, \qquad (I.8)$$

где 1 - единичная матрица порядка r_0, а знак "$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Предположим теперь, что в некоторой окрестности точки $x=x_0, y=y_0, t=t_0$ выполнено неравенство $D=det(1+B)\ne 0$. Определим функции u,φ,ψ с помощью равенств

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D, \quad \varphi=\frac{\Phi}{D}, \quad \psi=\frac{\Psi}{D}. \qquad (I.9)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема I. Определенные посредством (I.I)-(I.9) функции u,φ,ψ удовлетворяют в указанной выше окрестности точки $x=x_0, y=y_0, t=t_0$ системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}-2i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=0, \qquad (I.I0)$$
$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую элементарную лемму.

Лемма. Пусть A - квадратная матрица порядка $m+n+1$, $m>0$, $n>0$. Пусть, далее, $A_{\mu,\nu}$ - квадратная матрица порядка $m+n$, получающаяся из матрицы A после вычеркивания элементов μ-й строки и ν-го столбца, а $\alpha_{\mu,\nu}=\det A_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu=1,\dots,m+n+1$. Пусть, наконец, A_0 - минор n-го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы A, а матрица $\mathcal{A}_0$ имеет вид

$$\mathcal{A}_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m+1,1} & \dots & \alpha_{m+1,m+1} \end{vmatrix}. \qquad (I.11)$$

Тогда справедливо равенство

$$(\det A)^m \det A_0 = \det \mathcal{A}_0. \qquad (I.12)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\det A \neq 0$. Возьмем матрицу $\hat{A}$ вида

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 1_{m+1} & A_1 \\ 0 & A_0 \end{vmatrix}, \qquad (I.13)$$

где 1_{m+1} - единичная матрица порядка $m+1$, а A_1 - минор матрицы A, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu=1,\dots,m+1$ и столбцов с номерами $\nu=m+2,\dots,m+n+1$. Тогда справедливо равенство

$$A^{-1}\hat{A} = \begin{vmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ \hat{A}_1 & 1_n \end{vmatrix}, \qquad (I.14)$$

где 1_n - единичная матрица порядка n, $\hat{A}_0$ - минор $(m+1)$-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A^{-1}, а $\hat{A}_1$ - минор матрицы A^{-1}, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu=m+2,\dots,m+n+1$ и столбцов с номерами $\nu=1,\dots,m+1$. Из равенства (I.14) в силу (I.11) и (I.13) следует справедливость соотношения (I.12).

В том случае, когда $\det A=0$, заменим матрицу A на матрицу $A'=A+\varepsilon 1_{m+n+1}$, где 1_{m+n+1} - единичная матрица порядка $m+n+1$. Для матрицы A' утверждение леммы справедливо при всех достаточно малых $\varepsilon\neq 0$. Переходя к пределу при

$\varepsilon\to 0$, получаем, что в этом случае справедливо равенство $\det \mathcal{A}_0=0$, т.е. соотношение (I.12) справедливо и в случае $\det A=0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. С помощью непосредственной подстановки выражений (I.9) в (I.10) убеждаемся, что система (I.10) будет заведомо удовлетворена, если величины D, Φ, Ψ удовлетворяют соотношениям

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\right)D = \left(\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial y}\right)\frac{\partial D}{\partial x} + i\Phi\Psi, \qquad (I.15)$$

$$\left(i\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)D = \left(i\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\Phi - 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad (I.16)$$

$$\left(i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)D = \left(i\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\Psi + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \qquad (I.17)$$

Докажем их. Согласно (I.1),(I.2) и (I.4)-(I.6) справедливы равенства

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \omega J_0 B - BJ\sigma = J_0\lambda\tilde{\ell}J, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \omega J_0\lambda, \quad \frac{\partial \ell}{\partial x} = -\sigma J\ell, \qquad (I.18)$$

где произведение $\lambda\tilde{\ell}$ вектора-столбца λ на вектор-строку $\tilde{\ell}$ понимается как произведение матриц и, следовательно, является квадратной матрицей порядка r_0 с элементами $\lambda_r\ell_s$, $r,s=1,\dots,r_0$, а диагональные матрицы ω и σ имеют вид

$$\omega = diag(\omega_1,\dots,\omega_{r_0}), \quad \sigma = diag(\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}). \qquad (I.19)$$

