объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-689

В.К.Мельников

ПРЯМОЙ МЕТОД ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НА ПЛОСКОСТИ x,y

Направлено в журнал
"Communications in Mathematical Physics"

1986

В настоящей работе получены явные выражения для многосолитонного решения системы уравнений

$$
\begin{gathered}
3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varkappa|\varphi|^2\right)\right]=0, \\
i\frac{\partial \varphi}{\partial y}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

описывающей (в некотором приближении) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу /1,2/. Здесь u - амплитуда длинной волны, φ - комплексная огибающая пакета коротких волн, параметр $\varkappa$ удовлетворяет условию $\varkappa^2=1$.

Хотя при получении этого решения были использованы идеи, лежащие в основе метода обратной задачи рассеяния, приведенные здесь доказательства базируются лишь на некоторых очень простых фактах, относящихся к матрицам весьма специального вида, и никак не связаны с упомянутым выше методом. Достигается это следующим образом.

§ I. Решение вспомогательной системы уравнений

Пусть B - квадратная матрица порядка $r_0=r_1+2r_2$, $r_1>0$, $r_2>0$, с элементами $B_{r,s}$, $r,s=1,\dots,r_0$. Предположим, что отличные от нуля элементы матрицы B имеют вид

$$
B_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x-4(\omega_r^3-\sigma_r^3)y]}{\omega_r-\sigma_s}, & \text{если } r=1,\dots \\ \dots,r_1,\ r_1+r_2+1,\dots,r_0, & \text{а } s=1,\dots,r_1+r_2, \\ -\dfrac{f_r\exp[-4(\omega_r^3-\sigma_r^3)y]}{\omega_r^3-\sigma_s^3}, & \text{если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0.\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Остальные элементы матрицы B предполагаются равными нулю, т.е.

$$
B_{r,s}=0,\ \text{если}\ \begin{cases}1)\ 1\le r\le r_1, & r_1+r_2<s\le r_0, \\ 2)\ r_1<r\le r_1+r_2, & 1\le s\le r_1+r_2, \\ 3)\ r_1+r_2<r,\ s\le r_0.\end{cases}
\tag{1.2}
$$

При этом предполагается, что величины $f_1, \dots, f_{r_0}$, $\omega_1, \dots, \omega_{r_0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}$ от координат x, y не зависят. Кроме того, предположим, что величины $f_1, \dots, f_{r_0}$ зависят от времени t так, что выполняются равенства

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + i(\omega_r^2 - \sigma_r^2) f_r = 0 \quad \text{при} \quad r = 1, \dots, r_1, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} - i\sigma_r^2 f_r = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1+1, \dots, r_1 + r_2,$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} + i\omega_r^2 f_r = 0 \quad \text{при} \quad r = r_1 + r_2 + 1, \dots, r_0.$$

Однако величины $\omega_1, \dots, \omega_{r_0}, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}$ считаются не зависящими от t.

Возьмем теперь векторы-столбцы λ и ℓ соответственно с компонентами λ_r и ℓ_r вида

$$\lambda_r = \begin{cases} f_r \exp[\omega_r x - 4(\omega_r^3 - \sigma_r^3) y], & \text{если } r = 1, \dots, r_1, r_1+r_2+1, \dots, r_0, \\ f_r \exp[-4(\omega_r^3 - \sigma_r^3) y], & \text{если } r_1 < r \le r_1 + r_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\ell_r = \begin{cases} \exp(-\sigma_r x), & \text{если } 1 \le r \le r_1 + r_2, \\ 1, & \text{если } r_1 + r_2 < r \le r_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Возьмем, далее, диагональные матрицы J, J_0, J_1, J_2 порядка r_0, имеющие соответственно вид

$$J = diag(1, \dots, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

$$J_0 = diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1), \tag{1.6}$$

$$J_1 = diag(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

$$J_2 = diag(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1),$$

где первые группы нулей и единиц имеют длину r_1, а вторые и третьи - имеют длину r_2.

Положим

$$D = det(\mathbb{1} + B), \tag{1.7}$$

$$\Phi = det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ J_0 \lambda & \mathbb{1} + B \end{vmatrix}, \quad \Psi = det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J \\ J_1 \lambda & \mathbb{1} + B \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

где $\mathbb{1}$ - единичная матрица порядка r_0, а знак „$\sim$" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Предположим теперь, что в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполняется неравенство $D \neq 0$. Определим функции u, φ, ψ с помощью равенств

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D, \quad \varphi = \frac{\Phi}{D}, \quad \psi = \frac{\Psi}{D}. \tag{1.9}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Определенные посредством (1.1)-(1.9) функции u, φ, ψ удовлетворяют в указанной выше окрестности точки $x = x_0, y = y_0, t = t_0$ системе уравнений вида

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\varphi\psi\right)\right] = 0, \tag{1.10}$$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = u\varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} + u\psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую элементарную лемму.

