

**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P2-86-571

С.И.Виницкий, Г.С.Погосян\*, А.Н.Сисакян,  
В.М.Тер-Антонян\*

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ  
В УРАВНЕНИИ ХИЛЛЕРААСА

---

\*Ереванский государственный университет

**1986**

1. В настоящей работе получено уравнение Хиллерааса для пространства произвольной размерности, исследован одномерный случай и проведен анализ разделения переменных в двумерном уравнении Хиллерааса в полярной и двух биполярных системах координат.

2. Метод получения уравнения Хиллерааса из уравнения Шредингера для атома водорода легко обобщается на случай пространства произвольной размерности. Функция  $\Psi(\vec{r})$ , удовлетворяющая уравнению Хиллерааса, выражается через волновую функцию  $\psi$  -мерного атома водорода  $\Psi(\vec{r})$  в импульсном представлении с помощью соотношения

$$\Psi(\vec{r}) = (p^2 - 2\mu E)^{\frac{d+1}{2}} \Phi(\vec{r}), \quad (1)$$

где  $\mu$  - масса,  $E$  - энергия. Из теоремы вириала следует, что нормированным на единицу волновым функциями  $\Psi(\vec{r})$  соответствуют функции  $\Phi(p)$ , удовлетворяющие условию нормировки

$$\int \Phi^*(\vec{p}) \Phi(\vec{p}) \frac{d\vec{p}}{(p^2 - 2\mu E)^2} = 2(-2\mu E)^2, \quad E < 0. \quad (2)$$

Уравнение Хиллерааса имеет следующий вид:

$$(p^2 - 2\mu E)^2 \Delta \Phi(\vec{p}) - 2(d-2)(p^2 - 2\mu E) \vec{p} \vec{\nabla} \Phi(\vec{p}) + [(d-1)^2 2\mu E + 4\gamma^2] \Phi(\vec{p}), \quad (3)$$

где параметр  $\gamma = \frac{\mu e^2 Z^2}{\hbar}$ , а  $Z$  - заряд, определяющий интенсивность кулоновского взаимодействия. При  $d=1$  и  $d=2$  в уравнении (3) некоторые члены исчезают. В этом смысле пространства размерности  $d=1$  и  $d=2$  являются выделенными. Ниже исследованы именно эти случаи.

3. Одномерный атом водорода ( $d=1$ ) был изучен в координатном представлении в работе /3/, а с позиций фокусного подхода /4/ - в работе /5/.

В области дискретного спектра ( $p_0^2 = -2\mu E > 0$ ) уравнение Хиллерааса, как это следует из (3), имеет вид

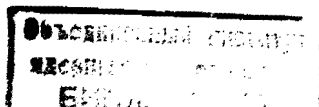
$$(p^2 + p_0^2)^2 \frac{d^2 \Phi}{dp^2} + 2(p^2 + p_0^2) p \frac{d\Phi}{dp} + 4\gamma^2 \Phi = 0. \quad (4)$$

Замена переменной

$$p = p_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (-\pi \leq \alpha \leq \pi)$$

значительно упрощает вид уравнения (4):

$$\frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{p_0^2} \Phi = 0.$$



После этого спектр энергии

$$E_n = -\frac{1}{2\mu} \frac{\gamma^2}{n^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

и нормированные волновые функции вычисляются элементарно

$$\psi_n^{(\pm)}(\vec{p}) = \frac{1 + \cos \alpha}{\sqrt{\pi p_0}} \begin{pmatrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{pmatrix}, \quad n > 0. \quad (6)$$

Здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $n = 1, 2, \dots$  для  $\psi^{(+)}$  и  $\psi^{(-)}$  соответственно. Из (5) и (6) сразу следуют два характерных свойства одномерного атома водорода [3]:

а) энергетический спектр двукратно вырожден;

б) отсутствует основное состояние (падение на центр).

