объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-572

Б.М.Барбашов, А.М.Червяков

К ТЕОРИИ КОНЕЧНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С КРИВИЗНОЙ

Направлено в журнал "Communication in Mathematical Physics"

1986

I. Введение

В настоящее время теория суперструн рассматривается как основа для единого описания всех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитацию [1,2]. Параметрически-инвариантное действие релятивистской струны в форме Намбу-Гото имеет вид [3-5]

$$S_0 = -\gamma \iint_\Sigma d^2u \sqrt{-g(u)}\ , \qquad (I.1)$$

где

$$g = \det \| g_{ij} \|\ ,\ g_{ij} = (\partial x^\mu / \partial u^i)(\partial x_\mu / \partial u^j)\ ,$$

i, j = 1,2-индуцированная метрика на мировой поверхности струны $x^\mu(u^1, u^2)$, μ = 0,1, ..., $d-1$ – её координаты в пространстве Минковского. Последовательная квантовая теория взаимодействующих струн требует модификации исходного действия S_0 путем добавления к нему геометрических инвариантов, зависящих от внутренней и внешней кривизны мировой поверхности релятивистской струны [6]. Не нарушая параметрической инвариантности, космологический член (I.1) можно дополнить эйнштейновским слагаемым, пропорциональным внутренней скалярной кривизне R :

$$S_g = -\frac{\alpha}{2} \iint_\Sigma d^2u \sqrt{-g(u)}\, R\ . \qquad (I.2)$$

Здесь константа α является безразмерной величиной, тогда как постоянная γ в (I.1) имеет размерность квадрата массы. Действие (I.2) не меняет струнных уравнений движения, так как согласно теореме Гаусса – Бонне

$$-\frac{\alpha}{2} \iint_\Sigma d^2u \sqrt{-g(u)}\, R = \alpha \left(2\pi - \oint_{\partial\Sigma} ds\, k_g\right)$$

сводится к контурному интегралу по границе $\partial\Sigma$ от её геодезической кривизны k_g . Поэтому для бесконечных или замкнутых струн это слагаемое не представляет интереса. Однако, если ввести интегральную скалярную кривизну S_g в теорию открытой релятивистской струны, где $0 \le u^1 = \sigma \le \pi$, $\tau_1 \le u^0 = \tau \le \tau_2$, краевые условия такой системы модифицируются [7-9]. В результате действие $S_0 + S_g$ приводит к новой динамике открытых струн уже на классическом уровне.

Именно эта динамика и рассматривается в настоящей статье. В отличие от работ /8,9/ ортогональная калибровка при выводе граничных условий здесь не используется, что позволяет получить эти соотношения в параметрически-инвариантном виде для произвольной размерности d пространства Минковского. Мировые траектории концов струны определяются краевыми условиями как асимптотические линии с постоянным кручением $\varkappa$ и кривизной $k_i(\tau)=(-1)^{i+1}k_{g_i}(\tau)$, $i=1,2$, которая зависит от параметра эволюции τ. При $d=3$ динамика открытой релятивистской струны с эйнштейновским членом (1.2) сводится к краевой задаче для нелинейного уравнения Лиувилля. Показано, что решения этой задачи дают следующие ограничения на выбор функций $k_i(\tau)$, $i=1,2$:

$$k_1=k_2=const\,, \tag{1.3}$$

или

$$k_2(\tau+\pi)=-k_1(\tau)\,,$$
$$k_i(\tau+2\pi)=k_i(\tau)\,,\ i=1,2\,. \tag{1.4}$$

В случае (1.3) заметаемая струной поверхность является геликоидом, а её края – винтовыми линиями. Равенства (1.4) следуют из параметрического представления для мировой поверхности релятивистской струны в терминах произвольной периодической функции. Такое представление можно использовать, чтобы удовлетворить данным Коши.

2. Вариационный принцип

Уравнения движения и граничные условия в рассматриваемой модели следуют из принципа наименьшего действия

$$\delta(S_0+S_g)=0\,. \tag{2.1}$$

Здесь варьированию подвергаются координаты струны $x^\mu(u^1,u^2)$ при условии

$$\delta x^\mu(u^1,u^2)\big|_{u^1=\tau_1}=0=\delta x^\mu(u^1,u^2)\big|_{u^1=\tau_2}\,, \tag{2.2}$$

