сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-636

Н.С.Шавохина

# ТРОЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В МИРЕ ГАЛИЛЕЯ - НЬЮТОНА

1986

Задача трех тел в пространствах, где определены меры длины, площади и объема, исследована в работе [1]. В такой задаче наряду с парными взаимодействиями вводится тройное взаимодействие частиц. Это новый тип взаимодействия частиц в механике. В предлагаемой работе указанная выше задача трех тел рассматривается в мире Галилея - Ньютона. Таким образом, в классической механике исследуется новый тип взаимодействия частиц. С другой стороны, выступая в роли нерелятивистского предела, задача трех тел в мире Галилея - Ньютона проясняет смысл аналогичной релятивистской задачи, рассмотренной в [1].

## МИР ГАЛИЛЕЯ - НЬЮТОНА. ВРЕМЯ, ПЛОЩАДЬ И ОБЪЕМ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ НЬЮТОНА. ДЛИНА, КВАЗИИНВАРИАНТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ

В соответствии с Эрлангенской программой Клейна [2] геометрические свойства четырехмерного мира Галилея - Ньютона определяются группой Ньютона

$$\tilde{t} = \pm t + t_0 ,$$
$$\tilde{x}^a = \sum_{b=1}^{3} c^a_b(t)\, x^b + c^a(t) , \quad a, b \in \{1, 2, 3\} , \qquad /1/$$

где $t_0 = \mathrm{const}$, $c^a_b(t)$ , $c^a(t)$ - произвольные функции времени. Матрица $(c^a_b)$ ортогональна, что означает

$$\sum_{k=1}^{3} c^a_k(t)\, c^b_k(t) = \delta^{ab} . \qquad /2/$$

Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1,2,3, а греческие - 0,1,2,3. По повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование. Группа, задаваемая формулами /1/, является группой движения твердого тела. Если считать, что

$$\tilde{t} = t + t_0 , \qquad /3/$$

то в группе Ньютона выделяется ортохронная подгруппа. При условиях

$$c^a_b(t) = \mathrm{const}, \qquad c^a(t) = V^a \cdot t + c^a ,$$
$$V^a = \mathrm{const}, \qquad c^a = \mathrm{const} \qquad /4/$$

группа Ньютона сужается до группы Галилея.

Геометрия мира Галилея - Ньютона задается парой метрических форм [3,4], инвариантных относительно группы /1/:

$$\theta_{\alpha\beta}\, d^{\alpha} \otimes d^{\beta} = \theta_{\alpha} d^{\alpha} \otimes \theta_{\beta} d^{\beta} = dt \otimes dt\,, \qquad /5/$$

$$h^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha} \otimes \partial_{\beta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^{i}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i}}\,. \qquad /6/$$

Коэффициенты этих форм связаны условием

$$h^{\alpha\beta}\, \theta_{\beta} = 0\,, \qquad /7/$$

в силу чего всегда можно выбрать $\theta_o = 1$, $\theta_a = 0$, $h^{o a} = 0$, $h^{ab} = \mathrm{diag}\,(1,1,1)$.

В мире Галилея - Ньютона существуют два сорта мировых линий - времениподобные и пространственноподобные [3-5, 8, 9]. Существуют также два аналогичных сорта мировых поверхностей и гиперповерхностей. Времениподобные поверхности двух и трех измерений могут служить образами миров Галилея - Ньютона соответствующих размерностей.

Мгновенным пространством в мире Галилея - Ньютона назовем пространственноподобную гиперповерхность $t = \mathrm{const}$. Мгновенное пространство является обычным трехмерным евклидовым пространством с фундаментальной формой

$$ds^{2} = h_{ab}\, dx^{a} dx^{b}\,, \qquad /8/$$

где $h_{ab}$ - тензор, обратный к $h^{ab}$ из /6/. Пространственноподобные линии в мире Галилея - Ньютона соединяют две точки мгновенного пространства, а пространственноподобные поверхности - это обычные поверхности трехмерного евклидова пространства.

Уравнение мировой линии задается в виде

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)\,. \qquad /9/$$

Касательный вектор к мировой линии /9/ будем обозначать

$$a = \{a^{\alpha}\}, \quad a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u}\,, \quad a = \{a^{\circ} = \frac{\partial x^{\circ}}{\partial u},\ \vec{a} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\}. \qquad /10/$$

Времениподобные мировые линии - это такие линии, на которых в качестве параметра можно выбрать координатное время, тогда

$$a^{\circ} = \frac{\partial x^{\circ}}{\partial t} = 1\,, \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\,. \qquad /11/$$

Линейная форма $\theta_{\alpha} d^{\alpha} = dt$ из /5/ задает время $T$ на времениподобных линиях между мировыми точками A и B, равное

$$T = \int dt = \int a^{\circ} du = t(B) - t(A)\,, \qquad /12/$$

инвариантное относительно группы Ньютона /1/.

