

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-86-68

С.Г.Горишний, С.А.Ларин\*

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ  
АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНЫХ  
РАЗЛОЖЕНИЙ  
В МИНИМАЛЬНОЙ ВЫЧИТАТЕЛЬНОЙ СХЕМЕ

Направлено в журнал "Nuclear Physics B"

---

\* Институт ядерных исследований АН СССР, Москва

1986

## I. Введение

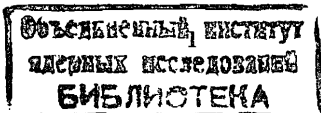
В отсутствие точных методов теория возмущений (ТВ) остается одним из основных вычислительных инструментов в квантовой теории поля. Однако даже в рамках ТВ аналитическое вычисление функций Грина (ФГ), зависящих от большого числа внешних параметров, сопряжено со значительными техническими трудностями. Это делает весьма полезными различные асимптотические операторные разложения (АОР), такие, как разложения Вильсона для произведений составных операторов на малых расстояниях<sup>/1/</sup>, разложения по большой массе<sup>/2/</sup> и ряд других. Но, конечно же, большинство приложений АОР непертурбативные, поскольку структура таких разложений удобна для учета эффектов, связанных с выходом за рамки ТВ. Такой учет обычно делается путем введения феноменологических матричных элементов операторов, при этом коэффициентные функции (КФ) разложений вычисляются в рамках ТВ<sup>/3,4/</sup>.

Как хорошо известно, наиболее удобной на сегодняшний день вычислительной схемой является схема минимальных вычитаний (МК-схема)<sup>/5/</sup>, основанная на размерной регуляризации<sup>/6/</sup>. В частности, недавно в рамках этой схемы был развит очень эффективный алгоритм вычисления импульсных безмассовых интегралов пропагаторного типа ( $\rho$ -интегралов) до трех петель включительно, что позволяет вычислять четырехпетлевые приближения ренормгрупповых  $\beta$ -функций и аномальных размерностей составных операторов<sup>/7/</sup>. Однако для того, чтобы применить ренормгрупповые методы к АОР, необходимо уметь вычислять КФ таких разложений. В обычных схемах типа схем вычитания в точке<sup>/8/</sup> формулы для КФ достаточно хорошо известны<sup>/9/</sup>, однако практически они неудобны уже для двухпетлевых расчетов. До недавних пор ситуация для МВ-схемы была противоположной: хотя техника вычислений здесь гораздо более эффективна, удобные формулы для КФ в этой схеме были найдены не так давно<sup>/10,11/</sup>. Например, в случае разложений на малых расстояниях двух составных операторов КФ могут быть выражены через  $\rho$ -интегралы<sup>/11/</sup>.

Алгоритм работ<sup>/11/</sup> удобен для практических целей (см.<sup>/12/</sup>) и, как было отмечено в<sup>/11/</sup>, может быть, в принципе, обобщен на другие АОР в евклидовой области. В настоящей работе мы следуем программе, намеченной в<sup>/11/</sup>, и проводим это обобщение для случаев разложения мультилокальных операторов на малых расстояниях.

## 2. Алгоритм

Сначала мы обсудим несколько основных идей, лежащих в основе нашего подхода к определению КФ различных асимптотических разложений.



Во всех случаях нашими отправными точками будут: (а) наиболее общая форма разложения и (б) одно свойство КФ в МВ-схеме, а именно, их аналитичность по малым (фиксированным) параметрам (см. ниже). Этого оказывается достаточно для нахождения явных формул, выражающих КФ через ФГ, зависящие только от больших (асимптотических, стремящихся к бесконечности) переменных. В наши цели не входит обсуждение того, существует ли АОР в такой форме или конечны в пределе снятия регуляризации КФ и операторы, входящие в него. Отметим только, что все эти проблемы могут быть решены с помощью подхода работ /13/ (см. также /10/ в случае разложений на малых расстояниях). Предлагаемый алгоритм обходит все усложнения, связанные с этими вопросами, и решает задачу выделения КФ (которая наиболее существенна для практических целей), самым простым и элегантно способном. Более того, формулы, найденные таким образом, оказываются очень удобными с вычислительной точки зрения.

Рассмотрим  $T$  - произведение некоторых локальных операторов  $A, B, C, \dots$ . Пусть мы интересуемся поведением такого объекта в евклидовой области, где некоторые импульсы и/или массы стремятся к бесконечности, а остальные параметры фиксированы. Пусть мы знаем, что в рассматриваемой области произведение  $T(A, B, C, \dots)$  может быть представлено асимптотическим операторным рядом вида:

$$T(A, B, C, \dots) = \sum_n C_n O_n + \sum_{n,m} C_{nm} T(O_n O_m) + \dots \quad (2.1)$$

Здесь  $\{O_n\}$  - полный набор составных локальных операторов,  $C_n, C_{nm}$  и т.д. - КФ. Индексы  $n, m, \dots$  соответствуют спину, твисту, изоспину и другим квантовым числам операторов. Как правило, в правой части разложений возникает только конечное число сумм по локальным, биллокальным  $\dots$ ,  $K$  - локальным операторам. Операторы зависят только от малых (т.е. фиксированных) параметров. Более того, в достаточно общей ситуации в МВ - схеме они содержат всю неаналитичность по таким переменным, так что КФ оказываются аналитическими функциями малых размерных параметров /10, 13/. Это последнее свойство, свойство аналитичности по малым переменным, оказывается очень важным для нашего метода. Следовательно, мы будем использовать размерную регуляризацию и МВ-схему, в которой оно выполняется.

