объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-645

Нгуен Суан Хан, В.Н.Первушин

ОПЕРАТОРНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В НЕАБЕЛЕВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Направлено в "International Journal of Modern Physics A"

1986

I. Введение

Функциональный интеграл в настоящее время является наиболее простым и эффективным методом формулировки теории возмущений в калибровочных теориях /I,2,3/. Неудивительно, что широкое применение квантовой теории неабелевых полей стало возможным после открытия функциональной подстановки Фаддеева - Попова/I/.

Тем не менее, принято считать, что наиболее последовательным и строгим обоснованием функционального интеграла для любой теории является его конструкция с применением канонического квантования(предложенная еще в первой работе Фейнмана /4,5/). Последовательное каноническое операторное квантование неабелевой калибровочной теории было сделано в работах /5/ (см.также/6/). В этих работах достигается релятивистская ковариантность канонического квантования путем использования калибровочно-инвариантных тензоров Белинфанте и нелокальных коммутационных соотношений. Однако в этих работах не строится функциональный интеграл. С другой стороны, для обоснования функционального интеграла используются, как правило, такие модификации канонического квантования, (например, локальные коммутационные соотношения/2/ или канонический тензор энергии импульса /3/), которые так или иначе нарушают релятивистскую ковариантность. Неудивительно, что полученные таким путем функциональные интегралы ведут к релятивистски нековариантным функциям Грина фермионов.

Цель настоящей работы - получить функциональный интеграл, который бы соответствовал релятивистски ковариантной схеме квантования Швингера/5/. Мы используем для этой цели калибровочно-инвариантные физические переменные, которые предложены в работах /7,8/ и которые обосновывают применение нелокальных коммутационных соотношений и тензоров Белинфанте.

В разделе I дается конструкция калибровочно-инвариантных переменных. В разделе 2 строится функциональный интеграл с учетом вейлевского упорядочивания операторных множителей. Раздел 3 посвящен переходу в функциональном интеграле от кулоновской калибровки к аксиальной калибровке и решению ее проблем.

I. Конструкция калибровочно-инвариантных переменных

Рассмотрим неабелеву калибровочную теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar\psi\left(\frac{i}{2}\gamma_\mu \overleftrightarrow{\nabla}_\mu - m\right)\psi, \quad S = \int d^4x\, \mathcal{L}(x),$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \hat A_\mu, \quad \hat A_\mu = g\,\frac{A^a_\mu \tau_a}{2i}, \qquad \text{(I)}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu,$$

который инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\hat A^g_\mu = g(\hat A_\mu + \partial_\mu)g^{-1}, \quad \psi^g = g\psi, \qquad (2)$$

где $g(\vec x, t)$ есть матрица со значением в группе $SU(2)$ (или $SU(N)$)

При построении гамильтониана теории необходимо явно выделить истинные динамические переменные. Лагранжиан (I) вырожден – он не содержит производной по времени от поля A^a_0. Вследствие этого канонический импульс поля A^a_0 тождественно равен нулю, и мы не можем постулировать каноническое соотношение для A^a_0, F^a_{00}. Переменная A^a_0 не является истинной динамической переменной. Вариация действия по A^a_0 приводит к уравнению связи (уравнение Гаусса). Поэтому для квантования теории Янга-Миллса возможны два варианта: I) нужно использовать модифицированный канонический формализм /I,9,IO/ 2) или исключить A^a_0 до квантования. Здесь мы придерживаемся второго варианта, т.е. используем уравнение Гаусса

$$\frac{\delta S}{\delta A^a_0} = 0 \;\Rightarrow\; (\nabla_i^2 A_0)^a = \nabla_i^{ab}\partial_0 A^b_i + j^a_0 \qquad (3)$$

$$\left(j^a_\mu = g\bar\psi\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\psi, \quad \nabla_i^{ab} = \nabla_i^{ab}(A) = \delta^{ab}\partial_i + g\epsilon_{abc}A^c_i\right),$$

чтобы выразить A^a_0 в терминах других динамических переменных A_i, ψ. С точностью до решения однородного уравнения $\nabla^2\Phi = 0$ можем представить A^a_0 в следующем виде:

$$A^a_0 = a^a_0(A) + \frac{1}{\nabla_i^2}j^a_0; \quad a^a_0(A) = \frac{1}{\nabla_i^2}\nabla_k\partial_0 A^a_k. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (I), получим

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ij} - \nabla_i\frac{1}{\nabla_k^2}\nabla_j\right)\partial_0 A^a_j\right]^2 - \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 + \frac{1}{2}j^a_0\frac{1}{\nabla_k^2}j^a_0 - \qquad (5)$$

$$- j^a_i A^a_i + \bar\psi\left(\frac{i}{2}\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - m\right)\psi + j^a_0\frac{1}{\nabla_k^2}(\nabla_i\partial_0 A^a_i).$$