Длина $\ell$ пространственноподобных линий, инвариантная относительно группы /1/, определяется формой /8/. Для пространственноподобных линий всегда можно считать $a^{\circ} = 0$, а длину $\ell$ [5] равной



$$\ell = \int L(x,a)\, du = \int \sqrt{h_{ab}\, dx^{a} dx^{b}} =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right)^{2}}\, du = \int \sqrt{\left(\frac{\partial x^{1}}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x^{2}}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x^{3}}{\partial u}\right)^{2}}\,. \qquad /13/$$

Двумерные поверхности задаются в виде

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u, v)\,. \qquad /14/$$

В каждой неособой точке поверхности существуют два независимых касательных вектора

$$a = \{a^{\alpha}\}, \quad a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u}\,, \quad a = \{a^{\circ}, \vec{a}\}\,,$$

$$b = \{b^{\alpha}\}, \quad b^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial v}\,, \quad b = \{b^{\circ}, \vec{b}\}\,. \qquad /15/$$

Времениподобные поверхности - это такие поверхности, на которых в качестве одного из независимых параметров можно выбрать координатное время. Например, $u = x^{\circ} = t$, тогда в параметрах

$$t = t(u, v)\,, \quad \rho = \rho(u, v) \qquad /16/$$

уравнения поверхности примут вид

$$x^{\circ} = t\,, \quad \vec{x} = \vec{x}(t, \rho)\,, \qquad /17/$$

а векторы /15/ запишутся в виде

$$a = \{1\,, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\}, \quad b = \{0\,, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\}. \qquad /18/$$

Площадь времениподобной поверхности /17/, инвариантная относительно группы Ньютона, равна

$$\sigma = \iint S(t, \rho)\, dt\, d\rho = \int dt \int \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\right)^{2}}\, d\rho\,. \qquad /19/$$

Мера площади поверхности $S$ в /19/ строится как произведение меры длины времениподобной линии /12/ и меры длины пространственноподобной линии /13/, которая лежит в пересечении мгновенного пространства и поверхности /17/.

Подсчитаем выражение /19/ в произвольных параметрах $u$ и $v$. Обозначая через $\partial$ производную по $\rho$ при $t = \mathrm{const}$, а через

$$g = \frac{\partial(t, \rho)}{\partial(u, v)}\,,$$

находим

$$g\partial u = -\frac{\partial t}{\partial v} = -b^\circ, \quad g\partial v = \frac{\partial t}{\partial u} = a^\circ.$$

Следовательно,

$$g\partial\vec{x} = \begin{vmatrix} a^\circ & b^\circ \\ \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = \vec{J} = (J^{01},\ J^{02},\ J^{03}), \qquad /20/$$

где

$$J^{ok} = \begin{vmatrix} a^\circ & b^\circ \\ a^k & b^k \end{vmatrix}. \qquad /21/$$

Таким образом, в произвольных параметрах площадь /19/ равна

$$\sigma = \iint \sqrt{\vec{J}^2}\, dudv = \iint \sqrt{(J^{01})^2 + (J^{02})^2 + (J^{03})^2}\, dudv. \qquad /22/$$

Далее скалярное произведение векторов евклидова пространства будем обозначать

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \qquad /23/$$

Мера площади пространственноподобной поверхности, инвариантная относительно группы Ньютона, хорошо известна в теории поверхностей /6,7/. Она равна

$$\sigma = \iint \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}}\, dudv. \qquad /24/$$

Гиперповерхности в мире Галилея - Ньютона записываются в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u, v, w). \qquad /25/$$

Независимые касательные векторы в каждой точке этой поверхности обозначим

$$a = \{a^\alpha\} = \{\frac{\partial x^\circ}{\partial u}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\},$$

$$b = \{b^\alpha\} = \{\frac{\partial x^\circ}{\partial v}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\}, \qquad /26/$$

$$c = \{c^\alpha\} = \{\frac{\partial x^\circ}{\partial w}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial w}\}.$$