Для определенности будем пользоваться представлением ФГ и составных операторов через функциональные интегралы. В частности, производящий функционал (ПФ) функций Грина составного оператора  $A(x)$  записывается в виде:

$$T_A(x, J) = \frac{1}{Z(J)} \int d\varphi A(x) e^{i S(\varphi) + i \int J(x) \varphi(x) dx} \quad (2.2)$$

где  $S(\varphi)$  - это действие теории,  $J$  - источник поля  $\varphi$  (оно может быть бозонным или фермионным),  $Z(J)$  есть ПФ для ФГ, порожденный действием  $S(\varphi)$ . В терминах ПФ разложение (2.1) может быть переписано так:

$$T_{ABC\dots}(J) = \sum_n C_n T_{O_n}(J) + \sum_{n,m} C_{nm} T_{O_n O_m}(J) + \dots \quad (2.3)$$

где опущены все аргументы ПФ, кроме  $J$ . Наша цель - найти формулы для  $C_n, C_{nm}$  и т.д., при условии, что известна форма разложения и выполняется свойство аналитичности КФ. Конечно, в каждом конкретном случае вид этих формул зависит от выбора  $T_{ABC\dots}$  и от природы асимптотических параметров. Тем не менее, они могут быть найдены с помощью алгоритма, составные части которого всегда одни и те же. Опишем его.

Рассмотрим более детально, как разложение (2.3) видоизменяет диаграммы, дающие вклад в левую часть (2.3). Во-первых, введем определение. Назовем диаграмму асимптотически неприводимой (АН), если она не может быть разделена на два несвязанных куска удалением одной из линий, несущих только фиксированные (малые) импульсы и массы (но, возможно, такое разделение может быть осуществлено при удалении линии с большим импульсом и/или массой). Нетрудно увидеть, что каждая диаграмма, дающая вклад в  $T_{ABC\dots}$  в импульсном пространстве, состоит из нескольких АН-блоков, соединенных друг с другом только посредством линий с малыми параметрами. Таким образом, мы имеем следующую картину:

вся диаграмма может быть представлена древесным графом, все линии которого несут малые импульсы и массы, а эффективными вершинами являются АН-блоки. В свою очередь, каждый АН-блок может быть представлен древесным графом, содержащим только асимптотические линии (т.е. несущие асимптотические импульсы и/или массы), и вершины которого есть обычные одночастично-неприводимые (1ЧН) блоки. В нашем рассмотрении понятие АН-блока очень естественно, поскольку такие блоки совершенно независимы по отношению к процедуре асимптотического разложения. Действительно, вся диаграмма есть просто произведение АН-блоков, и каждый из них может быть разложен в ряд отдель-

но от остальных<sup>х)</sup>. Таким образом, имеет смысл начать с изучения разложения АН-компонент. Чтобы выделить АН компоненту  $T_{ABC...}$ , нужно вычесть из  $T_{ABC...}$  все диаграммы, которые состоят, по крайней мере, из двух АН-блоков. Выясним, как такая вычислительная процедура изменяет структуру правой части разложения (2.3).

Для простоты мы рассмотрим здесь случай без тяжелых частиц. Изменения, которые необходимо внести, чтобы включить их в рассмотрение, минимальны.

Будем вычитать все асимптотически приводимые диаграммы в несколько этапов, и после каждого этапа будем выяснять, что при этом меняется в правой части (2.3). Первый шаг состоит в удалении всех диаграмм, содержащих, по крайней мере, один ВН-блок без вершин, соответствующих операторам А, В, С, ... . Одна такая диаграмма изображена на рис. 1а), где АН-блок без операторов показан ниже пунктирной линии. Эти блоки не содержат асимптотических переменных и потому не играют никакой роли в формировании КФ. Они дают вклад только в ПФ операторов. Мы можем убрать их без изменения КФ, и это может быть сделано с помощью преобразования Лежандра по источнику  $J$ , несущему фиксированные параметры:

$$L_{J \rightarrow \Phi} T_{...}(J) = T_{...}(\Phi), \quad (2.4)$$

где  $\Phi$  - классическое поле. После этого ПФ локальных операторов в правой части (2.3) будут содержать только 1ЧН - диаграммы. Действительно,  $L_{J \rightarrow \Phi}(T_{O_n}(J)) = T_{O_n}(\Phi) = [T_{O_n}]^{1ЧН}$ . Следующий шаг состоит в удалении диаграмм, которые могут быть представлены в виде двух АН-блоков, каждый из которых содержит вершины, соответствующие операторам А, В, С, ... . Пример такой диаграммы приведен на рис. 1б), где пропагатор, пересеченный пунктирной линией, несет малый импульс. Будучи разложенной в ряд, такая диаграмма не дает вклада в ПФ локальных операторов (а следовательно, и в  $C_n$ ). Более того, вклады от диаграмм такого типа в ПФ биллокальных операторов находятся во взаимно-однозначном соответствии с одночастично-приводимыми компонентами, оставшимися в  $T_{O_n O_m}(J)$  после применения (2.4). Таким образом, опуская такие диаграммы, мы оставим в правой части (2.3) только 1ЧН-компоненту ПФ  $T_{O_n O_m}$ . Обозначим линейное преобразование, удаляющее этот тип асимптотически приводимых диаграмм, через  $L^{(2)}$ . Тогда мы имеем:

х) Здесь есть аналогия с  $\mathcal{R}$ -операцией, где каждый 1ЧН-блок также перенормируется независимо от других.

$$L_{J \rightarrow \Phi} T_{ABC...}(J) \equiv T_{ABC...}(\Phi) = \sum_n C_n T_{O_n} + \sum_{n,m} C_{nm} T_{O_n O_m} + \dots;$$

$$L^{(2)} T_{ABC...}(\Phi) = \sum_n C_n T_{O_n} + \sum_{n,m} C_{nm} [T_{O_n O_m}]^{1ЧН} + \dots \quad (2.5)$$

Уже на этой стадии мы можем заключить, что КФ  $C_{nm}$  не независимы. В самом деле, вычитая соотношение (2.5) одно из другого, получаем:

$$(1 - L^{(2)}) L_{J \rightarrow \Phi} T_{ABC...}(J) = \sum_{n,m} C_{nm} (T_{O_n O_m} - [T_{O_n O_m}]^{1ЧН}) + \dots \quad (2.6)$$

Левая часть этого соотношения является произведением двух и более АН-блоков. Биллокальный член справа образуется из разложения тех диаграмм, которые могут быть расщеплены на два АН-блока, причем  $C_{nm}$  выражаются через произведение КФ перед локальными операторами, возникшими в разложении каждого из этих АН-блоков.

Картина, выявленная на этой стадии, остается неизменной после дальнейших шагов, после удаления диаграмм, состоящих из трех, четырех и более АН-блоков с операторными вершинами. Например, величина  $L^{(3)} L^{(2)} L_{J \rightarrow \Phi} T_{ABC...}$  не содержит диаграмм, состоящих из трех и двух АН-блоков, и в ее разложении присутствуют только 1ЧН-компоненты локальных, биллокальных и трилокальных операторов. Более того, КФ при трилокальном операторе могут быть выражены через КФ при локальных операторах, возникающих в разложениях составляющих АН-блоков. Таким образом, мы можем заключить, что величина  $[T_{ABC...}(J)]^{АН}$ , образующаяся после вычитания всех асимптотически приводимых графов, (i) - содержит в своем разложении только 1ЧН-компоненты ПФ операторов; (ii) - КФ этого разложения те же, что и в (2.3); (iii) - все КФ перед мультилокальными операторами могут быть выражены через произведения КФ при локальных членах в разложениях некоторых АН-компонент  $T_{ABC...}(J)$ . Такие АН-компоненты есть не что иное, как АН-части  $T$  - произведений, составленных из различных операторов из набора А, В, С, ... . Отсюда можно сделать следующий вывод. Чтобы найти КФ разложения (2.3), необходимо уметь определять только КФ при локальных членах в разложениях  $T$ -произведений, образованных всеми возможными наборами опе-

раторов  $A, B, C, \dots$ . В этом смысле единственными фундаментальными объектами, подлежащими вычислению, являются КФ при локальных операторах в различных АОР. Так что в дальнейшем мы будем заниматься определением именно их, и нашей отправной точкой будет разложение

$$[\Gamma_{ABC\dots}]^{AH} = \sum_n C_n T_{0_n}^{14H} + \sum_{n,m} C_{nm} T_{0_n 0_m}^{14H} + \dots \quad (2.7)$$

Напомним еще раз, что КФ зависят от малых импульсов и масс аналитически /10,13/.

Теперь мы готовы продемонстрировать простой прием, позволяющий выделить  $C_n$  из (2.7). Рассмотрим для этой цели систему "проекторов"  $\{P_n\}$ , обладающую свойством

$$P_n \cdot \Gamma_{0_n}^B(\Phi_B) = \delta_{nk}, \quad (2.8)$$

где метка "B" означает, что рассматривается "голая", перенормированная величина, а  $\delta_{nk}$  есть символ Кронекера. Такая система может быть сконструирована следующим образом.

Каждый ПФ  $\Gamma_{0_n}$  содержит в разложении по  $\Phi$  древесный член

$$\Gamma_{0_n}(\Phi) = \int \prod_i \Phi(p_i) dp_i \cdot O_n^{tree}(\{p_i\}, m) + \dots, \quad (2.9)$$

где  $O_n^{tree}$  - некоторый полином по импульсам  $\{p_i\}$  и массам  $m$ . Всегда можно выбрать систему дифференциальных операторов  $D_k(\{\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial m}\})$ , полиномиальных по производным и дуальных набору полиномов  $\{O_n^{tree}\}$ , так что

$$D_k(\{\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial m}\}) \cdot O_n^{tree}(\{p_i\}, m) \Big|_{p_i=m=0} = \delta_{nk}. \quad (2.10)$$

Затем определим "матричные элементы":

$$\langle 0 | \Gamma_{\dots}^B(\Phi_B) | \{p_j\} \rangle \equiv \prod_j \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \Phi_B(p_j)} \Big|_{\Phi=0} \cdot \Gamma^B(\Phi_B), \quad (2.11)$$

которые выделяют из ПФ  $\Gamma_{0_n}(\Phi)$  ФГ, имеющую древесный вклад. Теперь набор проекторов  $\{P_n\}$  может быть выбран в форме

$$P_n \Gamma_{\dots}^B \equiv D_n(\{\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial m}\}) \cdot \langle 0 | \Gamma_{\dots}^B | \{p_i\} \rangle \Big|_{p_i=m=0} \quad (2.12)$$