Для произвольных целых чисел $m\geq 0$ и $n\geq 0$ определим квадратные матрицы $F_{m,n}$, G_m, H_n порядка r_0+1:

$$F_{m,n} = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J\sigma^n \\ \omega^m J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \qquad (I.20)$$

$$G_m = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J_2 \\ \omega^m J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \quad H_n = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell}J\sigma^n \\ J_1\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \qquad (I.21)$$

Пусть, далее, K – квадратная матрица порядка r_0+1, имеющая вид

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ J_1\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \tag{I.22}$$

Возьмем, наконец, квадратные матрицы U, V, W порядка r_0+2:

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ J_1\lambda & J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \tag{I.23}$$

$$\dot{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ \omega J_0\lambda & J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J \sigma \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ J_1\lambda & J_0\lambda & 1+B \end{vmatrix}. \tag{I.24}$$

На основании (I.7),(I.8), (I.18)-(I.21) и (I.24) имеем

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\det F_{0,0}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -\det F_{1,0} + \det F_{0,1}, \tag{I.25}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \det G_1, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \det G_2 - \det V, \tag{I.26}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\det H_1, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \det H_2 + \det W. \tag{I.27}$$

Возьмем теперь матрицу T вида

$$T = \exp(i\sigma^2 J t) \tag{I.28}$$

и положим

$$\hat{B} = T^{-1} B T. \tag{I.29}$$

С учетом (I.I)-(I.3),(I.6),(I.19),(I.28) и (I.29) находим, что отличные от нуля элементы $B_{r,s}$ матрицы B имеют вид

$$\hat{B}_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{g_r \exp[(\omega_r - \sigma_s)x - i(\omega_r^2 - \sigma_s^2)t - i(\omega_r^2 - \sigma_r^2)y]}{\omega_r - \sigma_s}, \\ \text{если } r = 1,\dots,r_1, r_1+r_2+1,\dots,r_0, \text{ а } s = 1,\dots,r_1+r_2, \\ -\dfrac{g_r \exp[-i(\omega_r^2 - \sigma_r^2)y]}{\omega_r^2 - \sigma_s^2}, \text{ если } r_1 < r \le r_1+r_2 < s \le r_0, \end{cases} \tag{I.30}$$

где величины $g_1,\dots,g_{r_0}$ связаны с величинами $f_1,\dots,f_{r_0}$ соотношением

$$g_r = \begin{cases} f_r \exp[i(\omega_r^2 - \sigma_r^2)t], & \text{если } 1 \le r \le r_1, \\ f_r \exp(-i\sigma_r^2 t), & \text{если } r_1 < r \le r_1+r_2, \\ f_r \exp(i\omega_r^2 t), & \text{если } r_1+r_2 < r \le r_0, \end{cases} \tag{I.31}$$

и, следовательно, от t не зависят. Остальные элементы матрицы $\hat{B}$, очевидно, равны нулю. В силу (I.4)-(I.6) и (I.28)-(I.31) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} &= -i\omega^2 J_0 \hat{B} + i\hat{B} J \sigma^2 = \\ &= -i T^{-1}(\omega J_0 \lambda \tilde{\ell} J + J_0 \lambda \tilde{\ell} J \sigma) T, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T^{-1} J_0 \lambda) &= -i T^{-1} \omega^2 J_0 \lambda, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T J \ell) &= i T \sigma^2 J \ell, \\ \frac{\partial}{\partial t}(T^{-1} J_1 \lambda) &= \frac{\partial}{\partial t}(T J_2 \ell) = 0. \end{aligned} \tag{I.32}$$

Далее, согласно (I.7),(I.8),(I.28) и (I.29) справедливы равенства

$$D = \det(1+\hat{B}),$$

$$\phi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 T \\ T^{-1} J_0 \lambda & 1+\hat{B} \end{vmatrix}, \quad \Psi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J T \\ T^{-1} J_1 \lambda & 1+\hat{B} \end{vmatrix},$$

из которых на основе (I.32) вытекают соотношения

$$i\,\frac{\partial D}{\partial t}=-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}T\\ T^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix}-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}\sigma T\\ T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

$$i\,\frac{\partial \phi}{\partial t}=\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}_2T\\ T^{-1}\omega^2\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}_2T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}T\\ T^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

$$i\,\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}\sigma^2T\\ T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}\sigma T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}T\\ T^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & T^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\hat{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (I.20), (I.2I) и (I.24) имеем

$$i\,\frac{\partial D}{\partial t}=-\det F_{1,0}-\det F_{0,1}\,, \tag{I.33}$$

$$i\,\frac{\partial \phi}{\partial t}=\det G_2+\det V,\qquad i\,\frac{\partial \Psi}{\partial t}=-\det H_2+\det W. \tag{I.34}$$