Времениподобная гиперповерхность всегда допускает в качестве одного из параметров координатное время, например $x^\circ = u$. В параметрах

$$x^\circ = t = t(u, v, w), \quad \rho = \rho(u, v, w), \quad \xi = \xi(u, v, w) \qquad /27/$$

уравнения /25/ запишутся в виде

$$x^\circ = t, \quad \vec{x} = \vec{x}(t, \rho, \xi), \qquad /28/$$



а уравнения /26/ в виде

$$a = \{1, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\}, \quad b = \{0, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\}, \quad c = \{0, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi}\}. \qquad /29$$

Мера объема времениподобной гиперповерхности, инвариантная относительно группы Ньютона /1/, строится как произведение меры длины из /12/ времениподобной линии и меры площади из /24/ пространственноподобной поверхности, которая лежит в пересечении мгновенного пространства и гиперповерхности /28/. Таким образом, объем времениподобной гиперповерхности в мире Галилея - Ньютона равен

$$V = \iiint P\, dt\, d\rho\, d\xi = \int dt \iint \sqrt{(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho})^2 (\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi})^2 - (\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi})^2}\, d\rho\, d\xi. \qquad /30/$$

Запишем его в произвольных параметрах u, v, w. Обозначая через $\partial_1$ и $\partial_2$ производные по $\rho$ и $\xi$ при $t = \mathrm{const}$, а через g

$$g = \frac{\partial(t, \rho, \xi)}{\partial(u, v, w)},$$

находим

$$g(\partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v) = \frac{\partial t}{\partial w} = c^\circ,$$

$$g(\partial_1 w \partial_2 u - \partial_2 w \partial_1 u) = \frac{\partial t}{\partial v} = b^\circ,$$

$$g(\partial_1 v \partial_2 w - \partial_2 v \partial_1 w) = \frac{\partial t}{\partial u} = a^\circ.$$

Следовательно,

$$g \begin{vmatrix} \partial_1 x^k & \partial_2 x^k \\ \partial_1 x^\ell & \partial_2 x^\ell \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^\circ & b^\circ & c^\circ \\ a^k & b^k & c^k \\ a^\ell & b^\ell & c^\ell \end{vmatrix} = J^{ok\ell}. \qquad /31/$$

В силу этого в произвольных параметрах объем /30/ времениподобной гиперповерхности /14/, инвариантный относительно группы Ньютона /1/, имеет вид

$$V = \iiint P\, dudvdw = \iiint \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{3} J^{ok\ell} J^{ok\ell}}\, dudvdw. \qquad /32/$$

Объем пространственноподобной гиперповерхности, или мгновенного пространства, также хорошо известен в геометрии /3,4,6,7,9/. Он определяется формой /8/ и равен

$$V = \iiint P\, dudvdw = \iiint \sqrt{|h_{ab}|}\, dx^1 dx^2 dx^3. \qquad /33/$$

Уравнения Эйлера для функционалов вида /12/ тождественно равны нулю. В рассматриваемой задаче варьируется именно длина времениподобных траекторий, однако, /12/ - единственная длина, инвариантная относительно группы Ньютона. Поэтому в качестве длины на времениподобных траекториях выбираем известное в механике выражение

$$\ell = \int L(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt})\, dt = \int \frac{1}{2}(\frac{d\vec{x}}{dt})^2\, dt, \qquad /34/$$

квазиинвариантное относительно группы Галилея /1/, /4/, которое для произвольного параметра $u$ примет вид

$$\ell = \int [\frac{1}{2}(\frac{d\vec{x}}{du})^2 / \frac{dt}{du}]\, du. \qquad /35/$$

Квазиинвариантность в данном случае означает, что две меры длины $L(x, dx)$ и $\tilde{L}(x, dx)$ считаются эквивалентными, если они удовлетворяют условию

$$\tilde{L}(x, dx) - L(x, dx) = df(x),$$

где $f(x)$ - произвольная функция.

Действительно, нетрудно видеть, что при преобразованиях Галилея /1/, /4/ длина /34/ переходит в

$$\tilde{\ell} = \ell + \int d(\vec{x}, \vec{V}) + \frac{1}{2}\vec{V}^2 \int dt.$$

Наконец, отметим, что выражения /12/, /22/, /32/ являются нерелятивистским пределом длины, площади и объема времениподобных линий, поверхностей и гиперповерхностей в мире Пуанкаре - Минковского[8] с фундаментальной формой

$$ds^2 = dt^2 - \frac{d\vec{x}^2}{k^2},$$

где постоянная $k$ равна скорости света в пустоте.

