объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-685

Н.С.Шавохина

НЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в Сборник "Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной".

1986

Несимметричная метрика введена в теорию поля Эйнштейном [1], Борном и Инфельдом [2]. С их точки зрения случай симметричной метрики, когда нет электромагнитного поля, тривиален.

В данной работе рассмотрены алгебраические и дифференциальные свойства несимметричной метрики. Установлено, что несимметричная метрика характеризуется парой векторных и парой ковекторных полей, связанных двумя тождествами. Если эти поля равны, то несимметричную метрику называем гармонической. Примером гармонической метрики является любая метрика, удовлетворяющая уравнениям Борна - Инфельда. Теория гармонической метрики может послужить ближайшим обобщением теории Борна - Инфельда.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКИ

Несимметричная метрика на N-мерном многообразии задается тензорным полем

$$g_{ab}(x)\,dx^a \otimes dx^b. \qquad /1/$$

Предположим, что определитель g матрицы (g_{ab}) не равен нулю, и зададим тензорное поле

$$\tilde{g}^{mn}(x)\frac{\partial}{\partial x^m} \otimes \frac{\partial}{\partial x^n}, \qquad /2/$$

полагая, что число $g\tilde{g}^{mn}$ равно алгебраическому дополнению элемента g_{mn} матрицы (g_{ab}). При этом определитель $\tilde{g}$ матрицы $(\tilde{g}^{mn})$ также не равен нулю и $g\tilde{g} = 1$. Тензорное поле /2/ называется обратным к полю /1/. В свою очередь, поле /1/ называется обратным к полю /2/. Для взаимно обратных полей

$$g_{sb}\tilde{g}^{sn} = \delta^n_b = g_{bs}\tilde{g}^{ns}, \qquad /3/$$

где δ^n_b - символ Кронекера.

Обозначим

$$h_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} + g_{ba}), \quad \phi_{ab} = \frac{1}{2}(g_{ab} - g_{ba}),$$
$$\tilde{h}^{mn} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{mn} + \tilde{g}^{nm}), \quad \tilde{\phi}^{mn} = \frac{1}{2}(\tilde{g}^{mn} - \tilde{g}^{nm}), \qquad /4/$$

так что

$$g_{ab} = h_{ab} + \phi_{ab}, \quad \tilde{g}^{mn} = \tilde{h}^{mn} + \tilde{\phi}^{mn}. \qquad /5/$$

Из /5/ и /4/ следуют равенства

$$\frac{1}{2}(g_{sb}\tilde{g}^{sn} + g_{bs}\tilde{g}^{ns}) = h_{sb}\tilde{h}^{sn} + \phi_{sb}\tilde{\phi}^{sn},$$

$$\frac{1}{2}(g_{sb}\tilde{g}^{sn} - g_{bs}\tilde{g}^{ns}) = h_{bs}\tilde{\phi}^{sn} - \phi_{bs}\tilde{h}^{sn}. \qquad /6/$$

Подставляя сюда /3/, находим

$$h_{sb}\tilde{h}^{sn} + \phi_{sb}\tilde{\phi}^{sn} = \delta^{n}_{b}, \qquad /7/$$

$$h_{bs}\tilde{\phi}^{sn} = \phi_{bs}\tilde{h}^{sn}. \qquad /8/$$

Добавляя к левой и правой частям равенства /8/ одно и то же слагаемое $h_{bs}\tilde{h}^{sn}$, получаем

$$h_{bs}\tilde{g}^{sn} = g_{bs}\tilde{h}^{sn}. \qquad /9/$$

Отсюда следует, что определители h и $\tilde{h}$ матриц (h_{ab}) и $(\tilde{h}^{ab})$ связаны равенством

$$h\tilde{g} = g\tilde{h}. \qquad /10/$$

Поэтому они либо оба равны нулю, либо оба не равны нулю. Мы будем рассматривать второй случай.