Лемма. Пусть A - квадратная матрица порядка $m+n+1$, $m > 0$, $n > 0$. Пусть, далее, $A_{\mu,\nu}$ - квадратная матрица порядка $m+n$, получающаяся из матрицы A после вычеркивания элементов μ - й строки и ν -го столбца, а $\alpha_{\mu,\nu} = det A_{\mu,\nu}$, $\mu, \nu = 1, \dots, m+n+1$. Пусть, наконец, A_0 - минор n -го порядка, стоящий в правом нижнем углу матрицы A, а матрица $\mathcal{A}_0$ имеет вид

$$\mathcal{A}_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m+1,1} & \dots & \alpha_{m+1,m+1} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Тогда справедливо равенство

$$(det A)^m \, det A_0 = det \mathcal{A}_0. \tag{1.12}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\det A \neq 0$. Возьмем матрицу $\hat{A}$ вида

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} 1\!\!1_{m+1} & A_1 \\ 0 & A_0 \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

где $1\!\!1_{m+1}$ - единичная матрица порядка $m+1$, а A_1 - минор матрицы A, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu = 1, \ldots, m+1$ и столбцов с номерами $\nu = m+2, \ldots, m+n+1$. Тогда справедливо равенство

$$A^{-1}\hat{A} = \begin{vmatrix} \hat{A}_0 & 0 \\ \hat{A}_1 & 1\!\!1_n \end{vmatrix}, \tag{1.14}$$

где $1\!\!1_n$ - единичная матрица порядка n, $\hat{A}_0$ - минор ($m+1$)-го порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы A^{-1}, а $\hat{A}_1$ - минор A^{-1}, образованный элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $\mu = m+1, \ldots, m+n+1$ и столбцов с номерами $\nu = 1, \ldots, m+1$. Из равенства (1.14) в силу (1.11) и (1.13) следует справедливость соотношения (1.12).

В случае, когда $\det A = 0$, заменим матрицу A на матрицу $A' = A + \varepsilon 1\!\!1_{m+n+1}$, где $1\!\!1_{m+n+1}$ - единичная матрица порядка $m+n+1$. Для матрицы A' утверждение леммы справедливо при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что в этом случае справедливо равенство $\det \mathcal{A}_0 = 0$, т.е. соотношение (1.12) справедливо и в случае $\det A = 0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. С помощью непосредственной подстановки выражений (1.9) в (1.10) убеждаемся, что система (1.10) будет заведомо удовлетворена, если величины D, ϕ, Ψ удовлетворяют соотношениям

$$\left(3\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^4 D}{\partial x^4}\right) D - 3\left[\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial D}{\partial y} + 4\frac{\partial^3 D}{\partial x^3}\right)\frac{\partial D}{\partial x} - 4\phi\Psi = 0, \tag{1.15}$$

$$\left(i\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) D = \left(i\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\phi - 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1.16}$$

$$\left(i\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) D = \left(i\frac{\partial D}{\partial t} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)\Psi + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{1.17}$$

Докажем их. Согласно (1.1), (1.2) и (1.4)- (1.6) справедливы равенства

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \omega J_0 B - BJ\sigma = J_0 \lambda \tilde{\ell} J, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \omega J_0 \lambda, \quad \frac{\partial \ell}{\partial x} = -\sigma J \ell, \tag{1.18}$$

где произведение $\lambda\tilde{\ell}$ вектора-столбца λ на вектор-строку $\tilde{\ell}$ понимается как произведение матриц и, следовательно, является квадратной матрицей порядка r_0 с элементами $\lambda_r \ell_s$, $r, s = 1, \ldots, r_0$, а диагональные матрицы ω и σ имеют вид

$$\omega = diag(\omega_1, \ldots, \omega_{r_0}), \quad \sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_0}). \tag{1.19}$$

Для произвольных целых чисел $m \geq 0$ и $n \geq 0$ определим квадратные матрицы $F_{m,n}$, G_m, H_n порядка $r_0 + 1$ следующим образом:

$$F_{m,n} = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J \sigma^n \\ \omega^m J_0 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}, \tag{1.20}$$

$$G_m = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ \omega^m J_0 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}, \quad H_n = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J \sigma^n \\ J_1 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Пусть, далее, K - квадратная матрица порядка $r_0 + 1$ вида

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ J_1 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

Возьмем, наконец, квадратные матрицы U, U_0, V, W порядка $r_0 + 2$, имеющие соответственно вид

$$U = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J \sigma \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ \omega J_0 \lambda & J_0 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}, \quad U_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ J_1 \lambda & J_0 \lambda & 1\!\!1 + B \end{vmatrix}, \tag{1.23}$$