а вариация метрики g_{ij} по $x^\mu(u^1,u^2)$ имеет вид

$$\delta g_{ij}=x^\mu_{,i}\,\delta x_{\mu,j}+x^\mu_{,j}\,\delta x_{\mu,i}\,. \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) и (2.2) для δS_0 находим

$$\delta S_0=\gamma\iint_\Sigma d^2u\,(\sqrt{-g}\,\nabla^i\nabla_i x^\mu)\,\delta x_\mu-$$
$$-\int_{\tau_1}^{\tau_2} du^1(\sqrt{-g}\,g^{2k}x^\mu_{,k})\,\delta x_\mu\Big|_0^\pi\,. \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) ∇_j означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрике g_{ij}:

$$\nabla_j x^\mu_{,i}=x^\mu_{,ij}-\Gamma^k_{ij}\,x^\mu_{,k}\,, \tag{2.5}$$

Γ^k_{ij} – симметричная связность, согласованная с этой метрикой, а $\nabla^i\nabla_i$ – дифференциальный оператор Лапласа – Бельтрами:

$$\nabla^i\nabla_i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial u^i}\Big(\sqrt{-g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}\Big)\,. \tag{2.6}$$

Индексами с запятой обозначены частные производные по параметрам u^i, $i=1,2$.

Варьируя действие (1.2), получим

$$\delta S_g=-\frac{\alpha}{2}\iint_\Sigma d^2u\sqrt{-g}\,g^{ik}\,\delta R_{ik}\,. \tag{2.7}$$

Здесь мы учли, что в двумерном случае тензор Эйнштейна тождественно равен нулю:

$$R_{ij}-\frac{1}{2}R\,g_{ij}\equiv 0\,.$$

Как известно /10,11/, в теории гравитации с действием (1.2) соотношение (2.7) не дает динамических уравнений на метрику g_{ij}. Действительно, используя для вариации тензора Риччи δR_{ik} тождество Палатини

$$\delta R_{ik}=\nabla_l(\delta\Gamma^l_{ik})-\nabla_k(\delta\Gamma^l_{il})\,, \tag{2.8}$$

подынтегральное выражение в (2.7) можно представить следующим образом /10,11/:

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\delta R_{ik}=\sqrt{-g}\,\nabla_l W^l=\frac{\partial}{\partial u^l}(\sqrt{-g}\,W^l)\,, \tag{2.9}$$

где вектор $\sqrt{-g}\,w^l$ имеет вид

$$\sqrt{-g}\,w^l = \frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_k\,\delta(g\,g^{lk}). \qquad (2.10)$$

Поэтому δS_g в силу формулы Гаусса сводится к контурному интегралу по границе $\partial\Sigma$. Если теперь вариация поля δg_{ij} исчезает на $\partial\Sigma$, этот интеграл обращается в нуль.

Иная ситуация будет в теории конечной релятивистской струны, где варьирование проводится по координатам $x^\mu(u^1,u^2)$, удовлетворяющим условию (2.2). В этом случае интеграл (2.7) имеет вид

$$\delta S_g = -\frac{\alpha}{2}\int_0^\pi du^2\sqrt{-g}\,w^1\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} - \frac{\alpha}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} du^1\sqrt{-g}\,w^2\Big|_0^\pi . \qquad (2.11)$$

С помощью (2.3) для компонент вектора (2.10) находим

$$\sqrt{-g}\,w^1 = \frac{2}{\sqrt{-g}}(\nabla_2 x^\mu_{,1}\,\delta x_{\mu,2} - \nabla_2 x^\mu_{,2}\,\delta x_{\mu,1}) + \frac{\partial}{\partial u^2}\Big[\frac{1}{\sqrt{-g}}(x^\mu_{,2}\,\delta x_{\mu,1} - x^\mu_{,1}\,\delta x_{\mu,2})\Big], \qquad (2.12)$$

$$\sqrt{-g}\,w^2 = \frac{2}{\sqrt{-g}}(\nabla_1 x^\mu_{,2}\,\delta x_{\mu,1} - \nabla_1 x^\mu_{,1}\,\delta x_{\mu,2}) + \frac{\partial}{\partial u^1}\Big[\frac{1}{\sqrt{-g}}(x^\mu_{,1}\,\delta x_{\mu,2} - x^\mu_{,2}\,\delta x_{\mu,1})\Big].$$

После подстановки в (2.11) оба последних члена в (2.12) взаимно сокращаются. В результате, учитывая (2.2), δS_g можно записать так:

$$\delta S_g = \alpha\int_0^\pi du^2\Big(\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_2 x^\mu_{,2}\,\delta x_{\mu,1}\Big)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \qquad (2.13)$$
$$+\alpha\int_{\tau_1}^{\tau_2} du^1\Big[\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{\nabla_1 x^\mu_{,2}}{\sqrt{-g}}\Big)\delta x_\mu + \frac{\nabla_1 x^\mu_{,1}}{\sqrt{-g}}\,\delta x_{\mu,2}\Big]\Big|_0^\pi .$$

