86-525

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-525

Р.А.Асанов

ЗАМЕЧАНИЕ К ТОЧНОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

1986

Названная в заглавии задача, поставленная в общей теории относительности А.Эйнштейном (1915) и решенная им приближенно /1/, была впервые решена точно К.Шварцшильдом (1916) /2/, что и привело к термину "проблема Шварцшильда". Одна из приведенных им статических форм интервала имеет весьма изящный вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\alpha}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \frac{2\alpha}{\rho}} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

(Здесь пользуемся обозначениями В.А.Фока). Из выбранных Шварцшильдом координат ct, ρ, θ, φ координатой ρ можно пользоваться только при $\rho > 2\alpha$, т.е. когда метрические функции необенны. Требование соответствия с теорией Ньютона приводит к тому, что $\alpha = \frac{GM}{c^2}$, здесь G -ньютонова гравитационная постоянная, M -масса тела.

В ОТО допустимы, как говорят, любые преобразования 4-координат - во всяком случае, достаточно гладкие и с якобианом, не обращающимся в нуль или бесконечность. Поэтому решение задачи может быть представлено в различных формах (или: в различных координатах), что и было сделано многими авторами, начиная с самого Шварцшильда. Известны такие результаты на этом пути, как теорема Биркгоффа (1923), нестатические формы, получаемые с помощью"сопутствующих" координат Толмена (1934), очень впечатляющая нестатическая форма Крускала (1960) /3/ и т.д.

Запишем интервал (1) в "прямоугольных" 3-координатах $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$:

$$\bar{x}_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad \bar{x}_2 = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad \bar{x}_3 = \rho \cos\theta, \quad (2)$$

$$ds^2=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)(c\,dt)^2-d\bar{x}_i d\bar{x}_i-\left[\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{-1}-1\right]\frac{(\bar{x}_i d\bar{x}_i)^2}{\rho^2}, \qquad (3)$$

где надо считать $\rho \equiv \sqrt{\bar{x}_i \bar{x}_i}$, i = I,2,3, и для него имеем $\sqrt{-g}$ = I. При сохранении статичности интервала ($\partial g_{\mu\nu}/\partial t$ = 0, g_{0i} = 0) и сферической симметрии его пространственной части здесь имеется возможность перехода (помимо возможности $t'=at+b$) к новым "прямоугольным" 3-координатам x_1 , x_2 , x_3 , который в сферических ρ , θ , φ координатах выглядел бы просто как достаточно произвольное преобразование $r=r(\rho)$, или $\rho=\rho(r)$, здесь $r\equiv\sqrt{x_i x_i}$. В прямоугольных координатах оно, очевидно, имеет вид

$$\bar{x}_i = x_i\frac{\rho(r)}{r}. \qquad (4)$$

В новых координатах интервал (3) примет вид

$$ds^2=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}\right)(c\,dt)^2-\frac{\rho^2(r)}{r^2}dx_i dx_i-\left(\frac{\rho'^2}{1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}}-\frac{\rho^2(r)}{r^2}\right)\frac{(x_i dx_i)^2}{r^2}, \qquad (5)$$

где $r\equiv\sqrt{x_i x_i}$, $\rho'\equiv\frac{d\rho(r)}{dr}$, $\rho=\rho(r)$ – произвольная функция, на которую, однако, для сохранения соответствия с теорией Ньютона нужно наложить условие на пространственной бесконечности:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\rho(r)}{r}=1. \qquad (6)$$

Итак, в координатах ct , x_1, x_2, x_3 имеем

$$g_{00}=1-\frac{2\alpha}{\rho(r)},\quad g^{00}=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)^{-1},\quad g_{0i}=0,\quad g^{0i}=0,$$
$$g_{ik}=-\frac{\rho^2}{r^2}\left[\delta_{ik}+\left(\frac{\rho'^2 r^2}{\rho^2-2\alpha\rho}-1\right)\frac{x_i x_k}{r^2}\right], \qquad (7)$$
$$g^{km}=-\frac{r^2}{\rho^2}\left[\delta_{km}+\left(\frac{\rho^2-2\alpha\rho}{\rho'^2 r^2}-1\right)\frac{x_k x_m}{r^2}\right].$$

Детерминант метрического тензора (7), пропорциональный квадрату якобиана $\left|\frac{\partial\bar{x}_i}{\partial x_k}\right|=\frac{\rho^2}{r^2}\rho'$, равен $g=-\frac{\rho^4(r)}{r^4}\rho'^2$.

Заметим, что следующее возможное преобразование вида (4) от x_i -координат к координатам, скажем, z_1 , z_2, z_3 , а именно $x_i=z_i\frac{r(R)}{R}$, $R\equiv\sqrt{z_i z_i}$, оставит вид **интеграла** (5) неизменным, (естественно, с заменой $\rho(r)\to\rho(r(R))$, $r\to R$, $\frac{d\rho}{dr}\to\frac{d\rho}{dR}$), **так же**, как и вид детерминанта, который станет равным

$$g=-\frac{\rho^4}{r^4}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2\frac{r^4}{R^4}\left(\frac{dr}{dR}\right)^2=-\frac{\rho^4(r(R))}{R^4}\left(\frac{d\rho}{dR}\right)^2.$$

(При этом сохраним и условие соответствия с теорией Ньютона $\lim\frac{r(R)}{R}$ = I при $R\to\infty$). Таким образом, преобразования "радиальной координаты" (с неособенным якобианом) обладают некоторым "групповым" свойством.