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ \omega J_0 \lambda & J_0 \lambda & \mathbb{1} + B \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J \sigma \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J \\ J_1 \lambda & J_0 \lambda & \mathbb{1} + B \end{vmatrix}. \tag{1.24}$$

На основании (1.7),(1.8) и (1.18)-(1.24) имеем

$$\frac{\partial D}{\partial x} = -\det F_{0,0}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -\det F_{1,0} + \det F_{0,1}, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial^3 D}{\partial x^3} = -\det F_{2,0} + 2\det F_{1,1} - \det F_{0,2}, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial^4 D}{\partial x^4} = -\det F_{3,0} + 3\det F_{2,1} - 3\det F_{1,2} + \det F_{0,3} - 2\det U, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \det G_1, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \det G_2 - \det V, \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\det H_1, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \det H_2 + \det W. \tag{1.29}$$

Возьмем теперь матрицу T вида

$$T = \exp(i \sigma^2 J t) \tag{1.30}$$

и пусть

$$\hat{B} = T^{-1} B T. \tag{1.31}$$

С учетом (1.1)-(1.3), (1.6), (1.19), (1.30), (1.31) находим, что отличные от нуля элементы $\hat{B}_{r,s}$ матрицы $\hat{B}$ имеют вид

$$\hat{B}_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{g_r \exp[(\omega_r - \sigma_s)x - i(\omega_r^2 - \sigma_s^2)t - 4(\omega_r^3 - \sigma_r^3)y]}{\omega_r - \sigma_s}, & \text{если} \\ r = 1, \ldots, r_1, r_1 + r_2 + 1, \ldots, r_0, \text{ а } s = 1, \ldots, r_1 + r_2, & \\ -\dfrac{g_r \exp[-4(\omega_r^3 - \sigma_r^3)y]}{\omega_r^3 - \sigma_s^3}, & \text{если } r_1 < r \le r_1 + r_2 < s \le r_0, \end{cases} \tag{1.32}$$

где величины $g_1, \ldots, g_{r_0}$ связаны с величинами $f_1, \ldots, f_{r_0}$ соотношением

$$g_r = \begin{cases} f_r \exp[i(\omega_r^2 - \sigma_r^2)t], & \text{если } 1 \le r \le r_1, \\ f_r \exp(-i\sigma_r^2 t), & \text{если } r_1 < r \le r_1 + r_2, \\ f_r \exp(i\omega_r^2 t), & \text{если } r_1 + r_2 < r \le r_0, \end{cases} \tag{1.33}$$

и, следовательно, от t не зависят. Остальные элементы матрицы $\hat{B}$, очевидно, равны нулю. В силу (1.4)-(1.6) и (1.30)-(1.33) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} &= -i\omega^2 J_0 \hat{B} + i \hat{B} J \sigma^2 = \\ &= -i T^{-1}(\omega J_0 \lambda \tilde{\ell} J + J_0 \lambda \tilde{\ell} J \sigma) T, \\ \frac{\partial}{\partial t}&(T^{-1} J_0 \lambda) = -i T^{-1} \omega^2 J_0 \lambda, \\ \frac{\partial}{\partial t}&(T J \ell) = i T \sigma^2 J \ell, \\ \frac{\partial}{\partial t}&(T^{-1} J_1 \lambda) = \frac{\partial}{\partial t}(T J_2 \ell) = 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Далее, согласно (1.7), (1.8), (1.30) и (1.31) справедливы равенства

$$D = \det(\mathbb{1} + \hat{B}),$$

$$\phi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 T \\ T^{-1} J_0 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix}, \quad \psi = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J T \\ T^{-1} J_1 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix},$$

из которых на основе (1.34) вытекают соотношения

$$i \frac{\partial D}{\partial t} = -\det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J T \\ T^{-1} \omega J_0 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix} - \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J \sigma T \\ T^{-1} J_0 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix},$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\ell} J_2 T \\ T^{-1} \omega^2 J_0 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tilde{\ell} J_2 T \\ 0 & 0 & \tilde{\ell} J T \\ T^{-1} \omega J_0 \lambda & T^{-1} J_0 \lambda & \mathbb{1} + \hat{B} \end{vmatrix},$$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma^2T\\ T^{-1}J_1\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix}+\det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}J\sigma T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}JT\\ T^{-1}J_1\lambda & T^{-1}J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}=\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}JT\\ T^{-1}\omega^3J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix}-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma^2T\\ T^{-1}\omega J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix}+$$

$$+\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma T\\ T^{-1}\omega^2J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix}-\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma^3T\\ T^{-1}J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix}+$$

$$+2\det\begin{vmatrix}0 & 0 & \tilde{\ell}J\sigma T\\ 0 & 0 & \tilde{\ell}JT\\ T^{-1}\omega J_0\lambda & T^{-1}J_0\lambda & \mathbb{1}+\hat{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (1.20)-(1.24) имеем

$$i\frac{\partial D}{\partial t}=-\det F_{1,0}-\det F_{0,1}, \qquad (1.35)$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}=\det G_2+\det V,\quad i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\det H_2+\det W, \qquad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}=\det F_{3,0}+\det F_{2,1}-\det F_{1,2}-\det F_{0,3}+2\det U. \qquad (1.37)$$