Найденный лагранжиан зависит только от $\hat A_i$, ψ и инвариантен относительно преобразований исходных полей $\hat A_i$, ψ

$$\hat A^g_i = g(\hat A_i + \partial_i)g^{-1}, \quad \psi^g = g\psi. \qquad (6)$$

На решениях уравнения связи (4) выберем динамические переменные $\hat A^I_i$, ψ^I, нелокально зависящие от исходных полей,

$$\hat A^I_i = v_I(\hat A_i + \partial_i)v_I^{-1}, \quad \psi^I = v_I\psi, \qquad (7)$$

где матрица v_I имеет вид T упорядоченной экспоненты

$$v_I(A) = T\exp\left\{\int^t dt'\,\hat a_{0'}\right\}, \quad \partial_0 v_I = v_I\hat a_0, \qquad (8)$$

преобразующейся, согласно определениям (4), (8), по правилу

$$v_I(A^g) = v_I^g = v_I\, g^{-1}. \qquad (9)$$

Легко проверить, что нелокальные переменные $\hat A^I_i$, ψ^I в силу (9) калибровочно инвариантны

$$(\hat A^I_i)^g = \hat A^I_i, \quad (\psi^I)^g = \psi^I. \qquad \text{(IO)}$$

Это значит, что переменные (7) содержат только физические степени свободы и не зависят от чисто калибровочных компонент $g(\vec x, t)$. Требование калибровочной инвариантности эквивалентно нелинейной калибровке:

$$\nabla_i(A^I)\partial_0\hat A^I_i = 0, \quad \int^t dt'\,\nabla_i(A^I)\partial_{0'}\hat A^I_i = 0. \qquad \text{(II)}$$

Вообще говоря, калибровочно-инвариантные переменные фиксируются с точностью до преобразований

$$\hat A^f_i = v_f(A^I)(\hat A^I_i + \partial_i)v_f(A^I)^{-1}, \quad \psi^f = v_f(A^I)\psi^I. \qquad \text{(I2)}$$

В частности, можно найти в явном виде точечное преобразование

$$v_f = v_T = \exp\left(\frac{1}{\nabla\partial}\partial_k\hat A^I_k\right); \quad \partial_i v_T = v_T\,\partial_i\frac{1}{\nabla\partial}\partial_k\hat A^I_k, \quad \nabla\partial = \nabla_k\partial_k, \qquad \text{(I3)}$$

которое ведет к линейному дополнительному условию

$$\partial_i \hat{A}_i^T = v_T [\partial_i \hat{A}_i^I - \nabla_i v_T^{-1} \partial_i v_T] v_T^{-1} = 0 \tag{14}$$

и допускает проведение канонической схемы квантования. Формулы (7)-(14) дают явное построение калибровочно-инвариантных переменных, удовлетворяющих условию поперечности (формальное доказательство существования таких переменных было дано в работе [6]. Поперечные переменные (14) выделены принципом соответствия абелевой теории ($g \to 0$), в которой поперечные и исходные калибровочно-инвариантные переменные совпадают.

Выражая лагранжиан (5) в терминах калибровочно-инвариантных поперечных переменных $\hat{A}_i^T$, ψ^T, получим окончательный ответ:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left(F_{oi}^a(A^T)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(F_{ij}^a(A^T)\right)^2 - j_i^{aT} A_i^{aT} + \frac{1}{2} j_o^{aT} \frac{1}{\nabla_i^2} j_o^{aT} + \bar{\psi}^T\left(\frac{i}{2}\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} - m\right)\psi^T, \tag{15}$$

где

$$F_{oi}(A^T) = \left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla\partial}\nabla_j\right) F_{oj}^T(A^T) + \partial_i \frac{1}{\nabla\partial} j_o^T; \quad \partial_o A_i^T = F_{oi}^T(A^T), \tag{16}$$

который точно совпадает с лагранжианом в кулоновской калибровке. Здесь и в дальнейшем, где нет необходимости явно выписывать цветовые индексы, мы их опускаем.

Физические наблюдаемые (импульс, гамильтониан и т.д.) можно выразить только в терминах калибровочно-инвариантных переменных $\hat{A}_i^T$, ψ^T, если использовать для их построения калибровочно-инвариантный тензор энергии-импульса Белинфанте

$$T_{\mu\nu} = F_\mu^\lambda F_{\lambda\nu} + \frac{i}{4}\bar{\psi}\left(\overleftrightarrow{\nabla}_\mu \gamma_\nu + \overleftrightarrow{\nabla}_\nu \gamma_\mu\right)\psi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x). \tag{17}$$