В своей книге[4] В.А.Фок (I955) предложил наложить на координаты $x^\mu=ct$, x_1 , x_2, x_3 дополнительное условие де Дондера (I92I), имеющее вид

$$\Box x^\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}\right)=0, \qquad (8)$$

и назвал координаты, подчиняющиеся этому условию, гармоническими.

В данном случае очевидно (метрика статическая), что координата $x^0=ct$ уже гармоническая. Условие гармоничности (8), наложенное на пространственные координаты $x^i = x_1, x_2, x_3$, приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2-2\alpha\rho)\frac{dr}{d\rho}\right]-2r=0, \tag{9}$$

имеющему общее решение вида

$$r=C_1\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right)+C_2\,Q\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right), \quad Q(z)\equiv\frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}-1. \tag{10}$$

Константа C_1 полагается равной α в силу условия "ньютоновости" (6). Константу C_2 Фок положил равной нулю из-за того, что функция $Q\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right)$ обращается при $\rho\to 2\alpha$ в бесконечность как $\ln(\rho-2\alpha)$. Итак, форма решения, предложенная Фоком, имеет вид (5) при $\rho(r)=r+\alpha$. Надо заметить, что предположение $C_2=0$ не спасает интервал Фока от особенности в точке $r=\alpha$ (в ней $g_{00}\to 0$, $g_{ik}\to\infty$), вполне соответствующей точке $\rho=2\alpha$ в шварцшильдовых сферических координатах, той самой точке известной особенности на "гравитационном радиусе" $\rho_g=2\alpha$. Поэтому попытаемся рассмотреть случай, когда $C_2\neq 0$.

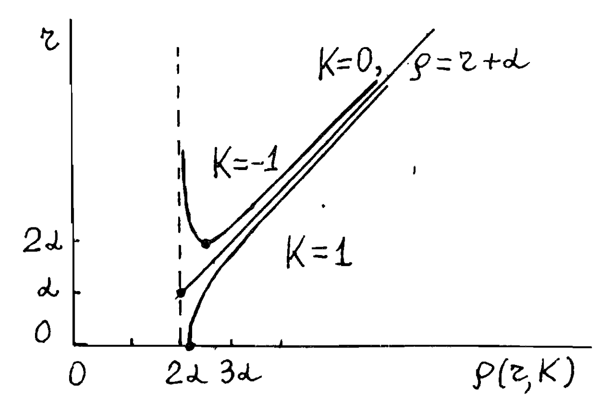
Прежде всего отметим, что при $\rho\to\infty$ функция $Q\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right)$ ведет себя как $\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2+\ldots\to 0$, что позволяет удовлетворить условию "ньютоновости" (6) при выборе, по-прежнему, $C_1=\alpha$ и любой константе C_2. Константа C_2, хотя и имеет размерность длины, в рамках ОТО не имеет никакого очевидного физического смысла, являясь просто неким коэффициентом при переходе к какой-то новой "радиальной"координате $r=r(\rho)$, соответствующей гармоническим 3-координатам x_i. Поэтому положим ее равной, скажем, $C_2=-K\alpha$, где K уже безразмерная константа. Итак, пока нет никаких соображений, чтобы каким-то образом предпочесть определенное значение для величины K. Из (10) имеем уравнение

$$r=\rho(r)-\alpha-K\alpha\left(\frac{\rho-\alpha}{2\alpha}\ln\frac{\rho}{\rho-2\alpha}-1\right), \tag{11}$$

определяющее функцию $\rho=\rho(r,K)$. Отсюда

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)^{-1}=\frac{dr}{d\rho}=\frac{r}{\rho-\alpha}+\frac{K\alpha^3}{\rho(\rho-\alpha)(\rho-2\alpha)}. \tag{12}$$

Поскольку выразить явно функцию $\rho(r,K)$ в общем случае затруднительно, обратимся к рисунку, где схематически представлены функция $\rho=r+\alpha$ (Фока) и две функции $\rho(r,K)$, когда $K=\pm 1$.



Видно, что при $K<0$ имеется одна точка, ρ_0, τ_0, в которой $\frac{d\rho}{d\tau}=\infty$. В ней имеется особенность – детерминант метрического тензора $g=-\frac{\rho^4}{\tau^4}\rho'^2$ обращается в бесконечность. Это означает, что в такой системе гармонических координат можно пользоваться только "правой ветвью" функции $\rho(\tau)$, когда $\rho(\tau)>\rho_0$. При очень больших значениях $|K|\gg 10^3$ положение этой точки определяется из (II) и (I2) как

$$\rho_0\approx\left(-\frac{2}{3}K\right)^{1/3}\alpha\ ,\quad \tau_0\approx\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}(-K)^{1/3}\alpha\ .$$

Более подробно на случае $K<0$ не останавливаемся.