Таким образом, из принципа наименьшего действия (2.1) для вариаций (2.4) и (2.13) в силу независимости δx_μ и $\delta x_{\mu,i}$, $i = 1,2$, следуют обычные в теории релятивистской струны уравнения движения /5/:

$$\nabla^i\nabla_i x^\mu(u^1,u^2) = g^{ij}\nabla_i x^\mu_{,j}(u^1,u^2) = 0. \qquad (2.14)$$
$$i,j = 1,2.$$

Однако краевые условия теперь принимают вид

$$\nabla_2 x^\mu_{,2} = 0, \quad u^1 = \tau_1, \tau_2, \qquad (2.15)$$

$$\nabla_1 x^\mu_{,1} = 0, \quad u^2 = 0, \pi, \qquad (2.16)$$

$$\alpha\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{\nabla_1 x^\mu_{,2}}{\sqrt{-g}}\Big) = \gamma\sqrt{-g}\,g^{2k}x^\mu_{,k}, \quad u^2 = 0, \pi. \qquad (2.17)$$

Уравнения движения (2.14) и граничные условия (2.15)-(2.17) можно выразить в терминах метрического тензора g_{ij}, тензоров второй квадратичной формы $b_{\alpha|ij}$ и векторов кручения $\nu_{\alpha\beta|i} = -\nu_{\beta\alpha|i}$, $i,j = 1,2$, $\alpha,\beta = 3, \ldots, d$. Для этого рассмотрим подвижный базис на мировой поверхности релятивистской струны, образованный двумя касательными векторами $x^\mu_{,i}$, $i = 1,2$, и $(d-2)$ единичными нормалями n^μ_α, $\alpha = 3, \ldots, d$, и воспользуемся следующими деривационными формулами /12/:

$$\nabla_j x^\mu_{,i} = -\sum_{\alpha=3}^{d} b_{\alpha|ij}\,n^\mu_\alpha, \qquad (2.18)$$

$$n^\mu_{\alpha,i} = -b_{\alpha|ij}\,g^{jk}x^\mu_{,k} - \sum_{\beta=3}^{d}\nu_{\beta\alpha|i}\,n^\mu_{,\beta}. \qquad (2.19)$$

Так как нормали n^μ_α являются линейно-независимыми векторами, то подстановка (2.18) в (2.14) дает условие минимальности мировой поверхности релятивистской струны:

$$g^{ij}b_{\alpha|ij} = 0, \quad \alpha = 3, \ldots, d. \qquad (2.20)$$

С помощью (2.18) формулы (2.15)-(2.16) сводятся к следующим соотношениям:

$$b_{\alpha|22} = 0, \quad u^1 = \tau_1, \tau_2, \qquad (2.21)$$

$$b_{\alpha 111} = 0\,, \quad u^2 = 0, \pi\,. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.I8)-(2.I9) в (2.I7) и учитывая (2.22), получаем

$$\Big(\alpha \sum_{\alpha=3}^{d} b^2_{\alpha 112} - \gamma \cdot g\Big) g^{2k} x^{\mu}_{,k} =$$

$$= \alpha \sum_{\alpha=3}^{d} \Big[\sqrt{-g}\,\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{b_{\alpha 112}}{\sqrt{-g}}\Big) + \sum_{\beta=3}^{d} b_{\beta 112}\,\nu_{\beta\alpha 1 1}\Big]\eta^{\mu}_{\alpha}\,, \quad u^2 = 0, \pi. \tag{2.23}$$

Граничные условия (2.23) теперь необходимо спроектировать на векторы подвижного базиса $(x^{\mu}_{,i}, \eta^{\mu}_{\alpha})$. Проекция (2.23) на $x^{\mu}_{,i}$, $i = 1,2$, имеет вид

$$K(u^1,u^2)\big|_{u^2=0,\pi} = -\sum_{\alpha=3}^{d}\Big(\frac{b_{\alpha 112}}{\sqrt{-g}}\Big)^2\Big|_{u^2=0,\pi} = -\frac{\gamma}{\alpha}\,. \tag{2.24}$$

Здесь гауссова кривизна $K(u^1,u^2)$ мировой поверхности релятивистской струны определяется формулой /I2/

$$K = \frac{1}{2} R = -\sum_{\alpha=3}^{d} \det\| b_{\alpha i j}\| / g\,. \tag{2.25}$$