Отсюда на основании (I.25)-(I.27) следуют равенства

$$i\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-2\det F_{1,0}\,,\quad i\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-2\det F_{0,1}\,, \tag{I.35}$$

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t}-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}=2\det V,\quad i\frac{\partial \Psi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}=2\det W. \tag{I.36}$$

Воспользуемся теперь доказанной ранее леммой. Положим $A=V$. Беря $m=1$, $n=r_0$, с учетом (I.20),(I.2I) и (I.24) получаем, что

$A_0=1+B$, $A_{1,1}=F_{0,0}$, $A_{1,2}=F_{1,0}$, $A_{2,1}=G_0$, $A_{2,2}=G_1$.

В силу (I.7),(I,8),(I.2I),(I.25),(I.26),(I.35) и (I.36) равенство (I.I2) в этом случае имеет вид (I.I6). Аналогичным образом, полагая $A=W$, при $m=1$, $n=r_0$ находим, что $A_0=1+B$, $A_{1,1}=F_{0,0}$, $A_{1,2}=H_0$, $A_{2,1}=F_{0,1}$, $A_{2,2}=H_1$. Согласно (I.7),(I.8),(I.2I),(I.25),(I.27),(I.35) и (I.36) равенство (I.I2) на этот раз принимает вид (I.I7).

Возьмем теперь матрицу Y вида

$$Y=\exp(i\sigma^2 y) \tag{I.37}$$

и пусть

$$\check{B}=Y^{-1}BY. \tag{I.38}$$

В соответствии с (I.I),(I.I9),(I.37) и (I.38) отличные от нуля элементы $\check{B}_{r,s}$ матрицы $\check{B}$ имеют вид

$$\check{B}_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x-i(\omega_r^2-\sigma_s^2)y]}{\omega_r-\sigma_s}, & \text{если } r=1,\ldots,r_1,\ r_1+r_2+1,\ldots,r_0, \text{ а } s=1,\ldots,r_1+r_2,\\[2ex] -\dfrac{f_r\exp[-i(\omega_r^2-\sigma_s^2)y]}{\omega_r^2-\sigma_s^2}, & \text{если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0.\end{cases} \tag{I.39}$$

Остальные элементы матрицы $\check{B}$, очевидно, равны нулю. С помощью (I.4)-(I.6) и (I.37)-(I.39) получаем, что

$$\frac{\partial \check{B}}{\partial y}=-i\omega^2\mathcal{J}_0\check{B}+i\check{B}\mathcal{J}\sigma^2-i\omega^2\mathcal{J}_1\check{B}\mathcal{J}_2+i\mathcal{J}_1\check{B}\mathcal{J}_2\sigma^2= \tag{I.40}$$

$$=-iY^{-1}(\omega\mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\,\mathcal{J}+\mathcal{J}_0\lambda\tilde{\ell}\,\mathcal{J}\sigma-\mathcal{J}_1\lambda\tilde{\ell}\,\mathcal{J}_2)Y.$$

Далее, в силу (I.7) и (I.38) имеем $D=\det(1+\check{B})$.

Отсюда на основе (I.40) следует равенство

$$i\,\frac{\partial D}{\partial y}=-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}Y\\ Y^{-1}\omega\mathcal{J}_0\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix}-$$

$$-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}\sigma Y\\ Y^{-1}\mathcal{J}_0\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}\,\mathcal{J}_2Y\\ Y^{-1}\mathcal{J}_1\lambda & 1+\check{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (I.20) и (I.22) получаем

$$i\frac{\partial D}{\partial y}=-\det F_{1,0}-\det F_{0,1}+\det K.$$

Таким образом, с учетом (I.33) находим, что

$$\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{\partial D}{\partial y}=i\det K. \qquad (I.41)$$

Отсюда согласно (I.4)-(I.6), (I.18),(I.22) и (I.23) следует равенство

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}=-i\det U. \qquad (I.42)$$

Воспользуемся снова доказанной ранее леммой. Положим $A=U$. Беря $m=1$, $n=r_0$, в силу (I.20)-(I.23) получаем, что $A_0=1+B$, $A_{1,1}=F_{0,0}$, $A_{1,2}=H_0$, $A_{2,1}=G_0$, $A_{2,2}=K$. В соответствии с (I.7),(I.8),(I.21),(I.25),(I.41) и (I.42) убеждаемся, что в этой ситуации из соотношения (I.I2) вытекает справедливость (I.I5).