В работе [3] было показано, что при  $n \neq 0$  волновые функции  $\psi^{(\pm)}(x)$  координатного представления выражаются через полиномы Лаггера

$$\psi_n^{(\pm)}(x) = \left\{ \frac{|x|}{x} \right\} \sqrt{\frac{2}{n^2 \pi}} e^{-|x|/n} L_n^{\frac{1}{2}}(2p_0|x|), \quad (7)$$

а при  $n = 0$  справедливо соотношение

$$|\psi_0^{(+)}(x)|^2 = \delta(x). \quad (8)$$

Восстановим эти результаты из найденного нами решения (6). Используя преобразование Фурье

$$\psi_n^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \psi_n^{(\pm)}(p) dp$$

и равенства

$$1 + \cos \alpha = \frac{2p_0^2}{p^2 + p_0^2},$$

$$e^{in\alpha} = (-1)^n \left( \frac{p - ip_0}{p + ip_0} \right)^n,$$

имеем

$$\psi_n^{(\pm)}(x) = \frac{(-1)^n p_0^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} [A_n(x) \pm A_n(-x)],$$

где

$$A_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{(p - ip_0)^{n-1}}{(p + ip_0)^{n+1}} dp.$$

Последний интеграл вычисляется с помощью теоремы о вычетах и имеет

вид

$$A_n(x) = -2\pi \Theta(-x) |x|^n e^{-p_0|x|} F(1-n; 2; 2p_0|x|).$$

Таким образом, учитывая соотношение

$$F(1-n; 2; 2p_0|x|) = -\frac{1}{n \cdot (n)!} L_n^1(2p_0|x|),$$

приходим к результату (7).

Перейдем теперь к выводу соотношения (8). Фурье-образ функции  $\psi_0^{(+)}(p)$  получается с помощью теоремы о вычетах

$$\psi_0^{(+)}(x) = \sqrt{p_0} e^{-p_0|x|},$$

а требуемый результат воспроизводится после применения формулы

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha|x|/\alpha}}{\alpha}.$$

4. Рассмотрим двумерное уравнение Хиллераса (дискретный спектр)

$$(p^2 + p_0^2)^2 \Delta \Phi(\vec{p}) + (p_0^2 - 4\gamma^2) \Phi(\vec{p}) = 0. \quad (9)$$

В полярных координатах

$$p_x = p \cos \varphi, \quad p_y = p \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

переменные в (9) разделяются, и после замены

$$p = p_0 \tan \frac{\theta}{2}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

легко показать, что решение, удовлетворяющее условию нормировки (2), имеет вид

$$\psi_{nm}(\vec{p}) = p_0^2 \left( \frac{2}{p^2 + p_0^2} \right)^2 Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Спектр энергий определяется выражением

$$E_n = -\frac{2\mu e^2 z^2}{\hbar^2} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10a)$$

а целые числа  $m$  находятся в интервале  $|m| < n$ .

В биполярических координатах двух типов:

$$P_x = \frac{\mathcal{P} \sin u'}{\cosh u' + \sin \varphi'}, \quad P_y = \frac{\mathcal{P} \cos \varphi'}{\cosh u' + \sin \varphi'}$$

$$P_x = \frac{\mathcal{P} \sin \varphi''}{\cosh u'' + \cos \varphi''}, \quad P_y = \frac{\mathcal{P} \sin u''}{\cosh u'' + \cos \varphi''}$$

( $u', u'' \in (-\infty, \infty)$ ;  $\varphi', \varphi'' \in [0, 2\pi)$ ) переменные в уравнении (9) разделяются, если  $\mathcal{P} = P_0$ . Пользуясь заменами

$$\tanh u' = \cos \theta', \quad \tanh u'' = \cos \theta''$$

и учитывая условие нормировки (3), можно показать, что биполярические базисы, соответствующие уровням энергии (10а), имеют вид:

$$\psi'_{nm'}(\vec{p}) = P_0^{\ell} \left( \frac{2}{p^2 + p_0^2} \right)^{3/2} Y_{nm'}(\theta', \varphi'), \quad (11)$$

$$\psi''_{nm''}(\vec{p}) = P_0^{\ell} \left( \frac{2}{p^2 + p_0^2} \right)^{3/2} Y_{nm''}(\theta'', \varphi''), \quad (12)$$

где  $|m'| \leq n$ ,  $|m''| \leq n$ .