Введем тензорное поле

$$h^{mn}(x)\frac{\partial}{\partial x^{m}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{n}}, \qquad /11/$$

обратное к полю

$$h_{ab}(x)dx^{a} \otimes dx^{b}, \qquad /12/$$

и рассмотрим тензорное поле

$$f_{ab}(x)dx^{a} \otimes dx^{b}, \qquad /13/$$

где

$$f_{ab} = h_{ab} - \phi_{am}h^{mn}\phi_{nb}. \qquad /14/$$

Применяя сюда /8/ и /7/, получаем

$$f_{as}\tilde{h}^{sp} = h_{as}\tilde{h}^{sp} - \phi_{as}\tilde{\phi}^{sp} = \delta^{p}_{a}. \qquad /15/$$

Следовательно, поле /13/ обратно к полю

$$\tilde{h}^{mn}(x)\frac{\partial}{\partial x^{m}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{n}}. \qquad /16/$$

Отметим, наконец, что

$$g_{am}h^{mn}g_{bn} = f_{ab} = g_{ma}h^{mn}g_{nb} \qquad /17/$$

и что

$$\phi_{as}h^{sb} = f_{as}\tilde{\phi}^{sb}. \qquad /18/$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕСИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ

Умножим равенство /7/ на $\sqrt{|g|}$ и продифференцируем его по x^{n}. В результате получим

$$(\partial_{n}h_{sb})\sqrt{|g|}\tilde{h}^{sn} + h_{sb}\partial_{n}(\sqrt{|g|}\tilde{h}^{sn}) + (\partial_{n}\phi_{sb})\sqrt{|g|}\tilde{\phi}^{sn} + \phi_{sb}\partial_{n}(\sqrt{|g|}\tilde{\phi}^{sn}) = \partial_{b}\sqrt{|g|}. \qquad /19/$$

Так как по правилу дифференцирования определителей

$$dg = g\tilde{g}^{pq}dg_{pq} = g(\tilde{h}^{pq}dh_{pq} + \tilde{\phi}^{pq}d\phi_{pq}),$$
$$d\tilde{g} = \tilde{g}g_{pq}d\tilde{g}^{pq} = \tilde{g}(h_{pq}d\tilde{h}^{pq} + \phi_{pq}d\tilde{\phi}^{pq}), \qquad /20/$$

то

$$\partial_{b}\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}(\tilde{h}^{sn}\partial_{b}h_{sn} + \tilde{\phi}^{sn}\partial_{b}\phi_{sn}). \qquad /21/$$

Кроме того,

$$\tilde{h}^{sn}\partial_{n}h_{sb} = \frac{1}{2}\tilde{h}^{sn}(\partial_{n}h_{sb} + \partial_{s}h_{nb}),$$

$$\tilde{\phi}^{sn}\partial_{n}\phi_{sb} = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{sn}(\partial_{n}\phi_{sb} - \partial_{s}\phi_{nb}).$$

Следовательно, формулу /19/ можно записать в виде

$$h_{bs}\partial_{n}(\sqrt{|g|}\tilde{h}^{sn}) + \sqrt{|g|}\tilde{h}^{sn}[snb] = \phi_{bs}\partial_{n}(\sqrt{|g|}\tilde{\phi}^{sn}) + \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\tilde{\phi}^{sn}(\partial_{s}\phi_{nb} + \partial_{n}\phi_{bs} + \partial_{b}\phi_{sn}), \qquad /22/$$

где $[snb]$ – скобки Кристоффеля

$$[snb] = \frac{1}{2}(\partial_{s}h_{nb} + \partial_{n}h_{sb} - \partial_{b}h_{sn}) \qquad /23/$$

для тензора h_{ab}.

Выражение /22/ подсказывает, что надо рассматривать ковариантные производные со связностью Кристоффеля

$$\left\{ {m \atop ab} \right\} = [abs]h^{sm}. \qquad /24/$$

Будем обозначать их D_{p}. Например,

$$D_{p}\phi_{ab} = \partial_{p}\phi_{ab} - \left\{ {s \atop pa} \right\}\phi_{sb} - \left\{ {s \atop pb} \right\}\phi_{as},$$
$$D_{p}\tilde{\phi}^{mn} = \partial_{p}\tilde{\phi}^{mn} + \left\{ {m \atop ps} \right\}\tilde{\phi}^{sn} + \left\{ {n \atop ps} \right\}\tilde{\phi}^{ms}. \qquad /25/$$