Теорема доказана.

Уместно отметить, что если величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ удовлетворяют условию

$$\omega_r^2=\sigma_r^2,\quad r=1,\dots,r_0,$$

то полученное нами решение системы (I.I0) согласно (I.I) и (I.4) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2i\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)=0,\ i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ i\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0.$$

§2. Инвариантное многообразие системы (I.I0)

Из теоремы I следует, что если определенные посредством (I.I)-(I.8) функции D,Φ,Ψ удовлетворяют соотношениям *)

*) Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение, а звездочкой обозначается эрмитово сопряжение для матриц (и векторов).

$$D=\bar D,\quad \Psi=i\varkappa\bar\Phi,\quad \varkappa^2=1, \qquad (2.I)$$

то определенные согласно (I.9) функции u,φ,ψ принадлежат инвариантному многообразию $u=\bar u$, $\psi=i\varkappa\bar\varphi$ системы (I.I0), и, следовательно, функции

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D} \qquad (2.2)$$

являются решением системы (I). Следующая теорема содержит достаточные условия для выполнения соотношений (2.I).

Теорема 2. Если входящие в определение матрицы B и векторов λ,ℓ величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}
&1)\ f_r\neq 0 \ \text{при}\ r=1,\dots,r_0,\\
&2)\ f_r=\bar f_r,\ \sigma_r=-\bar\omega_r \ \text{при}\ r=1,\dots,r_1,\\
&3)\ \sigma_{r_1+r}=-\bar\omega_{r_1+r_2+r},\ \sigma_{r_1+r_2+r}=-\bar\omega_{r_1+r},\\
&\quad f_{r_1+r_2+r}=i\varkappa\bar f_{r_1+r} \ \text{при}\ r=1,\dots,r_2,
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

то полученные с помощью (I.I)-(I.8) функции D,Φ,Ψ удовлетворяют соотношениям (2.I).

Доказательство. Представим матрицу B в следующем блочном виде:

$$B=\begin{vmatrix}\alpha&\beta&0\\0&0&-\gamma\\a&b&0\end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

где α - минор, стоящий на пересечении первых r_1 строк и первых r_1 столбцов; β - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=1,\dots,r_1$ и столбцов с номерами $s=r_1+1,\dots,r_1+r_2$; $-\gamma$ - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+1,\dots,r_1+r_2$ и столбцов с номерами $s=r_1+r_2+1,\dots,r_0$; a - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+r_2+1,\dots,r_0$ и столбцов с номерами $s=1,\dots,r_1$; и, наконец, b - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+r_2+1,\dots,r_0$ и столбцов с номерами $s=r_1+1,\dots,r_1+r_2$. Пусть

$$f=\mathrm{diag}\{f_1\exp[-i(\omega_1^2-\bar\omega_1^2)y],\dots,f_{r_1}\exp[-i(\omega_{r_1}^2-\bar\omega_{r_1}^2)y]\},$$

$$g=\mathrm{diag}(g_1,\dots,g_{r_2}),\quad h=\mathrm{diag}(h_1,\dots,h_{r_2}), \tag{2.5}$$

где по определению при $r=1,\dots,r_2$ имеем

$$g_r=f_{r_1+r}\exp[-i(\omega_{r_1+r}^2-\bar\omega_{r_1+r_2+r}^2)y], \tag{2.6}$$

$$h_r=f_{r_1+r_2+r}\exp[-i(\omega_{r_1+r_2+r}^2-\bar\omega_{r_1+r}^2)y].$$

В силу (2.3) получаем, что

$$f=f^*,\quad h=i\varkappa g^*. \tag{2.7}$$

Далее, в соответствии с (I.I) и (2.3)-(2.7) находим, что

$$\alpha f=f\alpha^*,\ af=h\beta^*,\ bh^*=hb^*,\ \gamma g^*=-g\gamma^*. \tag{2.8}$$

Положим теперь

$$S=\begin{vmatrix} f & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\varkappa g\\ 0 & h & 0\end{vmatrix},\quad S_0=\det S. \tag{2.9}$$

Согласно (2.4)-(2.9) справедливы равенства

$$S=S^*,\ SB^*=BS^*=BS.$$

Отсюда следует, что

$$S(1+B^*)=(1+B)S, \tag{2.I0}$$

т.е. с учетом неравенства $f_r\neq0$ при $r=1,\dots,r_0$ получаем равенство $\det(1+B)=\det(1+B^*)$. Таким образом, первое из соотношений (2.I) доказано.