Отобразим плоскость  $(P_x, P_y)$  на сферу единичного радиуса<sup>/4/</sup>

$$\tilde{E}_x = \frac{2P_0 P_x}{p^2 + p_0^2}, \quad \tilde{E}_y = \frac{2P_0 P_y}{p^2 + p_0^2}, \quad \tilde{E}_z = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}. \quad (13)$$

Очевидно,  $\tilde{E}_x^2 + \tilde{E}_y^2 + \tilde{E}_z^2 = 1$ . Из (13) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= \sin \theta \cos \varphi = \cos \theta' = \sin \theta'' \sin \varphi', \\ \tilde{E}_y &= \sin \theta \sin \varphi = \sin \theta' \cos \varphi' = \cos \theta'', \\ \tilde{E}_z &= \cos \theta = \sin \theta' \sin \varphi' = \sin \theta'' \cos \varphi' \end{aligned} \quad (14)$$

и поэтому  $(\theta, \varphi)$ ,  $(\theta', \varphi')$  и  $(\theta'', \varphi'')$  имеют смысл сферических углов, относящихся к трем различным выборам направления полярной оси: перпендикулярно плоскости  $(P_x, P_y)$ , вдоль оси  $P_x$  и вдоль оси  $P_y$  соответственно.

Пусть  $(\theta', \varphi')$  и  $(\theta, \varphi)$  описывают положение точки на сфере в двух системах координат, а  $(\alpha, \beta, \gamma)$  — углы Эйлера, характеризующие последовательность вращений, переводящих неэтрированную систему координат в этрированную. Пользуясь формулами<sup>/6/</sup>:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos(\varphi - \alpha) \\ \operatorname{ctg}(\varphi' - \gamma) &= \operatorname{ctg}(\varphi - \alpha) \cos \beta - \frac{\operatorname{ctg} \theta \sin \beta}{\sin(\varphi - \alpha)} \end{aligned}$$

можно показать, что базисы (10), (11) и (12) связаны между собой следующим образом:

$$\psi'_{nm'}(\vec{p}) = \sum_m \mathcal{D}_{mm'}^n(-\pi/2, -\pi/2, 0) \psi_{nm}(\vec{p}),$$

$$\psi''_{nm''}(\vec{p}) = \sum_m \mathcal{D}_{mm''}^n(0, \pi/2, \pi/2) \psi_{nm}(\vec{p}),$$

$$\psi''_{nm''}(\vec{p}) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm''}^n(-\pi/2, -\pi/2, 0) \psi'_{nm'}(\vec{p}).$$

Всего было отмечено, что разделение переменных в биполярических координатах возможно при условии  $\mathcal{P} = P_0$ . Поскольку  $P_0$  квантовано, то разным уровням энергии соответствуют различные биполярические координаты.

Мы благодарны Л.С. Давтяну, И.В. Комарову, Л.Г. Мардолну и Л.И. Нономареву за интересные обсуждения.

#### Литература:

1. Hylleraas E. Z. Phys. 74, 216, 1932.
2. Englfield M.J. "Group Theory and the Coulomb Problem". Wiley-Interscience, New-York, Sydney, Toronto, 1972.
3. Loudon R. "One-Dimensional Hydrogen Atom". Amer. J. Phys. 27, N 9, 649-655, 1959.
4. Fock V.A. Z. Phys. 98, 145, 1935.
5. Давтян Л.С., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Тер-Антонов В.М. Препринт ОИЯИ Р2-86-393, Дубна, 1986.
6. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Наука, Л., 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 августа 1986 года.

Виницкий С.И. и др.

P2-86-571

Разделение переменных в уравнении Хиллерааса

Найдено уравнение Хиллерааса для атома водорода в импульсном пространстве произвольной размерности. Получены решения дискретного спектра одномерного и двухмерного уравнений Хиллерааса. Показано, что коэффициенты, реализующие разложения полярного и двух биполярных базисов двухмерного атома водорода, выражаются через D-функции Вигнера от углов  $\pi/2$ .

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Vinitsky S.I. et al.

P2-86-571

Separation of Variables in the Hylleraas Equation

The Hylleraas equation is found for a hydrogen atom in an arbitrary-dimensional momentum space. Solutions are obtained for the discrete spectrum of the one- and two-dimensional Hylleraas equation. It is shown that the coefficients realizing expansions of polar and bipolar bases of a two-dimensional hydrogen atom are expressed in terms of the Wigner D-functions of angles  $\pi/2$ .

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986