В этих обозначениях формула /22/ записывается в виде

$$h_{bs}D_{n}(\sqrt{|r|}\tilde{h}^{sn}) = \phi_{bs}D_{n}(\sqrt{|r|}\tilde{\phi}^{sn}) + \frac{1}{2}\sqrt{|r|}\tilde{\phi}^{sn}(D_{s}\phi_{nb} + D_{n}\phi_{bs} + D_{b}\phi_{sn}), \qquad /26/$$

где τ - скалярная функция, равная

$$\tau = gh^{-1}. \qquad /27/$$

Обратимся теперь к равенству /8/. Умножим его на $\sqrt{|\tau|}$ и возьмем ковариантную дивергенцию D_n. В результате получим

$$h_{bs} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{\phi}^{sn}) = \phi_{bs} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{h}^{sn}) + \sqrt{(\tau)}\tilde{h}^{sn} D_n \phi_{bs}. \qquad /28/$$

ВЕКТОРНЫЕ И КОВЕКТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКИ

Согласно /26/ и /28/, векторы

$$H^a = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{h}^{an}), \qquad /29/$$

$$\Phi^a = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{\phi}^{an}) \qquad /30/$$

и ковекторы

$$\Psi_a = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^{mn}(D_a\phi_{mn} + D_m\phi_{na} + D_n\phi_{am}), \qquad /31/$$

$$G_a = \tilde{h}^{mn} D_n \phi_{am} \qquad /32/$$

следующим образом связаны друг с другом:

$$h_{ab} H^b = \phi_{ab}\Phi^b + \Psi_a,$$
$$h_{ab}\Phi^b = \phi_{ab} H^b + G_a. \qquad /33/$$

Отсюда находим

$$\Psi_a + G_a = (H^b + \Phi^b) g_{ba},$$
$$\Psi_a - G_a = g_{ab}(H^b - \Phi^b). \qquad /34/$$

Затем с помощью /3/ получаем

$$H^a + \Phi^a = \tilde{g}^{ab}(\Psi_b + G_b),$$
$$H^a - \Phi^a = \tilde{g}^{ba}(\Psi_b - G_b), \qquad /35/$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{|\tau|}} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{g}^{an}) = \tilde{g}^{ab}(\Psi_b + G_b),$$
$$\frac{1}{\sqrt{|\tau|}} D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{g}^{na}) = \tilde{g}^{ba}(\Psi_b - G_b). \qquad /36/$$

Из /33/ находим также

$$H^a = h^{as}\phi_{sb}\Phi^b + h^{ab}\Psi_b,$$
$$\Phi^a = h^{as}\phi_{sb} H^b + h^{ab} G_b. \qquad /37/$$

Подставляя последнее из равенств /37/ в первое из равенств /33/, получаем

$$\Psi_a = f_{ab} H^b - \phi_{as} h^{sb} G_b. \qquad /38/$$

Подставляя первое из равенств /37/ во второе из равенств /33/, получаем

$$G_a = f_{ab}\Phi^b - \phi_{as} h^{sb}\Psi_b. \qquad /39/$$

Наконец, для сравнения запишем тождества /34/ и /35/ рядом в следующем виде:

$$\Psi_a = H^b h_{ba} + \Phi^b\phi_{ba}, \quad H^a = \tilde{h}^{ab}\Psi_b + \tilde{\phi}^{ab} G_b,$$
$$G_a = H^b\phi_{ba} + \Phi^b h_{ba}, \quad \Phi^a = \tilde{\phi}^{ab}\Psi_b + \tilde{h}^{ab} G_b. \qquad /40/$$

Векторы /29-30/ и ковекторы /31-32/ будем называть характеристиками несимметричной метрики.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ

Расположим характеристики несимметричной метрики в виде квадрата:

$$\begin{matrix} H & \Phi \\ G & \Psi. \end{matrix} \qquad /41/$$

Если две характеристики, лежащие на одной стороне этого квадрата, равны нулю, то равны нулю и остальные две.

Действительно, согласно /40/,

$$(H = 0, \ \Phi = 0) \leftrightarrows (G = 0, \ \Psi = 0), \qquad /42/$$

а согласно /37-39/,

$$(H = 0, \ G = 0) \leftrightarrows (\Phi = 0, \ \Psi = 0). \qquad /43/$$

Если все характеристики /41/ равны нулю, то метрику называем гармонической. Из /35-36/ следует, что гармоническая метрика вполне характеризуется уравнениями

$$D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{g}^{an}) = 0, \quad D_n(\sqrt{|\tau|}\tilde{g}^{na}) = 0. \qquad /44/$$

Отсюда и происходит название - гармоническая метрика, поскольку уравнения /44/ аналогичны уравнениям, которым удовлетворяет симметричная метрика в гармонических координатах.