Проектируя условия (2.23) на векторы η^{μ}_{α}, $\alpha = 3, \ldots, d$, находим

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{b_{\alpha 112}}{\sqrt{-g}}\Big) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\beta=3}^{d} b_{\beta 112}\,\nu_{\beta\alpha 11} = 0\,, \tag{2.26}$$
$$\alpha = 3, \ldots, d\,, \quad u^2 = 0, \pi\,.$$

На мировой поверхности релятивистской струны можно всегда выбрать изотермическую или конформно-плоскую систему координат u^i, $i = 1,2$, в которой матрица $\| g_{ij}\|$ становится диагональной:

$$g_{11} = -g_{22} = -\lambda(u^1,u^2)\,, \quad g_{12} = 0\,, \tag{2.27}$$
$$g = -\lambda^2\,.$$

Равенства (2.20) в этих координатах записываются так:

$$b_{\alpha 111} = b_{\alpha 122}\,, \quad \alpha = 3, \ldots, d\,. \tag{2.28}$$

Вместе с условиями (2.22) соотношения (2.28) при $u^2 = 0, \pi$ означают, что мировые траектории, по которым движутся концы струны, являются асимптотическими линиями. Поэтому кручения таких линий $\varkappa_i(u^1)$, $i = 1,2$, связаны с гауссовой кривизной $K(u^1,u^2)$, $u^2 = 0, \pi$, мировой поверхности релятивистской струны формулой Эннепера /I3/:

$$\varkappa^2_i(u^1) = -K(u^1, \sigma_i)\,, \tag{2.29}$$
$$i = 1,2\,, \quad \sigma_1 = 0\,, \quad \sigma_2 = \pi\,.$$

Сравнивая (2.24) и (2.29), получаем

$$\varkappa^2_i(u^1) = \sum_{\alpha=3}^{d}\Big(\frac{b_{\alpha 112}}{\lambda}\Big)^2\Big|_{u^2=\sigma_i} = \frac{\gamma}{\alpha}\,, \tag{2.30}$$
$$i = 1,2\,.$$

Таким образом, кручения мировых траекторий концов струны постоянны и равны $|\varkappa_1| = |\varkappa_2| = \sqrt{\gamma/\alpha}$. С другой стороны, в силу свойства асимптотичности этих линий их кривизна $k_i(u^1)$, $i = 1,2$, дается соотношениями /I3-I5/

$$k_i(u^1) = (-1)^{i+1} k_{g_i}(u^1)\,, \quad i = 1,2\,, \tag{2.31}$$

где геодезическая кривизна $k_{g_i}(u^1)$, $i = 1,2$, в метрике (2.27) имеет вид

$$k_{g_i}(u^1) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\,\frac{\partial}{\partial u^2}(\ln\lambda)\Big|_{u^2=\sigma_i}\,, \quad i = 1,2\,. \tag{2.32}$$

Следует отметить, что мировые траектории концов струны в d-мерном объемлющем пространстве E^1_{d-1} не определяются с помощью функций $k_i(u^1)$ и $\varkappa_i(u^1)$, $i = 1,2$. Согласно дифференциальной геометрии /I2,I3/ для этого требуется задать ещё $(d-3)$ инварианта. Тем не менее, даже при $d = 3$ в определении мировых траекторий остается произвол, связанный с выбором их геодезической кривизны (2.3I)-(2.32).

3. Решение краевой задачи в трехмерном псевдоевклидовом пространстве E_2^1

Ограничимся случаем, когда заметаемая струной минимальная поверхность вложена в трехмерное объемлющее псевдоевклидово пространство E_2^1. Здесь векторы кручения равны нулю $\nu_{\alpha\beta|i}=0$, i = 1,2, поэтому равенства (2.30) и (2.26) принимают вид

$$\left(\frac{b_{12}}{\lambda}\right)^2 = \varkappa^2, \quad u^2 = 0, \pi, \tag{3.1}$$

$$\varkappa^2 = \gamma/\alpha.$$

Не теряя общности, можно окончательно зафиксировать параметры u^i, i = 1,2, на мировой поверхности релятивистской струны, если дополнить соотношения (2.27) следующими двумя условиями /16,17/:

$$(b_{11} \pm b_{12})^2 = q^2, \tag{3.2}$$

где q^2 – произвольная положительная константа. Чтобы удовлетворить равенствам (2.21)-(2.22), в (3.2) следует положить

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12}^2 = q^2, \tag{3.3}$$

то есть изотермические координаты (2.27) образуют асимптотическую сеть на мировой поверхности релятивистской струны.