Отсюда на основании (1.25), (1.28) и (1.29) следуют равенства

$$i\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=-2\det F_{1,0},\quad -i\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=2\det F_{0,1}, \qquad (1.38)$$

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=2\det V,\quad i\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=2\det W. \qquad (1.39).$$

Воспользуемся теперь доказанной ранее леммой. Положим $A=V$. Беря $m=1$, $n=r_0$, с учетом (1.20), (1.21) и (1.24) получаем, что

$$A_0=\mathbb{1}+B,\ A_{1,1}=F_{0,0},\ A_{1,2}=F_{1,0},\ A_{2,1}=G_0,\ A_{2,2}=G_1.$$

В силу (1.7), (1.8), (1.21), (1.25), (1.28), (1.38) и (1.39) равенство (1.12) в этом случае имеет вид (1.16). Аналогичным образом, полагая $A=W$, при $m=1$, $n=r_0$ находим, что $A_0=\mathbb{1}+B$, $A_{1,1}=F_{0,0}$,

$A_{1,2}=H_0$, $A_{2,1}=F_{0,1}$, $A_{2,2}=H_1$. Согласно (1.7), (1.8), (1.21) (1.25), (1.29), (1.38) и (1.39) равенство (1.12) на этот раз принимает вид (1.17).

Возьмем теперь матрицу Y вида

$$Y=\exp(4\sigma^3 y) \qquad (1.40)$$

и пусть

$$\check{B}=Y^{-1}BY. \qquad (1.41)$$

В соответствии с (1.1), (1.19), (1.40) и (1.41) отличные от нуля элементы $\check{\beta}_{r,s}$ матрицы $\check{B}$ имеют вид

$$\check{B}_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x-4(\omega_r^3-\sigma_s^3)y]}{\omega_r-\sigma_s}, \text{ если } r=1,\dots\\ \dots,r_1,r_1+r_2+1,\dots,r_0, \text{ а } s=1,\dots,r_1+r_2,\\ -\dfrac{f_r\exp[-4(\omega_r^3-\sigma_s^3)y]}{\omega_r^3-\sigma_s^3}, \text{ если } r_1<r\le r_1+r_2<s\le r_0.\end{cases} \qquad (1.42)$$

Остальные элементы матрицы $\check{B}$, очевидно, равны нулю. С помощью (1.4)-(1.6) и (1.40)- (1.42) получаем, что

$$\frac{\partial\check{B}}{\partial y}=-4\omega^3J_0\check{B}+4\check{B}J\sigma^3-4\omega^3J_1\check{B}J_2+4J_1\check{B}J_2\sigma^3= \qquad (1.43)$$

$$=-4Y^{-1}(\omega^2J_0\lambda\tilde{\ell}J+\omega J_0\lambda\tilde{\ell}J\sigma+J_0\lambda\tilde{\ell}J\sigma^2-J_1\lambda\tilde{\ell}J_2)Y.$$

Далее, в силу (1.7) и (1.41) имеем $D=\det(\mathbb{1}+\check{B})$. Отсюда на основании (1.43) следует равенство

$$\frac{\partial D}{\partial y}=4\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}JY\\ Y^{-1}\omega^2J_0\lambda & \mathbb{1}+\check{B}\end{vmatrix}+4\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma Y\\ Y^{-1}\omega J_0\lambda & \mathbb{1}+\check{B}\end{vmatrix}+$$

$$+4\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J\sigma^2Y\\ Y^{-1}J_0\lambda & \mathbb{1}+\check{B}\end{vmatrix}-4\det\begin{vmatrix}0 & \tilde{\ell}J_2Y\\ Y^{-1}J_1\lambda & \mathbb{1}+\check{B}\end{vmatrix},$$

т.е. в соответствии с (1.20) и (1.22) получаем

$$\frac{\partial D}{\partial y}=4\det F_{2,0}+4\det F_{1,1}+4\det F_{0,2}-4\det K. \qquad (1.44)$$

Далее, с учетом (1.26) и (1.44) находим, что

$$\frac{\partial D}{\partial y}+\frac{\partial^3 D}{\partial x^3}=3\det F_{2,0}+6\det F_{1,1}+3\det F_{0,2}-4\det K.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^4 D}{\partial x^4}=3\det F_{3,0}+3\det F_{2,1}-3\det F_{1,2}-$$
$$-3\det F_{0,3}-6\det U+4\det U_0. \qquad (1.45)$$