Гамильтониан, импульс и тензор Лоренца имеют вид

$$H = \int d^3x\, T_{oo} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} F_{oi}^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \bar{\psi}^T\left(\frac{i}{2}\gamma_k \overleftrightarrow{\nabla}_k + m\right)\psi^T\right], \tag{18}$$

$$P_k = \int d^3x\, T_{ok} = \int d^3x \left[F_{oi} F_{ki} + \frac{i}{2}\psi^{+T}\overleftrightarrow{\nabla}_k \psi^T + \frac{i}{8}\partial_i\left(\bar{\psi}^T[\gamma_k,\gamma_i]\psi\right)\right], \tag{19}$$

$$M_{ok} = x_k H - t P_k + \int d^3y\, (y_k - x_k) T_{oo}, \tag{20}$$

2. Квантование и функциональный интеграл

Для обобщения классической теории на квантовый случай мы должны выписать одновременные коммутационные соотношения и исключить псевдофизические величины типа нулевой энергии, нулевого заряда и т.д. Для такого исключения, как правило, используют нормальные произведения [11] для динамических переменных, квадратично зависящих от операторов с одинаковыми аргументами. Однако, как было показано [12], запись гамильтониана взаимодействия в виде N -произведения является излишней в спинорной электродинамике и, вообще говоря, противоречит калибровочной инвариантности в скалярной электродинамике и в теории Янга-Миллса. Достаточно симметризовать гамильтониан по некоммутирующим бозе-операторам и антисимметризовать по антикоммутирующим ферми-операторам [13,14], т.е. использовать симметричное вейлевское квантование. Именно этому рецепту мы и будем следовать в дальнейшем.

В соответствии с предписаниями канонического квантования поля A_i^T и $F_{oi}(A^T)$ считаются независимыми операторами. Поскольку эти поля A_i^T, F_{oi} тождественно удовлетворяют условию поперечности и уравнению Гаусса $\nabla_i F_{oi}(A^T) = j_o$ соответственно, то мы должны выбрать коммутационные соотношения, тождественно удовлетворяющие обоим условиям

$$i\left[F_{oi}^a(\vec{x},t), A_{oj}^{bT}(\vec{y},t)\right] = \left[\delta_{ij}\delta^{ab} - \partial_i\left(\frac{1}{\nabla\partial}\nabla_j\right)^{ab}\right]\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{21}$$

$$\left\{\psi_\alpha^T(\vec{x},t), \psi_\beta^{+T}(\vec{y},t)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{22}$$

Если представить F_{oi}^a в следующем виде:

$$F_{oi}^a(x) = F_{oi}^{Ta}(x) - \partial_i f^a(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\nabla\partial}\left[g A_k^T(x) \times F_{ok}^T(x) + j_o^T(x)\right], \tag{23}$$

то легко показать, что (21) согласовано с коммутационным соотношением чисто поперечных полей

$$i\left[F_{oi}^{Ta}(\vec{x},t) A_j^{Tb}(\vec{y},t)\right] = \delta^{ab}\left(\delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\partial^2}\partial_j\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{24}$$

На основании соотношений (21-24) найдем еще некоторые важные для проверки релятивистской инвариантности схемы минимального квантования коммутаторы (см. приложение):

$$i\,[F_{oi}^{a}(\vec{x},t), F_{ok}^{b}(\vec{y},t)] = F_{oi}^{c}(x)\circ\varepsilon_{ca'a}\,\partial_k^{y} D(y,x)_{ba'} - \varepsilon_{a'bc}\,\partial_i^{x} D(x,y)_{aa'}\circ F_{ok}^{c}(y), \tag{25}$$

$$i\,[F_{ik}^{a}(\vec{x},t), F_{ol}^{b}(\vec{y},t)] = \left(\nabla_i^{ab}\delta_{kl} - \nabla_k^{ab}\delta_{il}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \varepsilon_{adc}\,F_{ik}^{d}(x)D(x,y)_{cb}\overleftarrow{\partial}_l^{y}, \tag{26}$$

где D – функция Грина, подчиняющаяся уравнению

$$-(\nabla\partial)_{ac} D_{cb}(x,y) = \delta_{ab}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{27}$$

Последний оператор градиента $\overleftarrow{\partial}_l^{y}$ действует на функцию, находящуюся слева от него, и знак точки обозначает симметричное произведение операторов A.B = I/2(AB + BA). В отличие от калибровочно-инвариантных переменных, использованных в КЭД, в неабелевой теории переменные F_{oi}, F_{ik} вследствие (25) и (26) приводят к следующим важным соотношениям для коммутатора операторов с одинаковыми аргументами:

$$[F_{oi}^{a}(x), F_{oi}^{a}(x)] = 2\Delta T_{oo} + \frac{1}{2} X_i^a(x)^2, \tag{28}$$

$$[F_{ki}^{a}(x), F_{oi}^{a}(x)] = 2X_i^a(x)\,F_{ki}^{a}(x), \tag{29}$$

где $X_i^a(x) = -\frac{1}{2} g\,\epsilon_{bac}\,\partial_i D_{cb}(x,x)$, $D(x,x) = \lim\limits_{\vec{y}\to\vec{x}} D(x,y)$, (30)

$$\Delta T_{oo} = \frac{1}{8} g^2 \epsilon_{abc}\,\partial_i D_{cd}(x,x)\,\epsilon_{dle}\,\partial_i D(x,x)_{ea}. \tag{3I}$$

Формулы (30),(3I) выражают нелинейный характер неабелевой теории. Они возникают только в квантовой теории при симметризации бозе-операторов F_{oi}^a, F_{ki}^a и в последовательной формулировке неабелевой теории в терминах калибровочно-инвариантных переменных. Поэтому в тензоре Белинфанте нужно доопределить порядок умножения операторов F_{oi}^a, F_{ki}^a и контрчлены, которые бы восстанавливали алгебру наблюдаемых группы Лоренца.