В случае $K>0$ видно, что "радиальная координата" τ может принимать любые положительные значения, а в точке $\tau=0$ имеется особенность $g\to-\infty$ (так как в ней $\rho(0)>0$, $\rho'>0$). Так что в такой системе особенность шварцшильдова типа как бы "остается за бортом" и имеется "голая сингулярность" в месте нахождения "точечной массы". Иными словами, такая система охватывает ме́ньшую часть 4-пространства, чем, скажем, в случае координат Шварцшильда (интервал (I)). Наиболее полно это 4-простра́нство представлено в координатах Крускала. При $K>0$ пространственная часть метрики $dl^2=-g_{ik}dx_i dx_k$ является существенно положительной квадратичной формой при всех $\tau>0$, $\rho>2\alpha$, $\rho'>0$ (что покрывает всю нужную нам область). Это видно из вычисления соответствующих детерминантов, составленных из компонент метрического тензора. Инварианты те́нзора кривизны пропорциональны второй и третьей степени величины $\frac{\alpha}{\rho^3}$ и никаких особенностей не имеют. Таким образом, при всех $\tau>0$ эта система гармонических координат ct, x_1, x_2, x_3 удовлетворяет всем условиям, принимаемым в ОТО.

Приближенно значение $\rho(0)$ при больших $K\gg 10^3$ дается выражением $(K/3)^{1/3}\alpha$. При больших τ, $\rho(\tau)\to\infty$ формула (II) дает

$$\tau=\rho-\alpha-\frac{K\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2+\dots \qquad (I3)$$

$$\rho(\tau)=\tau+\alpha+\frac{K\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2+\dots\ . \qquad (I4)$$

Рассматриваемый вопрос, видимо, имеет не только абстрактно-теоретический интерес, но с развитием современной техники может стать важным для практики астрономических наблюдений и эксперимента /5/. При сравнении теории с опытом обычно метрические функции представляют в виде ряда по степеням $\frac{\alpha}{\tau}$. Из формулы (I4) видно, что при удалении от начала 3-координат величина $\rho(\tau)$ будет очень быстро стремиться к фоковскому значению $\rho(\tau)=\tau+\alpha$. Соответственно разложение в ряд метрики при $K\neq 0$ будет отличаться от случая метрики Фока ($K=0$) дополнительными членами, на три порядка по $\frac{\alpha}{\tau}$ ме́ньшими, т.е. с множителями вида $K\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^3$, и при достаточно малых K это заведомо не может привести к наблюдаемому различию метрик. Но величина K нам неизвестна. Если она имеет величину, скажем, $K\sim(R_\odot/\alpha_\odot)^3$, здесь в случае Солнца $R_\odot/\alpha_\odot\sim 5.10^5$, то есть $K\sim 10^{17}-10^{18}$, то каждый член разложения метрики Фока получит равную себе по порядку величины добавку в области, близкой к Солнцу. Это могло бы сказаться в экспериментах, в которых важна область поля вблизи Солнца, например, в опытах с отклонением лучей света или радиосигналами.

Благодарю участников семинара в ЛТФ ОИЯИ за всестороннее высококвалифицированное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A. Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der Allgemeinen Relativitätstheorie. Sitz. preuss. Akad. Wiss. 1915, 47, 2, s.831-839.

   Перевод в кн.: Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т. I, "Наука", М., 1965, стр. 439-446.
2. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinischen Theorie. Sitz.preuss.Akad. Wiss. 1916, s. 189.

   Перевод в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации, "Мир", М., 1979, стр. 199-207.
3. Kruskal M.D. Phys.Rev. 1960, 119, p. 1743.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955, §§ 53, 57, 58.

   Fock V. The Theory of Space, Time and Gravitation. Pergamon Press, London, 1964.
5. Weinberg S. Gravitation and Cosmology. J.Willey and Sons, N.Y.-L.-S.-T., 1972, ch. 8, § 7.

   Вейнберг С. Гравитация и космология, "Мир", М., 1975, стр.221.

   Duff M.J. On the Significance of Perihelion Shift Calculations, ICTP, IC/73/21, Miramare-Trieste, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 июля 1986 года.

Асанов Р.А. P2-86-525
Замечание к точному решению задачи
о гравитационном поле точечной массы

Показано, что форма точного сферически-симметричного статического решения в гармонических координатах, предложенная Фоком /1955 г./, не является единственной в этих координатах. Рассмотрены другие формы решения и возможные следствия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Asanov R.A. P2-86-525
A Note on Exact Static Solution
of General Relativistic Equations for Point Mass

In 1955 Fock has proposed his form of Schwarzschild point-mass solution using harmonic co-ordinates. It is shown that the form is not unique in such co-ordinates. Other forms are treated and some possible consequences are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986