Убедимся, что так определенная система обладает свойством (2.8). Применяя  $P_n$  к  $\Gamma_{0_n}^B$ , мы получаем безмассовые вакуумные (т.е. с нулевыми внешними импульсами) диаграммы. Если такая диаграмма содержит хотя бы одно интегрирование, то она равна нулю согласно хорошо известному свойству размерной регуляризации /6,14/

$$\int d^D k \cdot k^{2-\alpha} = 0, \quad \alpha \neq -D/2, \quad (2.13)$$

где  $D=4-2\epsilon$  - размерность пространства-времени в размерной регуляризации. Таким образом, после действия  $P_n$  выживают только древесные члены, и мы имеем:

$$P_n [\Gamma_{0_n}^B(m_B, \Phi_B)] = D_n \cdot O_n^{tree} \Big|_{p_i=m=0} = \delta_{nk}.$$

Возвращаясь к (2.7), замечаем, что  $[\Gamma_{0_n 0_m}^B]^{14H}$  и т.д. не имеют древесных вкладов, так что действие  $P_n$  должно их "занулять". Поэтому естественно попробовать использовать  $P_m$  для извлечения  $C_n$ .

Существует, однако, одна трудность, заключающаяся в том, что малые внешние параметры амплитуды  $\Gamma_{ABC\dots}$  входят в  $\Gamma_{0_n}$ ,  $\Gamma_{0_n 0_m}$  и т.д. в правой части (2.7) по-разному. Некоторые малые импульсы, входящие в  $C_n$  (аналитически), не содержатся в  $C_{nm}$ , поскольку зависимость от них поглощается оператором  $\Gamma_{0_n 0_m}$ , то же самое верно для КФ при  $\Gamma_{0_n 0_m}$  по отношению к  $C_{nm}$  и так далее. Тем не менее, данная трудность легко обходится, если использовать свойство аналитичности. А именно, добавим к  $P_n$ , который зависит только от внешних аргументов  $\Gamma_{0_n}$ , оператор Тейлора  $\hat{T}$ , разлагающий коэффициенты  $C_n$  по степеням малых параметров, входящих в них. Например, если малый параметр является импульсом  $q$ , то  $\hat{T}(q) = \sum_n \frac{1}{n!} q^{n\alpha} \frac{\partial^n}{\partial q^\alpha} \Big|_{q=0}$ , и расширенной системой проекторов будут операторы  $P_n(q) \equiv \hat{T}(q) \cdot P_n$ . Конечно же,  $\hat{T}(q) C_n(q) = C_n(q)$ .

Чтобы применить  $P_n$  к (2.7), последнее необходимо переписать в терминах перенормированных величин. Перенормировка ПФ в правой части (2.7) выглядит следующим образом:

$$\Gamma_n(\phi) = \sum_n z_{nm} \Gamma_{0_m}^b(\phi_b);$$

$$\Gamma_{n,0_m}^{14H}(\phi) = \sum_{k,r} z_{nk} z_{mr} [\Gamma_{0_k,0_r}^b(\phi_b)]^{14H} + \sum_r z_{nm}^r \Gamma_{0_r}^b(\phi_b), \quad (2.14)$$

где  $\phi_b$  — перенормированное классическое поле, а  $z_{nm}$ ,  $z_{nm}^r$  — перенормировочные константы, являющиеся полиномами по всем размерным параметрам /15/. Подставляя эти выражения в (2.7) и применяя  $P_n$  к обеим его частям, получаем:

$$P_n [\Gamma_{ABC\dots}]^{AH} = \sum_k C_k \cdot z_{nk} + \sum_{k,m} C_{km} \cdot z_{km}^n + \dots$$

или

$$C_k = \sum_n P_n [\Gamma_{ABC\dots}]^{AH} \cdot z_{nk}^{-1} - \sum_{n,m,r} C_{nm} z_{nm}^r \cdot z_{rk}^{-1} - \dots \quad (2.15)$$

Как было показано выше,  $C_{nm}$  не независимы и могут быть выражены через КФ при локальных членах в разложениях  $\Gamma$  — произведений, содержащих меньшее, чем в  $\Gamma_{ABC\dots}$ , число операторов. Для них также можно выписать уравнения типа (2.15). Коэффициенты  $C_{nm}$ , входящие в них, снова выражаются через некоторые КФ при локальных членах и так далее. Так как на каждом следующем шаге разлагаемое  $\Gamma$ -произведение состоит из все меньшего числа операторов, то процедура обрывается, когда мы приходим к  $\Gamma$  — произведениям, разложения которых содержат только локальные операторы. Таким образом, уравнение (2.15) можно рассматривать как рекуррентное соотношение для определения  $C_n$ . Например, если в (2.15) присутствуют только локальные члены, как это случается на последнем шаге рекуррентной процедуры, то

$$C_k = \sum_n P_n [\Gamma_{ABC\dots}]^{AH} \cdot z_{nk}^{-1}, \quad (2.16)$$

что воспроизводит результат, полученный в нашей более ранней работе /11/.