Из критерия лоренц-инвариантности Швингера в виде коммутатора между плотностью энергии и плотностью импульса

$$\frac{1}{i}[T_{oo}(x), T_{oo}(y)] = -\left(T_{ok}(x) + T_{ok}(y)\right)\partial^k\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{32}$$

и условия положительности выражения

$$\frac{1}{2}(F_{oi}^a)^2 + \Delta T_{oo} = \frac{1}{2} F_{oi}^a\circ F_{oi}^a - \frac{1}{8} X_i^{a\,2} = \frac{1}{2}(F_{oi}^a - X_i^a)(F_{oi}^a + X_i^a) > 0 \tag{33}$$

можно найти следующие выражения для плотности энергии и импульса.

$$T_{oo}(x) = T_{oo}^{B}(x) + \Delta T_{oo}\ ; \quad T_{ok} = T_{ok}^{B}. \tag{34}$$

Полученный дополнительный контрчлен ΔT_{oo}, определенный формулой (3I), в точности совпадает с выражением, найденным Швингером несколько другим подходом, и играет важную роль в доказательстве лоренц-инвариантности "минимального" канонического квантования неабелевой теории.

Используя калибровочно-инвариантные нелокальные переменные, коммутационные соотношения (2I),(22),(25), (26) и оператор буста, с учетом (34) находим следующие трансформационные свойства операторов относительно преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} i\varepsilon_k[M_{ok}, \psi^T] &= \delta_L^o\psi^T + i\hat{\Lambda}\psi^T, \\ i\varepsilon_k[M_{ok}, A_i^{Ta}] &= \delta_L^o A_i^{Ta} + \nabla_i^{ab}\Lambda^b. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь δ_L^o – обычные преобразования Лоренца, а

$$\Lambda^a = \frac{\varepsilon_k}{\nabla\partial}\left(\partial_o A_k^{Ta} + \partial_k A_o^{Ta}\right), \quad A_o^{Ta} = \frac{1}{\nabla\partial}\,\partial_i^2 f^a \tag{36}$$

есть дополнительное калибровочное преобразование, которое превращает A_i^{Ta} в поперечное в новой системе координат $\ell_\mu = \ell_\mu^o + \delta_L^o \ell_\mu^o$, $\ell_\mu^o = (1,0,0,0)$,

$$\partial_\mu^\ell A_\mu^{T\ell} = 0, \quad \partial_\mu^\ell = \partial - \ell_\mu(\partial\cdot\ell). \tag{37}$$

Динамическая система квантованных полей A_i^T, ψ^T следит за поворотом оси времени, и ее калибровка совпадает с кулоновской калибровкой $\partial_i A_i^T = 0$ только в единственной лоренцевской системе отсчета, в которой $\ell_\mu^o x_\mu = t$.

Важно отметить, что релятивистская инвариантность теории в таком подходе теряется, если использовать локальные коммутационные соотношения /2/ или канонические. Тензор энергии импульса /3/, который отличается от тензора Белинфанте полной производной. (Последняя играет важную роль в операторе буста M_{ok} и дает как раз нужное калибровочное преобразование). Заметим, что как раз такого рода версии канонического квантования, нарушающие ковариантность теории, используются, как правило, для вывода функционального интеграла /2,3/. Функциональный интеграл для поперечных переменных, полученный в работах /2,3/

$$Z[\eta,\bar{\eta},J] = \int d\bar{\psi}\,d\psi \prod_a d^3A^{Ta} d^3F_{oi}^a\,\delta[\partial_i A_i^T]\,\delta[\nabla_i F_{oi} - j_o]\,\det(\nabla\partial)\times \times\exp\left\{i\int d^4x\left[\dot{A}_i^T F_{oi} + \psi^+ i\dot{\psi} - T_{oo}^c + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu\right]\right\} = \tag{38}$$

$$= \int d\bar\psi d\psi \prod_a d^4A_\mu^a \, \delta[\partial_i A_i] \det[\nabla\partial] \exp\{ iS[A_\mu] + i\int d^4x (\bar\psi\eta + \bar\eta\psi + J_\mu A_\mu)\},$$

не отражает правильных трансформационных свойств операторного квантования, и на уровне интеграла (38) возникают релятивистски нековариантные одночастичные функции Грина [17-20].