Таким образом, согласно (1.37) и (1.45) имеем

$$3\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^4 D}{\partial x^4}=12\det U-4\det U_0. \qquad (1.46)$$

Кроме того, с помощью (1.25) и (1.35) убеждаемся, что

$$\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^2=-4\det\left(F_{1,0}\,F_{0,1}\right), \qquad (1.47)$$

а в силу (1.26) и (1.44) получаем равенство

$$\frac{\partial D}{\partial y}+4\frac{\partial^3 D}{\partial x^3}=12\det F_{1,1}-4\det K. \qquad (1.48)$$

Воспользуемся снова доказанной ранее леммой. Положим $A=U$. Беря $m=1$, $n=r_0$, с учетом (1.20) и (1.23) получаем, что

$$A_0=1\!\!1+B,\ A_{1,1}=F_{0,0},\ A_{1,2}=F_{1,0},\ A_{2,1}=F_{0,1},\ A_{2,2}=F_{1,1}.$$

Таким образом, на основе равенства (1.12) справедливо соотношение

$$D\det U=\det\left(F_{0,0}\,F_{1,1}\right)-\det\left(F_{1,0}\,F_{0,1}\right). \qquad (1.49)$$

Аналогичным образом, полагая $A=U_0$, при $m=1$, $n=r_0$ находим, что $A_0=1\!\!1+B$, $A_{1,1}=F_{0,0}$, $A_{1,2}=H_0$, $A_{2,1}=G_0$, $A_{2,2}=K$, и в соответствии с равенством (1.12) получаем соотношение

$$D\det U_0=\det\left(F_{0,0}\,K\right)-\det\left(G_0\,H_0\right). \qquad (1.50)$$

Умножим теперь равенство (1.49) на 12, а из полученного результата вычтем равенство (1.50), умноженное на 4. В итоге имеем

$$\left(12\det U-4\det U_0\right)D+12\det\left(F_{1,0}\,F_{0,1}\right)=$$
$$=\left(12\det F_{1,1}-4\det K\right)\det F_{0,0}+4\det\left(G_0\,H_0\right).$$

С помощью (1.8), (1.21), (1.25) и (1.46)-(1.48) убеждаемся, что из этого равенства следует соотношение (1.15).

Теорема доказана.

Нелишне отметить, что если величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ выбраны с соблюдением условия

$$\omega_r^3=\sigma_r^3,\quad r=1,\dots,r_0,$$

то полученное нами решение системы (1.10) согласно (1.1) и (1.4) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varphi\psi\right)=0,$$

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad i\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0.$$

§ 2. Инвариантное многообразие системы (1.10)

Из теоремы 1 следует, что если определенные посредством (1.1)-(1.8) функции D,Φ,Ψ удовлетворяют соотношениям *)

$$D=\bar D,\quad \Psi=\varkappa\bar\Phi,\quad \varkappa^2=1, \qquad (2.1)$$

то определенные согласно (1.9) функции u,φ,ψ принадлежат инвариантному многообразию $u=\bar u$, $\psi=\varkappa\bar\varphi$ системы (1.10), и, следовательно, функции

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \varphi=\frac{\Phi}{D} \qquad (2.2)$$

являются решением системы уравнений

---

*) Здесь и всюду в дальнейшем черта над какой-нибудь величиной означает комплексное сопряжение, а звездочкой обозначается эрмитово сопряжение для матриц (и векторов).

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varkappa|\varphi|^2\right)\right]=0,$$

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{2.3}$$

Следующая теорема содержит достаточные условия для выполнения соотношений (2.1).

Теорема 2. Если входящие в определение матрицы B и векторов λ, ℓ величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0}$ удовлетворяют условиям

1) $f_r\neq 0$ при $r=1,\dots,r_0$,

2) $f_r=\bar f_r$, $\sigma_r=-\bar\omega_r$ при $r=1,\dots,r_1$, (2.4)

3) $f_{r_1+r_2+r}=\varkappa\bar f_{r_1+r}$, $\sigma_{r_1+r}=-\bar\omega_{r_1+r_2+r}$,

$\sigma_{r_1+r_2+r}=-\bar\omega_{r_1+r}$ при $r=1,\dots,r_2$,

то полученные с помощью (1.1)-(1.8) функции D, Φ, Ψ удовлетворяют соотношениям (2.1).