Отметим интересный факт. Величина  $P_n [\Gamma_{ABC\dots}]^{AH}$  содержит, вообще говоря, инфракрасные сингулярности, возникающие после зануления  $\{p_i\}$  и  $m$  и проявляющиеся в виде полюсов по  $1/\epsilon$ ,  $\epsilon = 2 - D/2$ .  $C_k$ ,  $C_{nm}$  и т.д. конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$ , так что эти сингулярности (инфракрасные!) должны удаляться ультрафиолетовыми по-

люсами перенормировочных констант  $z_{nm}$ ,  $z_{nm}^r$  и т.д. Таким образом, в нашем случае инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости оказываются связанными.

Чтобы сделать эту связь более ясной, можно воспользоваться свойствами  $R^*$  — операции, предложенной авторами работы /16/.  $R^*$  — операция является обобщением ультрафиолетовой  $R$  — операции на случай инфракрасных расходимостей и позволяет вычестить их наряду с ультрафиолетовыми. Инфракрасные контрчлены, ассоциируемые с вычитаемыми членами, локальны в импульсном пространстве и содержат произвол вида  $O(\epsilon^0)$  (ср. конечный произвол в ультрафиолетовых контрчленах). Например, сингулярности, порождаемые неинтегрируемым при  $p=0$  фактором  $1/p^{2(k+2)}$ ,  $k \geq 0$ , могут быть компенсированы контрчленами

$$\left( d^D p \frac{1}{p^{2(k+2)}} \rightarrow d^D p \left( \frac{1}{p^{2(k+2)}} - \frac{\mu^{-2\epsilon} \cdot i \cdot \pi^2}{4^k k!(k+1)!} \left( \frac{1}{\epsilon} + C_k(\epsilon) \right) \cdot \square^k \delta^D(p) \right) \right),$$

где  $\mu$  — единица массы и  $C_k(\epsilon) = O(\epsilon^0)$  — произвольные константы, которые могут быть фиксированы наложением на перенормированное выражение каких-то дополнительных условий. Таким образом,  $R^*$  — операция (i) позволяет получить конечное выражение даже в присутствии инфракрасных расходимостей, как это происходит в нашем случае, и (ii) содержит конечный произвол.

Посмотрим еще раз на правую часть уравнения (2.15). Она имеет форму некоторой  $R^*$  — операции: член  $P_n [\Gamma_{ABC\dots}]^{AH}$  есть "перенормированное" выражение, в то время как остальные члены (и константы  $z_{nk}^{-1}$ ) вычитают инфракрасные расходимости, при этом  $z_{nk}^{-1}$  и  $z_{nk}^r$  выступают как инфракрасные перенормировочные константы. Найдем теперь, какое условие должно быть положено на  $R^*$  — операцию, чтобы воспроизвести правую часть уравнения (2.15).

Для этой цели рассмотрим выражение  $R^* [P_n \Gamma_{0_k}^b(\phi)]$ . Из-за свойства (2.13) в нем выживают только члены без петель (напомним, что  $P_n$  зануляет все размерные параметры в  $\Gamma_{0_k}^b$ ). За исключением борновского члена, такие члены есть не что иное, как произведения ультрафиолетовых и инфракрасных контрчленов. Полное выражение должно быть конечным, так что сумма таких произведений также должна быть конечной<sup>x)</sup>. Более того, мы можем положить эту сумму равной ну-

x) Аналогичное рассуждение можно найти в работе /17/.

лю, используя конечный произвол инфракрасных вычитаний. Тогда единственным оставшимся вкладом будет борновский, и мы имеем:

$$R^* [P_n \Gamma_{O_k}^B] = S_{nk}. \quad (2.17)$$

Это соотношение и является искомым условием на  $R^*$ -операцию. Действительно, применяя теперь  $R^*$ -операцию, фиксированную уравнением (2.17), к обоим частям (2.7), мы получаем:

$$C_n = R^* P_n [\Gamma_{AB\bar{C}\dots}^B]^{AN}, \quad (2.18)$$

поскольку члены типа  $R^* P_n [\Gamma_{O_k O_k}^B]^{14N}$  не имеют борновских членов и могут быть положены равными нулю благодаря конечному произволу. Сравнивая теперь (2.15) и (2.18), мы видим, что ультрафиолетовые константы перенормировки поглотились  $R^*$ -операцией. Конечно же, уравнения (2.17) и (2.18) могут рассматриваться как компактная форма записи явной формулы (2.15). Их основное достоинство — универсальность: они имеют одну и ту же форму во всех приложениях.

### 3. Разложения на малых расстояниях

Сначала рассмотрим случай, когда имеется только один большой внешний евклидов импульс.

Пусть  $A, B$  и  $\{A_i\}_r = A_1, \dots, A_r$  — некоторые операторы из полной системы  $\{O_n\}$ . Рассмотрим следующий ПФ функций Грина произведения  $T(A(x)B(\omega))$  в импульсном пространстве:

$$T_{AB}(q, J, \{J_i\}_r) = \frac{1}{Z(J)} \int dx e^{-iqx} \left\{ d\varphi A(x) B(\omega) e^{i(S(\varphi) + J\varphi + \sum_{i=1}^r J_i A_i)} \right\}, \quad (3.1)$$

где  $\{J_i\}_r = J_1, \dots, J_r$  — источники операторов  $\{A_i\}_r$ . ПФ (3.1) можно рассматривать как ПФ произведений вида  $T(AB \prod A_i)$ .