Трансформационные свойства полей в операторном квантовании таковы, что поля при лоренцевых преобразованиях снова становятся поперечными в новой системе отсчета. По этому операторное квантование Швингера более отражает производящий функционал функции Грина, в котором выделена явно зависимость от лоренцевской системы отсчета ℓ_μ, где производится квантование. В частности, выражение (38) соответствует временной оси квантования $\ell_\mu^0 = (1, 0, 0, 0)$.

Рассмотренной здесь релятивистски ковариантной операторной схеме квантования соответствует функциональный интеграл, с явной зависимостью от оси квантования ℓ_μ,

$$Z_c^\ell[\eta,\bar\eta,J] = \int d\bar\psi d\psi \prod_a d^4A_\mu^a \, \delta[\partial_\mu^\ell A_\mu^\ell] \det[\nabla_\mu^\ell \partial_\mu^\ell] \times \tag{39}$$
$$\times \exp\{ iS[A_\mu] + i\int d^4x \, \Delta T_{00}^\ell + i\int d^4x (\bar\psi\eta + \bar\eta\psi + J_\mu A_\mu)\},$$

где

$$\Delta T_{00}^\ell = \frac{1}{8} g^2 \epsilon_{abc} \partial_\mu^\ell D(x_i^\ell x^\ell)_{cd} \epsilon_{dle} \partial_\mu^\ell D(x_i^\ell x^\ell)_{ea} \tag{40}$$

$$\nabla_\mu^\ell \partial_\mu^\ell D(x^\ell, y^\ell) = \delta^3(x^\ell - y^\ell),$$

$$x_\mu^\ell = x_\mu - \ell_\mu (x.\ell).$$

В показателе появляется дополнительный член $i\int d^4x \, \Delta T_{00}^\ell$, который возникает при учете упорядочивания операторов в нелинейном взаимодействии. Используя разложение

$$D_{ab}(x,y) = \frac{\delta_{ab}}{4\pi|\vec x - \vec y|} + g\int d^3z \frac{1}{4\pi|\vec x - \vec z|} \varepsilon_{acb} A_k^T(z) \partial_k^z \frac{1}{4\pi|\vec z - \vec y|} + \cdots,$$

представим ΔT_{00} в системе $\ell_\mu^0 = (1, 0, 0, 0)$ в следующем

виде:

$$\Delta T_{00} = \frac{3g^2}{4(4\pi)^2} \lim_{\vec y \to \vec x} \left(\partial_k^x \frac{1}{|\vec x - \vec y|}\right)^2 +$$
$$+ \frac{g^4}{4} \int d^3z_1 d^3z_2 \, U_{ij}(\vec x - \vec z_1) U_{ik}(\vec x - \vec z_2) A_j^T(z_1) A_k^T(z_2) + \cdots, \tag{41}$$

где

$$U_{ij}(\vec r) = \frac{1}{4\pi r}\left[\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^3(\vec r) - \frac{1}{4\pi r^5}(3r_i r_j - r^2\delta_{ij})\right]; \tag{42}$$

$r = |\vec r|$. Первый член разложения (41) не зависит от A_i^T, поэтому его можно включить в нормированный множитель. Второй член, определяемый формулой (42), имеет сингулярность типа $\delta^3(\vec r)/r$, которая сокращает расходимости от обычной двухпетлевой диаграммы Фейнмана [21].

Заметим, что функциональный интеграл (39) в системе $\ell_\mu^0 = (1,0,0,0)$ отличается от функционального интеграла [16], построенного непосредственно вейлевским квантованием с еще одним дополнительным членом ΔT_{00}^{CL} в показателе (39), который объясняется различным выбором контрчленов в гамильтониане взаимодействия. В нашем случае вейлевское упорядочивание применяется для $F_{0i}(A^T)$, в то время как в работе [16] для $F_{0i}(A^T)^2$ связь двух подходов можно представить в виде

$$[F_{0i}(A^T)_B]^2 = [F_{0i}(A^T)]_B^2 + \Delta T_{00}^{CL}. \tag{43}$$

Но в нашем подходе гамильтониан удовлетворяет критерию лоренц-инвариантности, а гамильтониан, полученный в [16], не удовлетворяет этому критерию.

В заключение этого параграфа отметим, что на основе функционального интеграла (39), полученного в рамках минимального квантования, была доказана релятивистская ковариантность одночастичных функций Грина фермионов [15]. Найденные одночастичные функции Грина имеют физические правильные аналитические свойства (полюсные) [15,22].

3. Аксиальная калибровка

Аксиальная калибровка $A_3 = 0$, предложенная впервые в работе [23], является линейной калибровкой, где не возникают т.н.

духи Фаддеева - Попова[24], поэтому она играет важную роль в пертурбативных вычислениях неабелевой теории[25].