Используя для гауссовой кривизны $K(u^1,u^2)$ в метрике (2.27) формулу /14/

$$K = \frac{1}{2}R = -\frac{1}{2\lambda}\left[(\ln\lambda)_{,11} - (\ln\lambda)_{,22}\right], \tag{3.4}$$

из уравнения (2.25) с учетом (3.3) получаем

$$(\ln\lambda)_{,11} - (\ln\lambda)_{,22} = \frac{2q^2}{\lambda}. \tag{3.5}$$

Таким образом, заметаемая струной минимальная поверхность с метрикой $\lambda(u^1,u^2)$ в трехмерном псевдоевклидовом пространстве E_2^1 описывается уравнением Лиувилля (3.5) и граничными условиями (3.1).

Хорошо известное общее решение уравнения (3.5) представляется с помощью двух произвольных функций $f(u^+)$ и $g(u^-)$ одной переменной $u^\pm = u^1 \pm u^2$ следующим образом /18/:

$$\lambda(u^1,u^2) = \dot{x}^2(u^1,u^2) = \frac{q^2}{4}\,\frac{\left[f(u^+) - g(u^-)\right]^2}{f'(u^+)\,g'(u^-)}. \tag{3.6}$$

Здесь $\dot{x}^2 > 0$ ($\dot{x}^\mu$ – времениподобный вектор), поэтому $f'(u^+)$ и $g'(u^-)$ имеют одинаковый знак $\varepsilon(f') = \varepsilon(g')$, $\varepsilon(z) = z/|z|$. Метрика $\lambda(u^1,u^2)$ определяется представлением (3.6) с точностью до совместного дробно-линейного преобразования функций $f(u^+)$ и $g(u^-)$ /19/:

$$f \to T(f), \quad g \to T(g),$$
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{3.7}$$

Подстановка (3.6) и (3.3) в граничные условия (3.1) при $u^2 = 0, \pi$ дает уравнения $(u^1 = \tau)$:

$$\frac{\left[f(\tau) - g(\tau)\right]^2}{4f'(\tau)\,g'(\tau)} = \frac{1}{|q\varkappa|}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\left[f(\tau+\pi) - g(\tau-\pi)\right]^2}{4f'(\tau+\pi)\,g'(\tau-\pi)} = \frac{1}{|q\varkappa|}. \tag{3.9}$$

В общем случае система (3.8)-(3.9) не определяет полностью функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$. Действительно, заменяя в (3.9) аргумент τ на $\tau+\pi$, получим

$$\frac{\left[f(\tau+2\pi) - g(\tau)\right]^2}{4f'(\tau+2\pi)\,g'(\tau)} = \frac{1}{|q\varkappa|}. \tag{3.10}$$

Теперь с помощью (3.8) и (3.10) можно выразить функцию $g(\tau)$ через $f(\tau+2\pi)$, $f(\tau)$ и $f'(\tau+2\pi)$, $f'(\tau)$. Подставляя это представление в (3.8), приходим к соотношению, связывающему между собой значения функции $f(\tau)$ и её производных до второго порядка включительно на концах интервала $[\tau, \tau+2\pi]$. При $\tau < \xi < \tau+2\pi$ $f(\xi)$ этим соотношением не определяется. Таким образом, наиболее общее решение системы (3.8) и (3.10) содержит одну произвольно заданную на интервале $[0, 2\pi]$ функцию. Именно такой функциональный произвол требуется в теории релятивистской струны, чтобы удовлетворить данным Коши.

Перейдем к построению решений системы (3.8) и (3.10). Для этого заметим, что уравнения (3.8) и (3.10), помимо подстановки (3.7), инвариантны относительно совместного дробно-линейного преобразования:

$$f(\tau) \longrightarrow T(g(\tau)), \quad g(\tau) \longrightarrow T(f(\tau)), \tag{3.11}$$