При  $q \rightarrow \infty$  в евклидовой области он может быть представлен следующим асимптотическим рядом

$$T_{AB}(q, J, \{J_i\}_r) = \sum_n C_n(q, \{J_i\}_r) \cdot T_{O_n}(J, \{J_i\}_r), \quad (3.2)$$

где

$$T_{O_n}(J, \{J_i\}_r) = \frac{1}{Z(J)} \int d\varphi O_n(\omega) e^{i(S(\varphi) + J\varphi + \sum_{i=1}^r A_i J_i)} \quad (3.3)$$

Единственное отличие этого ряда от обычного разложения двух операторов на малых расстояниях  $1/r$  ((3.2) совпадает с ним при  $J_i=0$ ) заключается в том, что  $C_n$  являются функционалами источников  $\{J_i\}_r$ . Эти источники играют роль констант связи взаимодействия, генерируемых вершинами  $\{A_i\}_r$ , и  $C_n$  зависят от них наравне с константами взаимодействия лагранжиана<sup>x</sup>.

Разложение (3.2) является производящим для так называемых "мультилокальных операторных разложений", т.е. разложений мультилокальных операторов  $T(AB \prod A_i)$  на малых расстояниях. Они могут быть легко восстановлены из (3.2). В самом деле, беря вариационные производные по  $\{J_i\}_r$  от обеих частей равенства (3.2), получаем:

$$\begin{aligned} T_{AB\{A_j\}_r}(q, \{q_j\}_r, J) &\equiv \prod_{j \in \{j\}_r} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j(q_j)} T_{AB}(q, J, \{J_j\}_r) \Big|_{J_j=0} = \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{\{j\}_k} C_n(q, \{q_j\}_k) \cdot T_{O_n\{A_j\}_{r-k}}(\{q_j\}_{r-k}, J). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем наборам индексов  $\{j\}_k$  и  $\{j\}_{r-k}$ , таких, что  $\{j\}_k \cap \{j\}_{r-k} = \emptyset$ ;  $\{j\}_k \cup \{j\}_{r-k} = \{j\}_r = 1, 2, \dots, r$ . Наборы  $\{q_j\}_k$  и  $\{A_j\}_k$  обладают тем же свойством. КФ  $C_n$  определяются соотношением:

$$C_n(q, \{q_j\}_k) = \prod_{j \in \{j\}_k} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j(q_j)} \cdot C_n(q, \{J_i\}_r) \Big|_{J_i=0}$$

и, наконец, ПФ операторов есть

$$T_{O_n\{A_j\}_k}(\{q_j\}_k, J) = \prod_{j \in \{j\}_k} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_j(q_j)} \cdot T_{O_n}(J, \{J_i\}_r) \Big|_{J_i=0}$$

При этом предполагается, что во всех этих соотношениях все импульсы  $\{q_j\}_r$  источников  $\{J_i\}_r$  (вернее, их фурье-образов) фиксированы при  $q \rightarrow \infty$ .

<sup>x</sup>В противоположность этому, источник  $J$  порождает лишь слабо связанные графы, и  $C_n$  от него не зависят (см. предыдущий раздел).

В приложениях часто используются некоторые специальные случаи (3.2). При  $r=0$ , как было отмечено выше, (3.2) переходит в разложение Вильсона, а при  $r=1$  получаем разложение трилокального оператора  $\Gamma(A(x)B(y)A_k(z))$ , которое использовалось в [18, 19] для оценки адронных формфакторов:

$$\Gamma_{AB}(q, J) = \sum_n C_n(q) \cdot \Gamma_{O_n}(J), \quad (r=0), \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{ABA_k}(q, q_k, J) = \sum_n C_n(q) \cdot \Gamma_{O_n A_k}(q_k, J) + \sum_n C_n(q, q_k) \Gamma_{O_n}(J), \quad (r=1). \quad (3.6)$$

Займемся получением формул для вычисления  $C_n(q, \{q_i\}_r)$ .

Чтобы применить для этой цели технику проекторов, описанную выше, нужно доказать свойство аналитичности. Аналитическая зависимость  $C_n(q, \{q_i\}_r)$  от малых импульсов  $\{q_i\}_r$  следует из того факта, что  $\{q_i\}_r$  могут войти в  $C_n$  только через производные вида  $\partial_{J_i(x)}$  (см. выше). Кроме того,  $C_n$  аналитичны по массам, так как в нашем случае применимы аргументы работ [10, 13]. Установив это свойство, мы можем выбрать систему проекторов для выделения  $C_n(q, \{q_i\}_k)$  в виде:

$$P_n(\{q_i\}_k, m) \equiv \hat{\Gamma}(\{q_i\}_k, m) \cdot P_n, \quad (3.7)$$

где  $P_n$  действует на  $\Gamma_{O_n}^B$  согласно (2.8), а  $\hat{\Gamma}$  есть оператор, разлагающий  $C_n$  в ряд Тейлора по  $\{q_i\}_k$  и  $m$ , причем, очевидно,  $\hat{\Gamma} C_n = C_n$ .