С другой стороны, в операторном методе квантования в этой калибровке существует ряд трудностей: 1/ нельзя выбрать исчезающий потенциал A_μ одновременно в обоих пределах $z \to \infty$ и $z \to -\infty$ без использования условия связи на физические переменные [26], 2/ неправильное аналитическое поведение функции Грина фермионов (вместо полюсной особенности появляется точка ветвления)[27]. В данной работе мы обходим эти трудности, строя функциональный интеграл в аксиальной калибровке путем замены переменных полученного нами функционального интеграла (39). Для простоты рассмотрим случай $\ell_\mu^0 = (1,0,0,0)$. В соответствии с принципом относительности предположим, что существует калибровочное преобразование $g_0(A)$, такое, что из калибровки $\partial_i A_i^{g_0} = 0$ следует калибровка $A_3 = 0$. Умножим (39) на величину

$$I = \Delta_3[A_\mu] \int \prod_x dg(x)\, \delta[A_3^g(x)],$$

изменим порядок интегрирования. Тогда, используя равенство $\Delta_f[A_\mu^g] = \Delta_f[A_\mu]$, можно записать (39) в виде

$$\begin{aligned} Z_C &= \int d\bar\psi d\psi \prod_a d^4A_\mu^a \Delta_3[A_\mu] \int \prod_x dg(x)\, \delta[A_3^g(x)]\delta[\partial_i A_i(x)]\Delta_c[A_\mu] \\ &\times \exp\Big\{ iS[A_\mu] + i\int d^4x [\Delta T_{00} + J_\mu A_\mu + \bar\psi\eta + \bar\eta\psi] \Big\} = \\ &= \int d\bar\psi d\psi \prod_a d^4A_\mu^a\, \delta[A_3(x)]\Delta_3[A_\mu(x)] \int \prod_x dg(x)\, \delta[\partial_i A_i^{g^{-1}}(x)]\Delta_c[A_\mu^{g^{-1}}] \\ &\times \exp\Big\{ iS[A_\mu] + i\int d^4x [\Delta T_{00}(A_\mu^{g^{-1}}) + J_\mu A_\mu^{g^{-1}} + \bar\psi\eta + \bar\eta\psi] \Big\}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\Delta_c[A_\mu(x)] = \det(\nabla\partial)$.

Вследствие инвариантности меры $\prod_x dg(x)$ в последнем интеграле можно заменить g^{-1} на gg_0, где величина g_0 такова, что $\partial_i A_i^{g_0} = 0$. Поскольку $\partial_i A_i^{g_0} = 0$, достаточно рассмотреть лишь инфинитезимальное преобразование g (по крайней мере в рамках теории возмущений) и выполнить интегрирование по группе в окрестности единицы. При этом

$$\begin{aligned} &\int \prod_x dg(x)\, \delta[\partial_i A_i^{g^{-1}}(x)]\Delta_c[A_\mu^{g^{-1}}(x)] = \\ &= \int \prod_{x,a} du_a(x)\, \delta[\partial_i A_i^{g_0} - \tfrac{1}{g}(\partial_i^2 \delta_{ab} + g\epsilon_{abc} A_i^{c\,g_0}\partial_i) u_b]\Delta_c[A_\mu^{g_0}] = \\ &= \Delta_c[A_\mu^{g_0}]\, \Delta_c[A_\mu^{g_0}]^{-1} = 1, \end{aligned}$$

и дополнительные контрчлены в гамильтониане (34) становится несущественными константами

$$\Delta T_{00}[A_\mu^{g_0 g}] = \frac{3g^2}{4} \lim_{\vec y \to \vec x} \Big(\partial_k \frac{1}{\partial_i^2} \delta^3(\vec x - \vec y) \Big)^2,$$

так же, как $\Delta_3[A_\mu] = \det[\frac{1}{g}\partial_3 \delta^3(\vec x - \vec y)]$, ΔT_{00} не зависит от A_μ, поэтому их можно включить в нормировочный множитель. Далее, учитывая ограничение на источник в кулоновской калибровке $J_0 = 0$, $\partial_i J_i = 0$ можем записать

$$\int d^4x\, J_\mu A_\mu^{g_0 g} = \int d^4x\, J_\mu A_\mu^{g_0} + \int d^4x\, J_\mu O(A_\nu^{g_0\,2}). \quad (45)$$

В результате мы получим окончательное выражение для функционального интеграла в аксиальной калибровке

$$\begin{aligned} Z_c = Z_3 &= N\int d\bar\psi d\psi \prod_{a,x} d^4A_\mu^a\, \delta[A_3(x)] \times \\ &\times \exp\Big\{ iS[A_\mu] + i\int d^4x [J_\mu A_\mu + \bar\psi(g_0\eta) + (\bar\eta g_0^{-1})\psi] \Big\}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $g_0 = \exp\{\frac{1}{\nabla\partial}\partial_i A_i\}$ – матрица перехода от кулоновской к аксиальной калибровке, и здесь при получении формулы (46) был отброшен второй член в правой части формулы (45), который не меняет полюсную особенность одночастичной функции Грина глюона[3]. В то же время мы оставили в членах с фермионными источниками калибровочное преобразование, учет которого восстанавливает правильные аналитические свойства одночастичных фермионных пропагаторов[15].