Отметим также, что мера длины в /34/ равна следующему пределу:

$$\frac{1}{2}(\frac{d\vec{x}}{dt})^2 dt = -\lim_{k\to\infty} k^2(ds - dt).$$

## ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ИЗ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Действие для замкнутой системы из трех частиц в мире Галилея - Ньютона, согласно работе[1], сосредоточено внутри времениподобной призмы $\Pi$, сторонами которой служат времениподобные поверхности, передающие парные взаимодействия, а ребрами - траектории частиц, между двумя мгновениями времени $t = t_1 = \text{const}$ и $t = t_2 = \text{const}$. В пересечении призмы и мгновенного пространства $t = \text{const}$ лежит пространственноподобный криволинейный треугольник. Так, в пересечении призмы $\Pi$ и гиперповерхностей $t = t_1$ и $t = t_2$ лежат треугольники $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta B_1B_2B_3$.

Итак, действие для системы из трех частиц в мире Галилея - Ньютона имеет вид[1]

$$J = \sum_{i=1}^{3} m_i \ell_i + G_{12}\sigma_{12} + G_{23}\sigma_{23} + G_{31}\sigma_{31} + HV_{123}, \qquad /36/$$

где $\ell_i$ определяется формулами /34-35/, $\sigma_{ij}$ - /19/, /22/, а $V_{123}$ - /30/, /32/. Однократные интегралы в /36/ берутся по времениподобным ребрам призмы $\Pi$, двухкратные - по времениподобным граням призмы $\Pi$, а трехкратный интеграл - по времениподобному объему призмы $\Pi$. Постоянные $m_i$ равны массам взаимодействующих частиц, $G_{ij}$ являются постоянными парных взаимодействий, а $H$ есть постоянная тройного взаимодействия.

Будем считать координатное время $t$ параметром на ребрах, гранях и в объеме призмы $\Pi$. Тогда имеем

$$u_1 = u_2 = u_3 = v_{12} = v_{23} = v_{31} = w_{123} = x^0 = t. \qquad /37/$$

При этом

$$a_1^0 = a_2^0 = a_3^0 = 1, \quad a_{12}^0 = a_{23}^0 = a_{31}^0 = 0,$$
$$b_{12}^0 = b_{23}^0 = b_{31}^0 = 1, \quad a_{123}^0 = b_{123}^0 = 0, \quad c_{123}^0 = 1. \qquad /38/$$

Здесь нижний индекс означает номер траектории, парный индекс указывает, на какие траектории натянута соответствующая грань, тройной индекс означает объем призмы. Далее сборный индекс 123 будем опускать, где это удобно, или заменять на простой индекс 0. При таком выборе параметров плотности лагранжевых функций в действии /36/ имеют вид

$$L_n = m_n \frac{(\vec{a}, \vec{a})}{2} = \frac{m}{2a^0} \sum_{k=1}^{3} a^k a^k, \qquad /39/$$

$$S_{ij} = -G_{ij}\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = -G_{ij}\sqrt{\sum_{k=1}^{3} J^{ok} J^{ok}}, \qquad /40/$$

$$P = -H\sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}} = -H\sqrt{\sum_{k,\ell=1}^{3} \frac{1}{2} J^{ok\ell} J^{ok\ell}}. \qquad /41/$$

В работе[1] получены уравнения движения для замкнутой системы из трех частиц, которыми являются уравнения Эйлера для функционала /36/, где $L_i$, $S_{ij}$ и $P$, вообще говоря, произвольны. Для выражений /39/, /40/, /41/ эти уравнения примут вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial P}{\partial \vec{a}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial P}{\partial \vec{b}} = 0, \qquad /42/$$

$$\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\,\frac{\partial S_{ij}}{\partial \vec a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial \vec a} & \dfrac{\partial P}{\partial \vec b} \\[2mm] \dfrac{\partial u_0}{\partial u_{ij}} & \dfrac{\partial v_0}{\partial u_{ij}} \end{vmatrix}, \qquad /43/$$

$$m_1 \frac{d}{dt}\frac{d\vec x_1}{dt} = G_{12}\frac{\vec a_{12}({}_1u_{12},t)}{|\vec a_{12}({}_1u_{12},t)|} - G_{31}\frac{\vec a_{31}({}_1u_{31},t)}{|\vec a_{31}({}_1u_{31},t)|},$$

$$m_2 \frac{d}{dt}\frac{d\vec x_2}{dt} = G_{23}\frac{\vec a_{23}({}_2u_{23},t)}{|\vec a_{23}({}_2u_{23},t)|} - G_{12}\frac{\vec a_{12}({}_2u_{12},t)}{|\vec a_{12}({}_2u_{12},t)|}, \qquad /44/$$

$$m_3 \frac{d}{dt}\frac{d\vec x_3}{dt} = G_{31}\frac{\vec a_{31}({}_3u_{31},t)}{|\vec a_{31}({}_3u_{31},t)|} - G_{23}\frac{\vec a_{23}({}_3u_{23},t)}{|\vec a_{23}({}_3u_{23},t)|}.$$