Докажем теперь второе из соотношений (2.I). В силу (I.8) и (2.9) имеем

$$S_0\bar\Phi=\det\begin{vmatrix}0 & \lambda^*J_0\\ SJ_2\ell & S(1+B^*)\end{vmatrix},\ \Psi S_0=\det\begin{vmatrix}0 & \tilde\ell JS\\ J_1\lambda & (1+B)S\end{vmatrix}. \tag{2.II}$$

На основании (I.4)-(I.6),(2.3),(2.5),(2.6) и (2.9) справедливы равенства

$$\tilde\ell JS=\lambda^*J_0,\ J_1\lambda=i\varkappa SJ_2\ell. \tag{2.I2}$$

В соответствии с (2.I0) и (2.I2) второе из соотношений (2.I) следует из равенств (2.II).

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что если величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ выбраны с соблюдением условий

$$\begin{aligned}&1)\ \omega_r=\bar\omega_r \quad \text{при } r=1,\dots,r_1,\\ &2)\ \omega_{r_1+r}^2-\bar\omega_{r_1+r_2+r}^2=0 \quad \text{при } r=1,\dots,r_2,\end{aligned} \tag{2.I3}$$

то полученное нами решение системы (I) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2=0,\ i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{2.I4}$$

играющей важную роль в ряде областей математической физики. Нетрудно убедиться, что если $u=u(x,t)$, $\varphi=\varphi(x,t)$ является решением системы (2.I4), то пара функций

$$v(x,t)=u(x+ct,t),\quad \psi(x,t)=\varphi(x+ct,t)\exp[i\tfrac{c}{2}(x+\tfrac{c}{2}t)]$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}-c\frac{\partial v}{\partial x}+2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\psi|^2=0,\ i\frac{\partial\psi}{\partial t}=u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \tag{2.I4'}$$

В работах /2,3/ системы (2.I4) и (2.I4') исследовались с помощью метода обратной задачи рассеяния. Однако получаемые здесь попутно явные выражения для многосолитонных решений этих систем являются новыми.

Выясним теперь, какие требования нужно дополнительно наложить на величины $f_1,\dots,f_{r_0}$, $\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ для того, чтобы определитель D не обращался в нуль при любых вещественных значениях x,y,t. Ответ дает следующая

Теорема 3. Если входящие в определение матрицы B величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ удовлетворяют условиям:

$$1)\quad \operatorname{sign} f_1=\dots=\operatorname{sign} f_{r_1}=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1)=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1}), \tag{2.15}$$

$$2)\quad \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1})=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}), \tag{2.16}$$

$$3)\quad \text{и}\ \operatorname{Re}\left[i\left(\omega^2_{r_1+r}-\bar\omega^2_{r_1+r}\right)\omega_{r_1+r_2+r}\right]<0 \ \text{при}\ r=1,\dots,r_2, \tag{2.17}$$

то определитель $D=\det(\mathbf{1}+B)$ отличен от нуля при любых вещественных x,y,t.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$X+\alpha X+\beta Y=0\,,\quad Y-\gamma Z=0\,,\quad aX+bY+Z=0, \tag{2.18}$$

где матрицы α,β,γ,a,b определены ранее с помощью представления (2.4) матрицы B, а X и Y, Z векторы-столбцы соответственно с r_1 и r_2 компонентами. Покажем, что при выполнении условий (2.15)-(2.17) система (2.18) имеет только тривиальное решение. С этой целью сделаем в системе (2.18) замену

$$X=f\hat X\,,\quad Y=h^*\hat Y\,,\quad Z=\hat Z\,,$$

где матрицы f и h определены посредством (2.5) и (2.6). В результате получим систему

$$(f+\hat\alpha)\hat X+\hat\beta\,\hat Y=0\,,\quad \hat Y-\hat\gamma\hat Z=0\,,\quad \hat a\hat X+\hat b\hat Y+\hat Z=0, \tag{2.19}$$