Используя функциональный интеграл (46), получим следующее выражение для глюонного пропагатора с импульсом

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = \frac{-i\delta_{ab}}{q^2 + i\varepsilon}\Big[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu - n_\mu q_\nu}{(nq)} + n^2 \frac{q_\mu q_\nu}{(nq)^2} \Big], \quad (47)$$

где $n = (0, \vec e_3)$

Заключение

В работе был рассмотрен метод канонического квантования неабелевой теории, основанной на явном решении уравнения связи и выборе калибровочно-инвариантных переменных. Данный подход совпадает с релятивистски ковариантным операторным квантованием Швингера и обосновывает его калибровочную инвариантность. Построен соответствующий этому каноническому квантованию функциональный интеграл с учетом проблемы упорядочивания операторов в гамильтониане. Показано, что релятивистской ковариантности отвечает вейлевское упорядочивание напряженностей.
Подробно рассмотрен переход к аксиальной калибровке и решение ее проблем.

Авторы выражают благодарность Б.М.Барбашову, А.В.Ефремову, И.В.Полубаринову, Я.А. Смородинскому, за полезные обсуждения.

Приложение

Вычислим коммутатор

$$i[F_{0i}^a(\vec{x},t), F_{0k}^b(\vec{y},t)]. \qquad (\text{П.I})$$

Представим оператор F_{0i}^a в виде

$$F_{0i}^a(x) = F_{0i}^{Ta}(x) - \partial_i f^a(x), \qquad (\text{П.2})$$

$$f(x) = \frac{1}{\nabla\partial}\left(g A_k^T(x)\times F_{0k}^T(x) + j_0(x)\right). \qquad (\text{П.3})$$

Используя (П.2) , перепишем (П.I) в следующей форме:

$$i[F_{0i}^a(x), F_{0k}^b(y)] = i[F_{0i}^{Ta}(x), F_{0k}^{Tb}(y)] + i[\partial_i^x f^a(x), \partial_k^y f^b(y)] - i[F_{0i}^{Ta}(x), \partial_k f^b(y)] - i[\partial_i f^a(x), F_{0k}^{Tb}(y)]. \qquad (\text{П.4})$$

Первое слагаемое равно нулю, второе слагаемое является нечетной функцией относительно замены $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$, $i \leftrightarrow k$, поэтому оно равняется нулю после симметризации членов A_k^T и F_{0k}^T .
Рассмотрим третее слагаемое

$$III = -i[F_{0i}^{Ta}(x), \partial_k f^b(y)] = -i\partial_k^y[F_{0i}^{Ta}(x), f^b(y)], \qquad (\text{П.5})$$

учитывая

$$i[F_{0i}^T(x), f(y)] = \frac{\delta}{\delta A_i^T(x)} f(y) = \frac{\delta}{\delta A_i^T(x)}\left(\frac{1}{\nabla\partial} g A_i^T(y)\times F_{0i}^T(y)\right) = \frac{1}{\nabla\partial}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\times F_{0i}(x). \qquad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.6) в (П.5), затем деля симметризацию между $F_{0i}(x)$ с $\partial_k^y D(y,x) = \partial_k^y \frac{1}{\nabla\partial}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$, получим

$$III = F_{0i}^c(x)\cdot\varepsilon_{caa'}\,\partial_k^y D(y,x)_{ba'}. \qquad (\text{П.7})$$

Аналогично вычисляется четвертое слагаемое в (П.4). В результате мы получим окончательное выражение для коммутатора (П.I)

$$i[F_{0i}^a(x), F_{0k}^b(y)] = F_{0i}^c(x)\cdot\varepsilon_{caa'}\,\partial_k^y D(y,x)_{a'b} - \varepsilon_{a'bc}\,\partial_i^x D(x,y)_{aa'}\cdot F_{0k}^c(y). \qquad (\text{П.8})$$

Вычислим коммутатор

$$i[F_{k\ell}^a(\vec{x},t), F_{0i}^b(\vec{y},t)],$$

$$F_{k\ell}^a(x) = \partial_k A_\ell^{Ta} - \partial_\ell A_k^{Ta}(x) + g\varepsilon_{abc}A_k^{Tb}(x)A_\ell^{Tc}(x). \qquad (\text{П.9})$$

Представим (П.9) в виде

$$i[F_{k\ell}^a(x), F_{0i}^b(y)] = i\partial_k[A_\ell^{Ta}(x), F_{0i}^b(y)] - i\partial_\ell[A_k^{Ta}(x), F_{0i}^b(y)] + i\varepsilon_{acd}[A_k^{Tc}(x)A_\ell^{Td}(x), F_{0i}^b(y)]. \qquad (\text{П.IO})$$