Доказательство. Представим матрицу B в следующем блочном виде:

$$B=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & 0\\ 0 & 0 & -\gamma\\ a & b & 0\end{vmatrix}, \tag{2.5}$$

где α - минор, стоящий на пересечении первых r_1 строк и первых r_1 столбцов; β - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=1,\dots,r_1$ и столбцов с номерами $s=r_1+1,\dots,r_1+r_2$; $-\gamma$ - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+1,\dots,r_1+r_2$ и столбцов с номерами $s=r_1+r_2+1,\dots,r_0$; a - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+r_2+1,\dots,r_0$ и столбцов с номерами $s=1,\dots,r_1$; и, наконец, b - минор, стоящий на пересечении строк с номерами $r=r_1+r_2+1,\dots,r_0$ и столбцов с номерами $s=r_1+1,\dots,r_1+r_2$. Пусть

$$f=\mathrm{diag}\{f_1\exp[-4(\omega_1^3+\bar\omega_1^3)y],\dots,f_{r_1}\exp[-4(\omega_{r_1}^3+\bar\omega_{r_1}^3)y]\}, \tag{2.6}$$
$$g=\mathrm{diag}(g_1,\dots,g_{r_2}),\quad h=\mathrm{diag}(h_1,\dots,h_{r_2}),$$

где по определению при $r=1,\dots,r_2$ имеем

$$g_r=f_{r_1+r}\exp[-4(\omega_{r_1+r}^3+\bar\omega_{r_1+r_2+r}^3)y], \tag{2.7}$$
$$h_r=f_{r_1+r_2+r}\exp[-4(\bar\omega_{r_1+r}^3+\omega_{r_1+r_2+r}^3)y].$$

В силу (2.4) получаем, что

$$f^*=f,\quad h=\varkappa g^*. \tag{2.8}$$

Далее, в соответствии с (1.1) и (2.4)-(2.8) находим

$$\alpha f=f\alpha^*,\quad af=h\beta^*,\quad bh^*=hb^*,\quad \gamma g^*=g\gamma^*. \tag{2.9}$$

Положим теперь

$$S=\begin{vmatrix}f & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varkappa g\\ 0 & h & 0\end{vmatrix},\quad S_0=\det S. \tag{2.10}$$

Согласно (2.5)-(2.10) справедливы равенства

$$S=S^*,\quad SB^*=BS^*=BS.$$

Отсюда следует, что

$$S(1+B^*)=(1+B)S, \tag{2.11}$$

т.е. с учетом неравенства $f_r\neq 0$ при $r=1,\dots,r_0$ получаем равенство $\det(1+B)=\det(1+B^*)$. Таким образом, первое из соотношений (2.1) доказано.

Докажем теперь второе из соотношений (2.1). В силу (1.8) и (2.10) имеем

$$S_0\bar\Phi=\det\begin{vmatrix}0 & \lambda^*J_0\\ SJ_2\ell & S(1+B^*)\end{vmatrix},\quad \Psi S_0=\det\begin{vmatrix}0 & \tilde\ell JS\\ J_1\lambda & (1+B)S\end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

На основании (1.4)-(1.6), (2.4), (2.6), (2.7) и (2.10) справедливы равенства

$$\tilde\ell JS=\lambda^*J_0,\quad J_1\lambda=\varkappa SJ_2\ell. \tag{2.13}$$

В соответствии с (2.11) и (2.13) второе из соотношений (2.1) следует из равенств (2.12).

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что если величины $\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ выбраны с соблюдением условий

$$
\begin{aligned}
&1)\ \omega_r^2-|\omega_r|^2+\bar\omega_r^2=0 \quad \text{при} \quad r=1,\dots,r_1,\\
&2)\ \omega^3_{r_1+r}+\bar\omega^3_{r_1+r_2+r}=0 \quad \text{при} \quad r=1,\dots,r_2,
\end{aligned}
\qquad (2.14)
$$

то полученное нами решение системы (2.3) не зависит от y и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3u^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\varkappa|\varphi|^2\right)=0,\quad i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=u\varphi+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

играющей важную роль в ряде областей математической физики.

Выясним теперь, какие требования нужно дополнительно наложить на величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ для того, чтобы определитель D не обращался в нуль при любых вещественных значениях x,y,t. Ответ дает следующая

Теорема 3. Если входящие в определение матрицы B величины $f_1,\dots,f_{r_0},\omega_1,\dots,\omega_{r_0}$ удовлетворяют условиям

$$1)\ \operatorname{sign} f_1=\dots=\operatorname{sign} f_{r_1}=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1)=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1}), \qquad (2.15)$$

$$2)\ \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1})=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}), \qquad (2.16)$$

$$3)\ \varkappa\left[\left(\omega^3_{r_1+r}+\bar\omega^3_{r_1+r}\right)\left(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+r}\right)\right]>0 \quad \text{при} \quad r=1,\dots,r_2, \qquad (2.17)$$

то определитель $D=\det(1+B)$ отличен от нуля при любых вещественных x,y,t.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$X+\alpha X+\beta Y=0,\quad Y-\gamma Z=0,\quad aX+bY+Z=0, \qquad (2.18)$$