которое перемешивает функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$. Согласно (3.7) и (3.11) уравнение (3.10) сводится к (3.8) с помощью одной из следующих двух подстановок:

$$f(\tau+2\pi) = f(\tau), \tag{3.12}$$

$$g(\tau) = g(\tau) \tag{3.13}$$

или

$$f(\tau+2\pi) = T(g(\tau)), \tag{3.14}$$

$$g(\tau) = T(f(\tau)). \tag{3.15}$$

Покажем, что соотношения (3.14)-(3.15) приводят к частным решениям специального вида, когда заметаемая струной поверхность является геликоидом, а концы струны описывают винтовые линии. Такие движения характеризуются постоянной кривизной k_i, $i = 1,2$, определяемой формулами (2.31)-(2.32). Из условия $|\varkappa_1| = |\varkappa_2| = |\varkappa|$ следует равенство $|k_1| = |k_2| = |k|$, которое для геликоида принимает вид $k_1 = k_2 = k$. Поэтому, подставляя (3.6) в (2.31)-(2.32), дополнительно к системе (3.8) и (3.10) в этом случае получим уравнения

$$\frac{|f(\tau)-g(\tau)|}{\sqrt{f'(\tau)g'(\tau)}}\left\{\frac{d}{d\tau}\ln\frac{g'(\tau)}{f'(\tau)} + 2\,\frac{f'(\tau)+g'(\tau)}{f(\tau)-g(\tau)}\right\} = \frac{4k}{|\varkappa|}, \tag{3.16}$$

$$\frac{|f(\tau+2\pi)-g(\tau)|}{\sqrt{f'(\tau+2\pi)g'(\tau)}}\left\{\frac{d}{d\tau}\ln\frac{g'(\tau)}{f'(\tau+2\pi)} + 2\,\frac{f'(\tau+2\pi)+g'(\tau)}{f(\tau+2\pi)-g(\tau)}\right\} = -\frac{4k}{|\varkappa|}. \tag{3.17}$$

Общее решение системы (3.16)-(3.17) дается выражениями (3.14)-(3.15),

где преобразованию T сопоставляется (2x2) матрица M:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая условию

$$(\mathrm{tr}\,M)^2 = 4\,\frac{k^2}{\varkappa^2}\det M. \tag{3.18}$$

Оставшееся уравнение (3.8) после подстановки в него (3.15) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка на функцию $f(\tau)$:

$$\frac{f'^2}{\{cf^2+(d-a)f-b\}^2} = \frac{|q\varkappa|}{4\det M}, \tag{3.19}$$

и легко интегрируется. Используя обозначение $4\omega = (1-k^2/\varkappa^2)$, приведем окончательные выражения для функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$:

при $|k| < |\varkappa|$:

$$\begin{gathered} f(\tau) = -\varepsilon(f')\,\mathrm{ctg}(a\tau+\Delta_1), \\ g(\tau) = -\varepsilon(f')\,\mathrm{ctg}(a\tau+\Delta_2), \\ a^2 = \omega|q\varkappa|, \quad \frac{k}{|\varkappa|}\frac{1}{2\sqrt{\omega}} = \mathrm{ctg}(\Delta_1-\Delta_2), \end{gathered} \tag{3.20}$$

причем константы k и $\varkappa$ связаны между собой соотношением

$$\frac{k}{|\varkappa|}\left(1-\frac{k^2}{\varkappa^2}\right)^{-1/2} = \mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{|q\varkappa|}\left(1-\frac{k^2}{\varkappa^2}\right)^{1/2}\right];$$

при $|k| = |\varkappa|$:

$$\begin{gathered} f(\tau) = \varepsilon(f')(a\tau+\Delta_1), \\ g(\tau) = \varepsilon(f')(a\tau+\Delta_2), \\ |\varkappa| = 4/\pi^2|q|, \quad a\pi = (\Delta_2-\Delta_1); \end{gathered} \tag{3.21}$$

при $|k| > |\varkappa|$:

$$f(\tau) = \varepsilon(f')\,\mathrm{th}(a\tau+\Delta_1),$$

$$g(\tau)=\varepsilon(f')\,\mathrm{th}(a\tau+\Delta_2),$$

$$a^2=|\omega||q\varkappa|,\quad \frac{k}{|\varkappa|}\frac{1}{2\sqrt{|\omega|}}=\mathrm{cth}(\Delta_1-\Delta_2), \qquad (3.22)$$

где

$$\frac{k}{|\varkappa|}\left(\frac{k^2}{\varkappa^2}-1\right)^{-1/2}=-\,\mathrm{th}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{|q\varkappa|}\left(\frac{k^2}{\varkappa^2}-1\right)^{1/2}\right].$$

Отметим, что мировые траектории концов струны в формулах (3.2I)-(3.22) имеют постоянную отрицательную кривизну k. Подстановка (3.20)-(3.22) в (3.6) дает статическую (не зависящую от параметра эволюции τ) метрику геликоида. Другие частные решения уравнений (3.8) и (3.I0) для этой метрики в терминах комплекснозначных функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ были получены в работе /9/.