Первое и второе слагаемые вычисляются с помощью коммутатора (35), последнее слагаемое равняется

$$III = \varepsilon_{acd}\delta_{ki}\delta^{cb}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})A_\ell^{Td}(x) + \varepsilon_{acd}\nabla_k^{cc'}D(x,y)_{c'b}\overleftarrow{\partial}_i^y A_\ell^{Td}(x) + \varepsilon_{acd}\delta_{\ell i}\delta^{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})A_k^{Tc}(x) + \varepsilon_{acd}A_k^{Tc}(x)\nabla_\ell^{dc'}D(x,y)_{cb}\overleftarrow{\partial}_i^y. \qquad (\text{П.II})$$

Подставив (П.II) в (П.IO), находим следующее выражение:

$$i[F_{k\ell}^a(x), F_{0i}^b(y)] = (\nabla_k^{ab}\delta_{\ell i} - \nabla_\ell^{ab}\delta_{ki})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \varepsilon_{adc}F_{k\ell}^d(x)D(x,y)_{cb}\overleftarrow{\partial}_i^y. \qquad (\text{П.I2})$$

Литература

1. Faddeev L.D., Popov V.N. Phys.Lett., 1967, B25, 30.
2. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., "Наука", 1978.
3. Abers E., Lee B.W. Phys.Report, 1973, 9C, p.5.
4. Feynman R.P. Phys.Rev., 1951, 84, 108.
5. Schwinger J. Phys.Rev., 1962, 125, p.1043; 1962,127, p.324.
6. Treat R.P. Phys.Rev., 1975, D12, p.3145.
7. Pervushin V.N. Riv.Nuovo Cimento, 1985, 8, p.1.
8. Ilieva N.P., Nguyen Suan Han, Pervushin V.N. Preprint JINR E2-86-283, Dubna, 1986.

9. DeWitt B. Phys.Rev., 1967, 1960, p.113,1195.
10. Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1969, I, с.3.
11. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1984.
12. Хриплович И.Б. ЯФ, 1969, I0, с.409.
Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, М., 1963.
13. Dewitt B.S. Rev.Mod.Phys., 1957, 29, p.377.
14. Березин Ф.А. ТМФ, 1971, 6, с.194.
15. Pervushin V.N., Nguyen Suan Han, Azimov R.A. Preprint JINR, E2-86-128, Dubna, 1986.
16. Christ N.H., Lee T.D. Phys.Rev., 1980, D22, p.939.
17. Heokthorn D. Nucl.Phys., 1979, B156, p.328.
18. Atkins G.S. Phys.Rev., 1983, D27, p.1814.
19. Hagen R. Phys.Rev., 1963, 130, p.813.
20. Бухвостов А.Н., Кураев Э.А., Липатов Л.Н. Препринт 83-147, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.
21. Cheng H. and Tsai E.C. The Anomalous Coulomb Interaction. Preprint of the Massachussetts Institute of Technology. Cambridge, 1986.
22. Илиева Н.П. и др. ОИЯИ, Р2-86-423, Дубна, 1986.
23. Arnowitt R.L. and Fickler S.I., Phys.Rev., 1962, 127, p. 821.
24. Kummer W. Acta Physica Austriaca 1975, 41, 315.
25. Dokshitzer Yu.L., Dyakonov D.I. and Troyan S.I. Phys.Rep., 1980, 58, p.270.
26. Chodos A. Phys.Rev., 1978, 170, p.2624.
27. Алексеев А.И. ЯФ, 1981, 33, с.516.
Алексеев А.И., Арбузов Б.А., Байков В.А. ТМФ, 1982, 52, с.187.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 сентября 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Нгуен Суан Хан, Первушин В.Н. Р2-86-645

Операторное обоснование функционального интеграла в неабелевой калибровочной теории

Строится функциональный интеграл, соответствующий релятивистски ковариантной схеме канонического квантования неабелевой теории. Основное внимание уделено проблеме упорядочивания операторов в гамильтониане и независимости интеграла от выбора калибровки переменных интегрирования. Показано, что релятивистской ковариантности отвечает вейлевское упорядочивание напряженностей. Подробно рассматривается переход к аксиальной калибровке и решение ее проблем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Nguyen Suan Han, Pervushin V.N. P2-86-645

On Operator Foundation of Functional Integral in Non-Abelian Gauge Theory

A part integral is constructed which corresponds to a relativistically covariant scheme of canonical quantization of a non-Abelian theory. A special attention is paid to the problem of ordering of operators in the Hamiltonian and of the integral independence of the choice of gauge of integration variables. It is shown that the Weyl ordering of strengths corresponds to the relativistic covariance. Transition to the axial gauge and associated problems are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986