где матрицы α,β,γ,a,b определены ранее с помощью представления (2.5) матрицы B, а X и Y, Z — векторы-столбцы

соответственно с r_1 и r_2 компонентами. Покажем, что при выполнении условий (2.15)-(2.17) система (2.18) имеет только тривиальное решение. С этой целью сделаем в системе (2.18) замену:

$$X=f\hat X,\quad Y=h^*\hat Y,\quad Z=\hat Z,$$

где матрицы f и h определены посредством (2.6) и (2.7). В результате получим систему

$$(f+\hat\alpha)\hat X+\hat\beta\hat Y=0,\quad \hat Y-\hat\gamma\hat Z=0,\quad \hat a\hat X+\hat b\hat Y+\hat Z=0, \qquad (2.19)$$

где

$$\hat\alpha=\alpha f,\quad \hat\beta=\beta h^*,\quad \hat\gamma=(h^*)^{-1}\gamma,\quad \hat a=af,\quad \hat b=bh^*. \qquad (2.20)$$

Согласно (2.8),(2.9) и (2.20) имеем

$$\hat\alpha^*=\hat\alpha,\quad \hat\beta^*=\hat a,\quad \hat\gamma^*=\hat\gamma,\quad \hat b^*=\hat b, \qquad (2.21)$$

т.е. матрицы $f+\hat\alpha$, $\hat b$ и $\hat\gamma$ являются эрмитовыми. Далее, из системы (2.19) вытекает равенство

$$-\hat X^*(f+\hat\alpha)\hat X+\hat Y^*\hat b\hat Y+\hat Z^*\hat\gamma\hat Z=0. \qquad (2.22)$$

Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sign} f_1=\dots=\operatorname{sign} f_{r_1}=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1)=\dots=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1})=\\
&=-\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1})=\dots=-\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}),
\end{aligned}
\qquad (2.23)
$$

то матрицы $-(f+\hat\alpha)$, $\hat b$ и $\hat\gamma$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Кроме того, в силу равенств первой строки формулы (2.23) имеем $\det(f+\hat\alpha)\neq 0$. Отсюда следует, что равенство (2.22) возможно только при $\hat X=0$. Это значит, что для любого решения системы (2.19) выполняются равенства

$$\hat Y-\hat\gamma\hat Z=0,\quad \hat b\hat Y+\hat Z=0. \qquad (2.24)$$

На основе сказанного выше все собственные значения матриц $\hat b\hat\gamma$ и $\hat\gamma\hat b$ неотрицательны. Следовательно, определитель системы (2.24) отличен от нуля, т.е. $\hat{Y} = \hat{Z} = 0$. Таким образом при выполнении условий (2.17) и (2.23) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим теперь матрицы A_0 и A_1 вида

$$A_0 = \begin{vmatrix} f + \hat{\alpha} & \hat{\beta} \\ \hat{a} & \hat{b} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \hat{\gamma}.$$

Согласно (2.21) матрицы A_0 и A_1 являются эрмитовыми. Элементарный анализ показывает, что если выполнено условие (2.17) и справедливо равенство

$$\operatorname{sign} f_1 = \ldots = \operatorname{sign} f_{r_1} = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_1) = \ldots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1}) = \qquad (2.25)$$
$$= \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_1+r_2+1}) = \ldots = \operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega_{r_0}),$$

то матрицы A_0 и A_1 будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Возьмем матрицу Q вида

$$Q = \begin{vmatrix} \mathbb{1}_{r_2} & 0 \\ -q & \mathbb{1}_{r_2} \end{vmatrix},$$

где $\mathbb{1}_{r_2}$ - единичная матрица порядка r_2, а $q = \hat{a}(f + \hat{\alpha})^{-1}$. С учетом (2.21) имеем $q^* = (f + \hat{\alpha})^{-1}\hat{\beta}$. Нетрудно убедиться, что эрмитова матрица $\hat{A}_0 = Q A_0 Q^*$ имеет вид

$$\hat{A}_0 = \begin{vmatrix} f + \hat{\alpha} & 0 \\ 0 & \hat{b} - \hat{a}(f + \hat{\alpha})^{-1}\hat{\beta} \end{vmatrix}.$$

Матрицы A_0 и $\hat{A}_0$ будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Из сказанного выше вытекает, что эрмитовы матрицы

$$f + \hat{\alpha}, \quad A_1 = \hat{\gamma}, \quad A_2 = \hat{b} - \hat{a}(f + \hat{\alpha})^{-1}\hat{\beta} \qquad (2.26)$$