Здесь для ${}_pu_{pr}(t)$; ${}_pu_{qp}(t)$ индекс $p$ означает, что значения переменных $u_{pr}$; $u_{qp}$ берутся вдоль траектории $p$-й частицы, $p, r \in \{1,2,3\}$. При выводе уравнений /42/-/44/ учтено, что $\partial P/\partial\vec c = 0$ и $\partial S_{ij}/\partial\vec b = 0$, а также использованы формулы

$$\sum_{k=1}^{N} J^{ok} J^{ok} = -\Delta_1 = -\begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & a^\circ \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & b^\circ \\ a^\circ & b^\circ & 0 \end{vmatrix},$$

$$\frac12\frac{\partial}{\partial\vec a}\Delta_1 = \begin{vmatrix} \vec a & \vec b & 0 \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & b^\circ \\ a^\circ & b^\circ & 0 \end{vmatrix}, \quad \frac12\frac{\partial}{\partial\vec b}\Delta_1 = \begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & a^\circ \\ \vec a & \vec b & 0 \\ a^\circ & b^\circ & 0 \end{vmatrix},$$

$$\frac12\sum_{k,\ell=1}^{N} J^{ok\ell} J^{ok\ell} = -\Delta_2 = -\begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & (\vec a,\vec c) & a^\circ \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & (\vec b,\vec c) & b^\circ \\ (\vec c,\vec a) & (\vec c,\vec b) & (\vec c,\vec c) & c^\circ \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & 0 \end{vmatrix},$$

$$\frac12\frac{\partial}{\partial\vec a}\Delta_2 = \begin{vmatrix} \vec a & \vec b & \vec c & 0 \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & (\vec b,\vec c) & b^\circ \\ (\vec c,\vec a) & (\vec c,\vec b) & (\vec c,\vec c) & c^\circ \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & 0 \end{vmatrix},$$

$$\frac12\frac{\partial}{\partial\vec b}\Delta_2 = \begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & (\vec a,\vec c) & a^\circ \\ \vec a & \vec b & \vec c & 0 \\ (\vec c,\vec a) & (\vec c,\vec b) & (\vec c,\vec c) & c^\circ \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & 0 \end{vmatrix},$$



$$\frac12\frac{\partial}{\partial\vec c}\Delta_2 = \begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & (\vec a,\vec c) & a^\circ \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & (\vec b,\vec c) & b^\circ \\ \vec a & \vec b & \vec c & 0 \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение /42/ означает, что в пересечении призмы $\Pi$ и мгновенного пространства лежит минимальная поверхность обычного евклидова пространства, ограниченная криволинейным треугольником $A_1A_2A_3$. Итак, мы пришли к задаче о нахождении в каждый момент времени двухмерной минимальной поверхности, ограниченной криволинейным треугольником $A_1A_2A_3$, на сторонах которого заданы краевые условия /43/, а движение этого треугольника определяется уравнениями /44/. Сама призма $\Pi$ выступает как однопараметрическое семейство минимальных криволинейных треугольников с параметром $t$.

Уравнения /43/ один раз интегрируются. Действительно, в силу /42/ линейная форма

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial\vec a} & \dfrac{\partial P}{\partial\vec b} \\[2mm] du & dv \end{vmatrix} = H\,d\vec f(u,v) \qquad /45/$$

является полным дифференциалом векторной функции $\vec f(u,v)$. Отсюда для уравнения /43/ имеем

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial\vec a} = H\vec f(u_0(u_{ij},t),\ v_0(u_{ij},t)) + \vec C_{ij}, \qquad /46/$$

где $C_{ij}$ - постоянная интегрирования.