где

$$\hat\alpha=\alpha f\,,\quad \hat\beta=\beta h^*\,,\quad \hat\gamma=(h^*)^{-1}\gamma\,,\quad \hat a=af\,,\quad \hat b=bh^*. \tag{2.20}$$

Согласно (2.7),(2.8) и (2.20) имеем

$$\hat\alpha^*=\hat\alpha\,,\quad \hat\beta^*=\hat a\,,\quad \hat\gamma^*=\hat\gamma\,,\quad \hat b^*=\hat b\,, \tag{2.21}$$

т.е. матрицы $f+\hat\alpha$, $\hat b$ и $\hat\gamma$ являются эрмитовыми. Далее, из системы (2.19) вытекает равенство

$$-\hat X^*(f+\hat\alpha)\hat X+\hat Y^*\hat b\,\hat Y+\hat Z^*\hat\gamma\,\hat Z=0. \tag{2.22}$$

Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} f_1=\dots=\operatorname{sign} f_{r_1}=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1)=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1})=\\=-\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1})=\dots=-\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}),\end{aligned} \tag{2.23}$$

то матрицы $-(f+\hat\alpha)$, $\hat b$ и $\hat\gamma$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Кроме того, в силу равенств первой строки формулы (2.23) имеем $\det(f+\hat\alpha)\neq 0$. Отсюда следует, что равенство (2.22) возможно только при $\hat X=0$. Это значит, что для любого решения системы (2.19) выполняются соотношения

$$\hat Y-\hat\gamma\hat Z=0\,,\quad \hat b\,\hat Y+\hat Z=0. \tag{2.24}$$

На основе сказанного выше все собственные значения матриц $\hat b\hat\gamma$ и $\hat\gamma\hat b$ неотрицательны. Следовательно, определитель системы (2.24) отличен от нуля, т.е. $\hat Y=\hat Z=0$. Таким образом, при выполнении условий (2.17) и (2.23) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим теперь матрицы A_0 и A_1 вида

$$A_0=\begin{vmatrix} f+\hat\alpha & \hat\beta\\ \hat a & \hat b\end{vmatrix},\quad A_1=\hat\gamma.$$

Согласно (2.21) матрицы A_0 и A_1 являются эрмитовыми. Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} f_1=\dots=\operatorname{sign} f_{r_1}=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1)=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1})=\\=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1})=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}),\end{aligned} \tag{2.25}$$

то матрицы A_0 и A_1 будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Возьмем матрицу Q вида

$$Q=\begin{vmatrix} \mathbf{1}_{r_2} & 0\\ -q & \mathbf{1}_{r_2}\end{vmatrix},$$

где 1_{r_2} - единичная матрица порядка r_2, а $q = \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}$. С учетом (2.21) имеем $q^* = (f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta}$. Нетрудно убедиться, что эрмитова матрица $\hat{A}_0 = Q A_0 Q^*$ имеет вид

$$\hat{A}_0 = \begin{vmatrix} f+\hat{\mathcal{L}} & 0 \\ 0 & \hat{\ell} - \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta} \end{vmatrix}.$$

Матрицы A_0 и $\hat{A}_0$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Из сказанного выше вытекает, что эрмитовы матрицы

$$f+\hat{\mathcal{L}}, \quad A_1 = \hat{\gamma}, \quad A_2 = \hat{\ell} - \hat{\alpha}(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta} \tag{2.26}$$

будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Выразим теперь с помощью первого уравнения системы (2.19) вектор $\hat{X}$ через вектор $\hat{Y}$, т.е. положим

$$\hat{X} = -(f+\hat{\mathcal{L}})^{-1}\hat{\beta}\,\hat{Y}. \tag{2.27}$$

Это можно сделать, так как в силу равенств первой строки формулы (2.25) справедливо неравенство $\det(f+\hat{\mathcal{L}}) \neq 0$. После подстановки ~~выражения (2.27) в третье уравнение системы (2.19) получаем~~ систему

$$\hat{Y} - A_1\hat{Z} = 0, \quad A_2\hat{Y} + \hat{Z} = 0, \tag{2.28}$$

где матрицы A_1 и A_2 определены посредством (2.26). С учетом сказанного выше все собственные значения матриц A_1A_2 и A_2A_1 неотрицательны. На этом основании определитель системы (2.28) отличен от нуля, т.е. $\hat{Y} = \hat{Z} = 0$. Далее, в силу (2.27) получаем $\hat{X} = 0$. Таким образом, при выполнении условий (2.17) и (2.25) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Поскольку из условий (2.15), (2.16) вытекает справедливость либо условия (2.23), либо условия (2.25), то из сказанного выше следует, что условия (2.15)-(2.17) гарантируют отсутствие у системы (2.18) нетривиального решения, что, как известно, эквивалентно отличию от нуля определителя D.