Обратимся теперь к применению первых двух шагов алгоритма. Заметим, что все КФ, входящие в (3.4), возникают также при локальных членах в разложениях

$$\Gamma_{AB\{A_k\}}(q, \{q_i\}_k, J) = \sum_n C_n(q, \{q_i\}_k) \cdot \Gamma_{O_n}(J) + \dots, \quad (3.8)$$

как это следует из формул (3.2)–(3.4). Таким образом, второй шаг алгоритма тривиален, так что остается только выделить из  $\Gamma_{AB\{A_k\}}$  АН-компоненту. В рассматриваемом случае имеется только одна асимптотическая переменная – импульс  $q$ , входящий в вершины А и В. Диаграмма будет давать вклад в АН-компоненту, только если  $q$  может протекать через каждую ее линию. Удобное практическое правило для отбора АН-диаграмм может быть сформулировано следующим об-

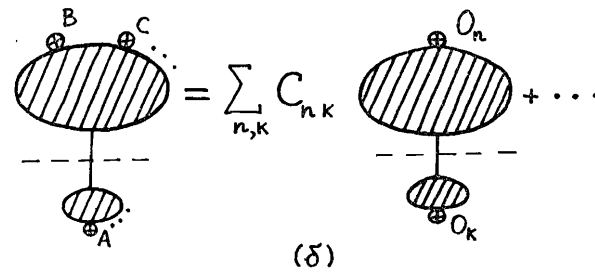
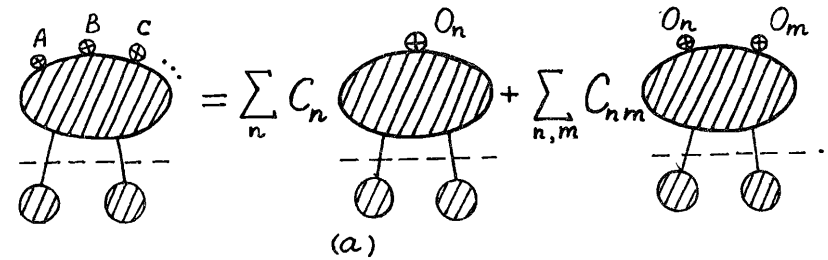


Рис. 1.



Рис. 2.

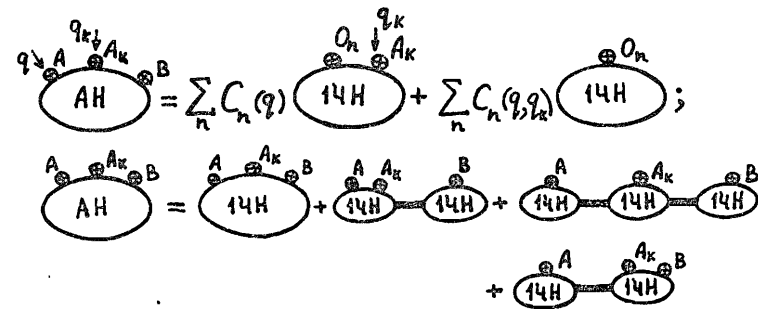


Рис. 3.



разом. Соединим вершины А и В фиктивной линией. Если после этого образуется 14Н диаграмма, то исходный граф дает вклад в АН-компоненту, и наоборот.

Разложение АН-компонент содержит только 14Н-операторные диаграммы (см. предыдущий раздел). Применяя  $P_n(\{q_i\}_k, m)$  к  $[T_{AB\{A_i\}_k}]^{AH}$  и убирая все расходимости с помощью  $R^*$ -операции, определенной уравнением (2.17), мы имеем:

$$C_n(q, \{q_i\}_k) = R^* P_n(\{q_i\}_k, m) [T_{AB\{A_i\}_k}(q, \{q_i\}_k, J)]^{AH} \quad (3.9)$$

Явная форма действия  $R^*$ -операции, аналогичная уравнению (2.15), определяется структурой обычной ультрафиолетовой перенормировки мультилокальных операторов  $[T_{O_n\{A_i\}_k}]^{14H}$ , входящих в правую часть (3.4), и выглядит довольно громоздко. В целях экономии места мы рассмотрим только случай разложений (3.5) и (3.6), проиллюстрированных на рис. 2 и 3. Толстые линии соответствуют полным пропагаторам. Нужно выделить из этих разложений только АН-компоненты и переписать их в терминах "голых" величин. Функционалы  $\Gamma_{O_n}$  и  $[\Gamma_{O_n A_k}]^{14H}$  перенормируются согласно (2.14), где  $Z_{nm}^v$  полиномиальны по  $q_k$ . Применяя теперь соответствующие проекторы к обеим частям разложений АН-компонент, извлеченных из (3.4) и (3.5), мы находим:

$$C_m(q) = \sum_n P_n [T_{AB}(q, J)]^{AH} \cdot Z_{nm}^{-1}, \quad (3.10)$$

$$C_m(q, q_k) = \sum_n P_n(q_k) [T_{ABA_k}(q, q_k, J)]^{AH} \cdot Z_{nm}^{-1} - \sum_{n,l} C_n(q) Z_{nk}^l \cdot Z_{lm}^{-1} \quad (3.11)$$

Соотношения (3.9) или (3.10) и (3.11) дают нам решение поставленной задачи. Они выражают КФ через безмассовые интегралы с одним внешним импульсом, возникающие после применения  $P_n(\{q_i\}_k, m)$ . Как говорилось во введении, техника вычисления таких интегралов развита вплоть до трех петель <sup>17/</sup>. Более того, существует SCHOONSCHIP программа, вычисляющая их аналитически <sup>20/</sup>. Таким образом, полученные формулы удобны для практических вычислений. Они были успешно использованы, например, в <sup>12,22/</sup> для вычисления высших поправок к партонным правилам сумм, а также в <sup>19/</sup> для анализа тождеств Уорда. Отметим также, что в качестве побочного продукта формулы (3.9)-(3.11) дают точный ответ на вопрос, вынесенный в заголовок работы <sup>21/</sup>: могут ли быть массовые сингулярности вычтены минимальным образом? А

именно, эти сингулярности, проявляющиеся в виде полюсов по  $\epsilon$  после зачленения масс, должны быть вычтены так, как это предписывается соотношениями (3.9)-(3.11). Мы видим, что инфракрасные вычитания вообще содержат не только полюса по  $\epsilon$ . Тем не менее, они полностью фиксируются ультрафиолетовыми МВ-контрчленами операторов.