Рассмотрим теперь уравнение (3.8) с периодическим условием (3.I2). Для решения этого уравнения можно использовать подстановку

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-g(\tau)}=-\frac{\sqrt{|q\varkappa|}}{2}\psi(\tau),\quad \frac{g'(\tau)}{f(\tau)-g(\tau)}=-\frac{\sqrt{|q\varkappa|}}{2}\psi^{-1}(\tau), \qquad (3.23)$$

где $\psi(\tau)$ - произвольная функция. Общий интеграл соотношений (3.23) имеет вид

$$f(\tau)-g(\tau)=C_0\exp\left\{-\frac{\sqrt{|q\varkappa|}}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\xi\,\frac{\psi^2(\xi)-1}{\psi(\xi)}\right\}. \qquad (3.24)$$

Здесь константы C_0 и τ_0 удовлетворяют условию $f(\tau_0)-g(\tau_0)=C_0$. С помощью (3.23)-(3.24) получаем следующие представления для функций $f'(\tau)$ и $g'(\tau)$:

$$f'(\tau)=-\frac{C_0}{2}\sqrt{|q\varkappa|}\,\psi(\tau)\exp\left\{-\frac{\sqrt{|q\varkappa|}}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\xi\,\frac{\psi^2(\xi)-1}{\psi(\xi)}\right\}, \qquad (3.25)$$

$$g'(\tau)=-\frac{C_0}{2}\sqrt{|q\varkappa|}\,\psi^{-1}(\tau)\exp\left\{-\frac{\sqrt{|q\varkappa|}}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\xi\,\frac{\psi^2(\xi)-1}{\psi(\xi)}\right\}. \qquad (3.26)$$

Равенство (3.I2) в применении к (3.25) означает

$$\psi(\tau+2\pi)=\psi(\tau),$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi}d\xi\,\frac{\psi^2(\xi)-1}{\psi(\xi)}=0. \qquad (3.27)$$

Соотношения (3.26) - (3.27) дополнительно к (3.I2) дают

$$g(\tau+2\pi)=g(\tau). \qquad (3.28)$$

Таким образом, решение (3.25)-(3.26) уравнения (3.8) с условиями (3.I2) и (3.28) содержит одну произвольную периодическую функцию $\psi(\tau)$.

Подставляя представления (3.24), (3.25)-(3.26) в формулы (3.6) и (2.3I)-(2.32), можно выразить кривизну мировых траекторий концов струны в терминах $\psi(\tau)$:

$$k_1(\tau)=-\sqrt{\frac{|\varkappa|}{|q|}}\,\psi^{-1}(\tau)\left\{\psi'(\tau)+\frac{1}{2}\sqrt{|q\varkappa|}\left[\psi^2(\tau)+1\right]\right\}, \qquad (3.29)$$

$$k_2(\tau+\pi)=-k_1(\tau). \qquad (3.30)$$

С учетом (3.27) отсюда следуют условия периодичности

$$k_i(\tau+2\pi)=k_i(\tau),\quad i=1,2. \qquad (3.3I)$$

Параметрическое представление (3.25)-(3.26) приводит к мировым траекториям концов струны с постоянным кручением $\varkappa$ и кривизной $k_i(\tau)$, i = I,2, удовлетворяющей равенствам (3.30)-(3.3I). Отметим, что случай постоянной кривизны $k_2=-k_1=-k$, когда концы струны движутся в противоположных направлениях по винтовым линиям одинакового радиуса k^{-1}, здесь не представляет интереса, так как уравнение с разделяющимися переменными (3.29) на функцию $\psi(\tau)$ в силу (3.27) имеет только тривиальные решения. С другой стороны, соответствующее частным решениям (3.20)-(3.22) равенство $k_2=k_1=\mathrm{const}$ из соотношений (3.30)-(3.3I) получить нельзя. Таким образом, формулы (3.25)-(3.26) представляют собой общее решение системы уравнений (3.8)-(3.9), а (3.20)-(3.22) являются особыми интегралами этой системы, которые не включаются в общее решение /20/.