МЕТРИКА БОРНА-ИНФЕЛЬДА

В теории Борна-Инфельда [2] считается, что

$$\phi_{ab} = \partial_a \phi_b - \partial_b \phi_a, \qquad /45/$$

где $\phi_a(x)$ - ковекторное поле. Поэтому тензор

$$D_a \phi_{mn} + D_m \phi_{na} + D_n \phi_{an} = \partial_a \phi_{mn} + \partial_m \phi_{na} + \partial_n \phi_{am} \qquad /46/$$

равен нулю. Следовательно, ковектор /31/ равен нулю.

Уравнения Борна-Инфельда получаются в результате варьирования интеграла

$$V = \int \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^N \qquad /47/$$

по ϕ_a. Приравнивая вариацию нулю, получаем

$$\partial_b \sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab} = 0. \qquad /48/$$

Эти уравнения означают, что вектор /30/ равен нулю, поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{|\tau|}} D_n (\sqrt{|\tau|}\, \tilde{\phi}^{an}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_n (\sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{an}). \qquad /49/$$

Итак, в теории Борна-Инфельда

$$\Psi = 0, \quad \Phi = 0. \qquad /50/$$

Следовательно, метрика Борна-Инфельда является гармонической.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

Согласно /21/, вариация интеграла /47/ при $\delta h_{ab} = 0$ равна

$$\delta V = \int \frac{1}{2} \sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab}\, \delta \phi_{ab}\, dx^1 \ldots dx^N.$$

Подставляя сюда /45/, получаем

$$\delta V = - \int \sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab} \partial_b \delta \phi_a\, dx^1 \ldots dx^N.$$

Так как

$$-\sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab} \partial_b \delta\phi_a = \partial_b (\sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab}) \delta\phi_a - \partial_b (\sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab} \delta\phi_a),$$

то, отбрасывая поверхностный интеграл, получаем

$$\delta V = \int \partial_b (\sqrt{|g|}\, \tilde{\phi}^{ab}) \delta\phi_a\, dx^1 \ldots dx^N$$

Отсюда непосредственно следуют уравнения Борна-Инфельда /48/.

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как и в теории Борна-Инфельда, в общем случае несимметричной метрики полагаем, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля равен

$$T^{ab} = h^{ab} - \sqrt{\tau}\, \tilde{h}^{ab}.$$

Его ковариантная дивергенция со связностью /24/ в случае гармонической метрики равна нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Единая полевая теория тяготения и электричества /1925/. - Собр.научных трудов, т.2. "Наука", М., 1966, с.171.
2. Born M., Infeld L. Foundations of the New field Theory. Proc.Roy.Soc. A., 1934, 144, p.425.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 октября 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Шавохина Н.С.

Р2-86-685

Несимметричная метрика в нелинейной теории поля

Рассмотрены алгебраические и дифференциальные свойства несимметричной метрики, введенной в теорию поля Эйнштейном, а затем Борном и Инфельдом. Установлено, что несимметричная метрика характеризуется парой векторных и парой ковекторных полей, связанных двумя тождествами. Если эти поля равны нулю, то несимметричная метрика называется гармонической. Примером гармонической метрики является любая метрика, удовлетворяющая уравнениям Борна-Инфельда. Теория гармонической метрики может послужить ближайшим обобщением теории Борна-Инфельда.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Shavokhina N.S.

P2-86-685

Nonsymmetric Metric in Nonlinear Field Theory

Algebraic and differential properties are considered of a nonsymmetric metric introduced into field theory by Einstein and subsequently by Born and Infeld. It is shown that the nonsymmetric metric is characterized by a pair of vector and a pair of covector fields connected by two identities. If these fields are zero, the nonsymmetric metric is called harmonic; an example is any metric obeying the Born-Infeld equations. The theory of harmonic metric may be considered as a direct generalization of the Born-Infeld theory.

The investigation has benn performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986