Мы не рассмотрели из-за недостатка места в данной работе случай операторного разложения в пределе большой массы, возникающего в задаче отщепления тяжелых частиц <sup>22/</sup>. Наш алгоритм может быть применен и в этом случае. При этом вычисление параметров эффективной "легкой" теории (или коэффициентных функций разложения в пределе большой массы) сводится к расчету массивных вакуумных (без внешних импульсов) интегралов. Основные идеи предложенного алгоритма являются весьма общими, поэтому после небольших изменений он может быть обобщен и на ряд других случаев, например, на случай операторного разложения, возникающего при изучении глубоко неупругого рассеяния двух виртуальных фотонов <sup>23/</sup>, а также на случай разложений, генерируемых некоторой иерархией евклидовых импульсных переменных типа  $\{Q_i\} \gg \{P_i\} \gg \dots$ . Эти вопросы будут рассмотрены в отдельной публикации.

В заключение авторы выражают глубокую признательность профессорам В.А. Матвееву, В.А. Мещерякову и А.Н. Тавхелидзе за постоянную поддержку. Мы благодарны также К.Г. Четыркину за ценные замечания и Ф.В. Трачеву за полезные обсуждения.

#### Литература

1. Wilson K. Phys. Rev., 1969, 179, p. 1499.
2. Ovrut B., Schnitzer H. Phys. Rev., 1980, D21, p. 3369; Weinberg S. Phys. Lett., 1980, 91B, p. 51.
3. Christ N., Hasslacher B., Mueller A.H. Phys. Rev., 1972, D6, p. 3543.
4. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl. Phys., 1979, BI47, p. 385.
5. t'Hooft G. Nucl. Phys., 1973, B61, p. 455.
6. t'Hooft G., Veltman M. Nucl. Phys., 1972, B44, p. 189.
7. Tkachov F.V. Phys. Lett., 1981, 100B, p. 65; Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Nucl. Phys., 1981, BI92, p. 159.

8. Gelmaster W., Gonsalvez R. Phys. Rev., 1980, D21, p. 3112.
9. Zimmerman W. Ann Phys., 1973, 77, p. 570.
10. Chetyrkin K.G., Corishny S.G., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1982, 119B, p. 407.
11. Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1983, 124, p. 217.
12. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1984, 137, p. 230.
13. Tkachov F.V. Phys. Lett., 1983, 124B, p. 212;  
Pivovarov G.B., Tkachov F.V. INR preprint P-0361, Moscow, 1984.
14. Leibbrandt G. Rev. Mod. Phys., 1975, 47, p. 849.
15. Collins J.C. Nucl. Phys., 1975, B92, p. 477.
16. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. Phys. Lett., 1982, 114B, p. 340.
17. Chetyrkin K.G. Phys. Lett., 1983, 126B, p. 371.
18. Balitsky I., Yung A. Phys. Lett., 1983, 129B, p. 328.  
Иоффе Б.Л., Смилга А.В. Письма в ЖЭТФ, 1983, 37, с. 250;
19. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Krasulin A.B., Larin S.A., Matveev V.A. INR preprint P-0337, Moscow, 1984.
20. Горинский С.Г., Ларин С.А., Ткачев Ф.В. Препринт ИЯИ П-0330, Москва, 1984.
21. Broadhurst D.J., Generalis S.C. Phys. Lett., 1984, 142B, p. 64.
22. Горинский С.Г., Ларин С.А. ОИЯИ, P2-85-703, Дубна, 1985.
23. Witten E., Nucl. Phys., 1977, B120, p. 189;  
Balitsky I.I., Phys. Lett., 114B, p. 53.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 февраля 1986 года.

Горинский С.Г., Ларин С.А. P2-86-68  
Коэффициентные функции асимптотических операторных  
разложений в минимальной вычитательной схеме

Предложен эффективный и общий алгоритм вычисления коэффициентных функций асимптотических операторных разложений. При его использовании необходимо вычислять функции Грина, зависящие только от больших асимптотических переменных, вычисление же матричных элементов операторов не обязательно. Приведены явные формулы для параметров асимптотических операторных разложений по большим евклидовым импульсам. Аналогичные формулы могут быть получены для разложений по большой массе и в любом другом случае, когда коэффициентные функции разложения являются полиномами по малым импульсам и массам.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики  
ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Gorishny S.G., Larin S.A. P2-86-68  
Coefficient Functions of Asymptotic Operator Expansions  
in Minimal Subtraction Scheme

An efficient and general algorithm for evaluating the coefficient functions of asymptotic operator expansions is presented. In applying this algorithm one should evaluate Green functions depending only on large asymptotic variables, whereas computing matrix elements of operators are unnecessary. Explicit formulae are presented for the parameters of asymptotic operator expansions in large Euclidean momenta. Analogous formulae can be found for large mass expansions and in any other case, if coefficient functions of an expansion are polynomial in small momenta and masses.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986