4. Заключение

Как известно /3-5/, граничные условия в модели релятивистской струны, определяемой действием Намбу – Гото (I.I), приводят к сингулярным движениям её концов со скоростью света. В калибровке $x^0 = t(\tau,\sigma) = \tau$ это выражается следующими соотношениями:

$$\left\{ \frac{d\vec{x}(t,\sigma_i)}{dt} \right\}^2 = 1 \,, \qquad (4.I)$$

$$i = 1,2 \,, \quad \sigma_1 = 0 \,, \quad \sigma_2 = \pi \,.$$

Если же ввести такую параметризацию в граничные условия (3.I), то вместо формулы (4.I) для скорости концов струны теперь получим

$$\left\{ \frac{d\vec{x}(t,\sigma_i)}{dt} \right\}^2 = 1 - \frac{q^2}{\chi^2} < 1 \,, \qquad (4.2)$$

$$i = 1,2 \,, \quad \sigma_1 = 0 \,, \quad \sigma_2 = \pi \,.$$

Таким образом, в теории открытой релятивистской струны с эйнштейновским членом (I.2) ее концы движутся со скоростью, меньшей скорости света, поэтому отмеченных выше трудностей здесь не возникает. Более того, с точки зрения этой теории сингулярные движения в модели Намбу – Гото получают простую геометрическую интерпретацию. Действительно, переход к действию (I.I) при $\alpha \to 0$ означает $\chi \to \infty$, то есть кручение мировых траекторий концов струны (и, следовательно, гауссова кривизна струнной поверхности при $\sigma = \sigma_i$, i = I,2) обращается в бесконечность. При этом формулы (4.2) и (4.I) совпадают.

Авторы признательны В.В. Нестеренко за интерес к работе и полезные обсуждения.

Литература

I. Schwarz J.H. Phys. Reports, I982, 89, p. 223-322.
2. Green M.B. Surveys in high energy physics, I983, 3, p. I27.
3. Rebbi G. Phys. Reports, I974, I2C, p. I-73.
4. Scherk J. Rev. Mod. Phys., I975, 47, p. I23-I64.
5. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, I984, I5, с. I032-I072.
6. Polyakov A. Nucl. Phys., I986, B268, p. 406-412.
7. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ТМФ, I977, 32, с. 29I-298.
8. Barbashov B.M., Koshkarov A.L. Lett. in Math. Phys., I979, 3, p. 39-46.
9. Желтухин А.А. ЯФ, I98I,34, с. 562-573.
I0. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., "Наука", I973.
II. Вейнберг С. Гравитация и космология. М., "Мир", I975.
I2. Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton, I964.
I3. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., ИЛ, I960.
I4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М., "Наука", I986.
I5. Eisenhart L.P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publ., INC, N.Y., I960.
I6. Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ТМФ, I979, 39, с. 27-34.
I7. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. Comm. Math. Phys., I982, 84, p. 47I-48I.
I8. Liouville J. J. Math. Pures Appl., 1853, I8, p. 7I.
I9. Bianchi L. Ann. Sci. Norm. Super. Pisa Ser. IV, 1879, 2, p. 285.
20. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, I958.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 августа I986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Барбашов Б.М., Червяков А.М.

Р2-86-572

К теории конечной релятивистской струны с кривизной

Обсуждается роль эйнштейновского члена в динамике открытых релятивистских струн. Граничные условия, дополняющие уравнения движения такой системы, получены в параметрически-инвариантном виде для произвольной размерности пространства-времени. Мировые траектории концов струны определяются этими условиями как асимптотические линии с постоянным кручением и кривизной, которая зависит от параметра эволюции. Динамика открытой релятивистской струны с эйнштейновским членом в трехмерном псевдоевклидовом пространстве сводится к краевой задаче для нелинейного уравнеиия Лиувилля. Эта задача допускает как общее решение в терминах произвольной периодической функции, так и особые интегралы. Показано, что общее решеиие приводит к периодическим условиям для кривизны мировых траекторий концов струны. Особые интегралы соответствуют движениям этих концов по винтовым линиям одинакового радиуса, когда заметаемая струной поверхиость является геликоидом.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Barbashov B.M., Chervyakov A.M.

P2-86-572

On Theory of Open Relativistic String with a Curvature

In dynamics of open strings the role of the Einstein term which is proportional to the Gaussian curvature of the string world surface is discussed. The boundary conditions complementing the equations of motion of such a system are obtained in the parametric invariant form for d-dimensional space-time. The world trajectories of the string endpoints are determined by these conditions as asymptotic lines with a constant torsion and the curvature depending on the evolution parameter. In three-dimensional space-time the dynamics of the open relativistic string with the Einstein term is reduced to the boundary problem for the nonlinear Liouville equation. This problem admits the general solution in terms of an arbitrary periodic function and the singular integrals. It is shown that the general solution leads to periodicity conditions for the curvature of the world trajectories of string endpoints. The singulars describe the motions of these ends over helices of equal radius, when the string sheet is a helicoid.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986