Далее, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\frac{\partial S_{ij}}{\partial\vec a} = -G_{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\frac{\vec a}{|\vec a|}, \qquad /47/$$

то модуль вектора

$$\Phi_{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial\vec a} & \dfrac{\partial P}{\partial\vec b} \\[2mm] \dfrac{\partial u_0}{\partial u_{ij}} & \dfrac{\partial v_0}{\partial u_{ij}} \end{vmatrix}, \qquad /48/$$

поделенный на модуль вектора $G_{ij}\vec a_{ij}$, равен кривизне стороны $A_iA_j$ треугольника $A_1A_2A_3$. Из /41/ для вектора /48/ находим

$$\Phi_{ij} = -H\frac{\vec a(\vec b,\ \partial\vec x/\partial u_{ij}) - \vec b(\vec a,\ \partial\vec x/\partial u_{ij})}{\sqrt{\begin{vmatrix} (\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) \\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) \end{vmatrix}}}. \qquad /49/$$

Откуда

$$|\vec{\Phi}_{ij}| = |H|\,|\vec{a}_{ij}|. \qquad /50/$$

Следовательно, кривизна каждой из сторон треугольника $A_1A_2A_3$ постоянна и равна

$$k_{ij} = \frac{|H|}{|G_{ij}|}. \qquad /51/$$

Далее, стороны искомого треугольника $A_1A_2A_3$ являются асимптотическими линиями на минимальной поверхности. Действительно, из /49/ видно, что вектор $\Phi_{ij}$ лежит в касательной плоскости к минимальной поверхности, и, следовательно, линии, определяемые уравнениями /43/, являются асимптотическими на минимальной поверхности.

Таким образом, рассмотренная выше задача трех тел в мире Галилея - Ньютона свелась к задаче о нахождении минимального треугольника /уравнения /42-43//, сторонами которого являются линии постоянной кривизны, асимптотические на минимальной поверхности. Движение такого треугольника задается уравнениями /44/.

Для системы из трех частиц в мире Галилея - Ньютона сохраняется канонический импульс [1]. После достаточно громоздких расчетов, которые мы опускаем, для нулевой компоненты канонического импульса $\mathcal{E}$, равной энергии системы, получаем

$$\mathcal{E} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)^2 + \frac{m_3}{2}\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)^2 +$$

$$+ G_{12}\ell_{12} + G_{23}\ell_{23} + G_{31}\ell_{31} + H\sigma_{123}, \qquad /52/$$

где $\ell_{ij}$ - длина стороны $A_iA_j$, а $\sigma_{123}$ - площадь треугольника $A_1A_2A_3$. Остальные компоненты канонического импульса не зависят от $\sigma_{123}$. Нетрудно проверить, что /52/ является интегралом системы уравнений движения /42/-/44/.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-84-167, Дубна, 1984; В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц, № 16, Энергоатомиздат, М., 1985, с.189.
2. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований /Эрлангенская программа/. В сб.: Об основаниях геометрии./Под ред. А.П.Нордена/. М., ГИТТЛ, 1956, с.399.
3. Черников Н.А. В кн.: Всесоюзная конференция по неевклидовой геометрии. Пленарные доклады. ВИНИТИ, М., 1976, с.146.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. "Мир", М., 1971.





5. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. ГИИЛ, М., 1948.
6. Норден А.П. Теория поверхностей. ГИТТЛ, М., 1956.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. "Наука", М., 1979.
8. Фок В.А. Теория пространства-времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
9. Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология. "Мир", М., 1985.


Рукопись поступила в издательский отдел
25 сентября 1986 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.




Шавохина Н.С.

P2-86-636

**Тройное взаимодействие частиц в мире Галилея - Ньютона**


В четырехмерном мире Галилея - Ньютона исследована задача трех тел, где наряду с парными введено тройное взаимодействие частиц. Это новый тип взаимодействия в классической механике. Показано, что в каждый момент времени частицы связаны между собой минимальной поверхностью трехмерного евклидова пространства, ограниченной криволинейным треугольником, сторонами которого служат асимптотические линии постоянной кривизны, а в его вершинах лежат сами частицы.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.



Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986


Перевод Т.Ю.Думбрайс


Shavokhina N.S.

P2-86-636

**Three-Body Interaction of Particles in the Galilean-Newton World**


In a four-dimensional Galilean-Newton world a problem of three particles is studied, where,besides the two-body, three-body interaction is introduced as well. It represents a new type of interaction in classical mechanics. It is shown that at every moment of time the particles are connected with each other by a minimal surface of a three-dimensional Euclidean space bounded by a curvilinear triangle whose sides are asymptotic lines of constant curvature, and particles are at its vertices.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.



Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986