Теорема доказана.

Отметим, что условия (2.13) не противоречат условиям (2.15)-(2.17).

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу полученного нами решения (2.2) системы (I). В типичном случае это решение описывает

взаимодействие $r_1 + r_2$ уединенных волн двух типов. Волны первого типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_1^2}{\operatorname{ch}^2[\mu_1 x + 2\mu_1\nu_1(y+t)]}, \quad \varphi = 0,$$

где вещественные параметры μ_1 и ν_1 принимают произвольные значения. Волны второго типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_2^2}{\operatorname{ch}^2[\mu_2(x+2\nu_2 t + 2\sigma y)]},$$

$$\varphi = c\,\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t) + i\tau y]}{\operatorname{ch}[\mu_2(x+2\nu_2 t + 2\sigma y)]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где вещественные параметры μ_2, ν_2, σ, τ и комплексная величина c удовлетворяют единственному условию

$$2(\nu_2 - \sigma)\mu_2^2 + \varkappa|c|^2 = 0,$$

и, следовательно, для существования этих решений необходимо выполнение условия $(\nu_2 - \sigma)\varkappa < 0$. В типичном случае взаимодействие всех волн является упругим, т.е. результат взаимодействия выражается в соответствующих фазовых сдвигах всех взаимодействующих волн.

Ситуация меняется коренным образом, если на величины $\omega_1, \dots, \omega_{r_0}$ наложить определенные дополнительные требования. В этом случае среди взаимодействующих волн появляются, например, пары волн разных типов, в которых одна волна гасит другую. Впервые это явление было обнаружено нами в работе /4/. Однако рассмотренный там случай не исчерпывает всех сторон этого явления. Результаты настоящей работы позволяют рассмотреть это явление более полно.

В заключение отметим, что если в системе (I) заменить t на y, а y на t, то в итоге получим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\varkappa\frac{\partial}{\partial x}|\varphi|^2, \quad i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = u\varphi + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{*}$$

Очевидно, что проделав в решении (2.2) ту же самую замену, мы получим решение системы $(*)$. Однако упомянутое выше решение в новых переменных имеет совсем другой характер, а именно: в новых переменных это решение описывает излучение (или поглощение) длинной волной пакета коротких волн. Ранее это явление было обнаружено нами в другой системе уравнений [5].

Литература

1. Mel'nikov V.K., Lett. Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.129–136.
2. Yajima N., Oikawa M. Progr.Theor.Phys., 1976, v.56, N 6, p.1719–1739.
3. Ma Y.-C. Stud.Appl.Math., 1978, v.59, N 3, p.201–221.
4. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-234, Дубна: ОИЯИ, 1986.
5. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-86-276, Дубна: ОИЯИ, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 ноября 1986 года

Мельников В.К. P2-86-724

О прямом методе для получения многосолитонного решения задачи о взаимодействии волн на плоскости x,y

Найдены явные выражения для многосолитонного решения системы уравнений, описывающей взаимодействие волн на плоскости x, y . Хотя при получении этого решения были использованы идеи, лежащие в основе метода обратной задачи, приводимые в статье доказательства всех утверждений базируются лишь на свойствах матриц специального вида и никак не связаны с названным выше методом. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом задач гидродинамики и физики плазмы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-86-724

On a Direct Method for Deriving a Multi-Soliton Solution for the Problem of Wave Interaction on the x,y Plane

Explicit expressions are found for a multi-soliton solution of the system of equations describing the wave interaction on the x, y plane. Though the ideas underlying the inverse scattering method were used to derive this solution, the proofs of all statements made in this paper are based only on the properties of matrices of a special form and have no relation to the above-mentioned method. The obtained results are closely connected with some problems of hydrodynamics and plasma physics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986