будут одновременно либо неотрицательны, либо неположительны. Выразим теперь с помощью первого уравнения системы (2.19) вектор $\hat{X}$ через вектор $\hat{Y}$, т.е. положим

$$\hat{X} = -(f + \hat{\alpha})^{-1}\hat{\beta}\,\hat{Y}. \qquad (2.27)$$

Это можно сделать, так как в силу равенств первой строки формулы (2.25) справедливо неравенство $\det(f + \hat{\alpha}) \neq 0$. После подстановки выражения (2.27) в третье уравнение системы (2.19) получаем систему

$$\hat{Y} - A_1\hat{Z} = 0, \quad A_2\hat{Y} + \hat{Z} = 0, \qquad (2.28)$$

где матрицы A_1 и A_2 определены посредством (2.26). С учетом сказанного выше все собственные значения матриц $A_1 A_2$ и $A_2 A_1$ неотрицательны. На этом основании определитель системы (2.28) отличен от нуля, т.е. $\hat{Y} = \hat{Z} = 0$. Далее, в силу (2.27) получаем $\hat{X} = 0$. Таким образом, при выполнении условий (2.17) и (2.25) система (2.18) имеет только тривиальное решение.

Поскольку из условий (2.15), (2.16) вытекает справедливость либо условия (2.23), либо условия (2.25), то из сказанного выше следует, что условия (2.15)-(2.17) гарантируют отсутствие у системы (2.18) нетривиального решения, что, как известно, эквивалентно отличию от нуля определителя D.

Теорема доказана.

Отметим, что условия (2.14) не противоречат условиям (2.15)-(2.17).

Система (2.3) получается из системы (1) с помощью замены t на y, а y на t. Это значит, что совершив в найденном нами решении (2.2) эту же замену, мы, очевидно, получим решение системы (1).

Сделаем несколько замечаний по поводу этого решения. В типичном случае найденное нами решение описывает взаимодействие $r_1 + r_2$ уединенных волн двух типов. Волны первого типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t)]}, \quad \varphi = 0,$$

где вещественные параметры μ_1, ν_1, τ_1 удовлетворяют условию $\tau_1 = 4(\mu_1^2 - 3\nu_1^2)$, и являются хорошо известными решениями [3] уравнения Кадомцева - Петвиашвили [4]. Волны второго типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\nu_2 y - \tau_2 t)]},$$

$$\varphi = c_0 \frac{\exp[i\nu_2(x + 2\nu_2 y) + i\omega t]}{ch[\mu_2(x + 2\nu_2 y - \tau_2 t)]}\exp[-i(\mu_2^2 + \nu_2^2)y],$$

где вещественные параметры $\mu_2, \nu_2, \tau_2, \omega$ и комплексная величина c_0 удовлетворяют единственному условию

$$\left[\tau_2 - 4\left(\mu_2^2 - 3\nu_2^2\right)\right]\mu_2^2 = 4\varkappa\,|c_0|^2,$$

и, следовательно, для существования волн этого типа необходимо выполнение условия

$$\left[\tau_2 - 4\left(\mu_2^2 - 3\nu_2^2\right)\right]\varkappa > 0\,.$$

В типичном случае взаимодействие всех волн является упругим, т.е. результат взаимодействия выражается в соответствующих фазовых сдвигах всех взаимодействующих волн.

Ситуация меняется коренным образом, если на величины $\omega_1, \dots, \omega_{\tau_0}$ наложить определенные дополнительные связи. В этом случае в найденном нами решении появляются волны, имеющие существенно разные асимптотики при $t \to -\infty$ и при $t \to \infty$. Простейший пример, иллюстрирующий это явление, обнаружен нами ранее в работе /5/. Однако этот пример не исчерпывает всех имеющихся здесь возможностей. Детальный анализ всех вариантов будет опубликован отдельно.

Литература

1. Mel'nikov V.K. Lett.Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.129-136.
2. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Physica D, 1986, v.18 D, N 1, p.455-463.
3. Satsuma Y. J.Phys. Soc.Japan, 1976, v.40, N 1, p.286-290.
4. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, т.192, N4, с.753-756.
5. Мельников В.К., Препринт ОИЯИ Р2-86-276, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Мельников В.К. Р2-86-689

Прямой метод для получения многосолитонного решения задачи о взаимодействии волн на плоскости x,y

Найдены явные выражения для многосолитонного решения системы уравнений, описывающей взаимодействие волн на плоскости x,y. При этом доказательства всех необходимых утверждений основаны на простых фактах из теории матриц и не апеллируют к методу обратной задачи рассеяния. Полученные результаты имеют тесную связь с рядом задач математической физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-86-689

A Direct Method for Deriving a Multi-Soliton Solution for the Problem of Interaction of Waves on the x,y Plane

Explicit expressions are found for a multi-soliton solution of the system of equations describing the interaction of waves on the x,y plane. The proof of all necessary statements follows from the theory of matrices and is not based on the inverse scattering method. The obtained results are closely related to some problems of the mathematical physics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986