объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-521

Б.М.Барбашов, А.М.Червяков

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С МАССАМИ НА КОНЦАХ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"

1986

I. Введение

Модель релятивистской струны с массами на концах интенсивно исследуется как на классическом, так и на квантовом уровнях (см., например, /I-7/ и имеющуюся там библиографию). Динамика такой системы определяется уравнениями движения и нелинейными краевыми условиями. Установлены лишь некоторые движения релятивистской струны с массами на концах, хорошо известным примером здесь является параметрическое представление для координат струны в форме геликоида /4-7/.

В настоящей работе развивается дифференциально-геометрический подход для нахождения решения краевой задачи в теории релятивистской струны с массами на концах в пространстве E^1_2. Минимальная поверхность массивной струны ограничена двумя мировыми линиями точечных масс. По теореме существования из дифференциальной геометрии /8-II/ эти кривые определяются с точностью до движения E^1_2, если известны их кривизна k и кручение $\varkappa$. Мировые траектории массивных концов струны являются асимптотическими линиями постоянной геодезической кривизны, в то время как их кручения зависят от начальных условий. При частном выборе этих условий, когда кручения кривых постоянны, поверхность, заметаемая релятивистской струной с массами на концах, оказывается геликоидом. Этот результат допускает простую геометрическую интерпретацию, если ограничиться преобразованиями криволинейных координат, переводящих в себя как первую, так и вторую квадратичные формы мировой поверхности массивной струны. Именно такая поверхность локально эквивалентна геликоиду.

2. Геометрический подход к динамике релятивистской струны с массами на концах

В ряде работ /I2-I4/ динамика свободной релятивистской струны была изучена с точки зрения внутренней геометрии минимальных поверхностей в пространстве Минковского. Если на концах струны расположены точечные массы, такая поверхность будет ограничена их мировыми линиями. Естественно поэтому рассматривать с помощью геометрических методов не только саму поверхность, но и ограничивающие её кривые.

Пусть x^μ, $\mu = 0,1,2$ - координаты пространства Минковского E^1_2, а ($u^1 = \tau$, $u^2 = \sigma$) - криволинейные координаты псевдориманова многообразия $M^1_1 \subset E^1_2$, имеющие область определения $D: 0=\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2 = \pi$, $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$, где τ рассматривается в качестве эволюционного параметра. Поверхность $x^\mu(\tau,\sigma)$, заметаемая релятивистской струной с массами m_1 и m_2 на концах, является экстремалью функционала:

$$S = -\gamma \iint\limits_D d^2u \sqrt{-g} - \sum_{i=1}^{2} m_i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\tau,\sigma_i)}. \qquad (2.\mathrm{I})$$

Здесь константа γ имеет размерность квадрата масс, $g=\det\|g_{ij}\|$, $g_{ij} = \frac{\partial x_\mu}{\partial u^i}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^j}$ – метрика, индуцированная на M^1_1 объемлющей псевдоевклидовой метрикой. В дальнейшем будут использоваться обозначения $\dot{x}^\mu(\tau,\sigma) = \partial x^\mu/\partial\tau$, $x'^\mu(\tau,\sigma) = \partial x^\mu/\partial\sigma$.

Локально на поверхности M^1_1 можно всегда ввести изотермические или конформные координаты, в которых матрица $\|g_{ij}\|$ становится диагональной:

$$g_{11} = \dot{x}^2 = -x'^2 = g_{22} \equiv \lambda(u^1,u^2), \qquad (2.2)$$
$$g_{12} = (\dot{x}\,x') = 0.$$

В координатах (2.2) уравнения Эйлера для функционала (2.I) сводятся к уравнению Даламбера:

$$\ddot{x}^\mu(\tau,\sigma) - x''^\mu(\tau,\sigma) = 0, \qquad (2.3)$$

а ограничивающие поверхность M^1_1 мировые траектории $x^\mu(\tau,0)$ и $x^\mu(\tau,\pi)$ массивных концов струны даются условиями

$$\rho_1(\tau): \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu(0,\tau)}{\sqrt{\dot{x}^2(0,\tau)}}\right) = \frac{\gamma}{m_1}\, x'^\mu(0,\tau),$$
$$\rho_2(\tau): \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu(\tau,\pi)}{\sqrt{\dot{x}^2(\tau,\pi)}}\right) = -\frac{\gamma}{m_2}\, x'^\mu(\tau,\pi). \qquad (2.4)$$

Помимо метрики (2.2) на мировой поверхности релятивистской струны задана вторая квадратичная форма с коэффициентами

$$b_{ij} = \eta_\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial u^i\, \partial u^j}, \qquad i,j = 1,2. \qquad (2.5)$$

Вектор η_μ является единичной пространственноподобной нормалью к поверхности

$$\eta_\mu(u^1,u^2) = \frac{e_{\mu\nu\rho}\,\dot{x}^\nu x'^\rho}{\lambda},$$
$$\eta^2 = 1, \qquad (2.6)$$

где $e_{\mu\nu\rho}$ – полностью антисимметричный тензор. Тем самым в каждой точке M^1_1 естественно возникает подвижный репер, образованный двумя касательными векторами $\dot{x}^\mu/\sqrt{\lambda}$ и $x'^\mu/\sqrt{\lambda}$ и нормалью (2.6).

В силу уравнений (2.3) из (2.5) следует условие минимальности мировой поверхности релятивистской струны, т.е. равенство нулю её средней кривизны

$$2H = b_{ij}\, g^{ij} = \lambda^{-1}(b_{11} - b_{22}) = 0. \qquad (2.7)$$

Таким образом, в трехмерном псевдоевклидовом пространстве E^1_2 поверхность M^1_1 определяется (с точностью до движения E^1_2) тремя коэффициентами первой и второй квадратичных форм λ, b_{11} и b_{12}. Эти коэффициенты, рассматриваемые как функции локальных криволинейных координат u^i, i = I,2, удовлетворяют уравнениям Гаусса и Петерсона – Кодацци /II/. В нашем случае уравнения Петерсона – Кодацци сводятся к двум соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial u^\mp}(b_{11} \pm b_{12}) = 0, \qquad (2.8)$$

где введены изотропные координаты на M^1_1: $u^+ \equiv \alpha = \tau + \sigma$, $u^- \equiv \beta = \tau - \sigma$. Это позволяет выразить b_{11} и b_{12} через две произвольные функции одной переменной $A_\pm(u^\pm)$ следующим образом:

$$b_{11} = \frac{A_+(u^+) - A_-(u^-)}{2}, \quad b_{12} = \frac{A_+(u^+) + A_-(u^-)}{2}. \qquad (2.9)$$

С учетом (2.9) соотношение Гаусса дает нелинейное уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \ln\lambda}{\partial u^+\, \partial u^-} = \frac{A_+(u^+)\, A_-(u^-)}{2\lambda}. \qquad (2.\mathrm{I0})$$

Известное общее решение уравнения (2.I0) в терминах двух произвольных функций $f(u^+)$ и $g(u^-)$ имеет вид /I0/

$$\lambda(u^+,u^-) = \frac{A_+(u^+)\, A_-(u^-)}{4}\, \frac{[f(u^+) - g(u^-)]^2}{f'(u^+)\, g'(u^-)}. \qquad (2.\mathrm{II})$$

Здесь для выполнения условия $\lambda = \dot{x}^2 > 0$ необходимо потребовать, чтобы $\mathcal{E}(f') = \mathcal{E}(g')$, $\mathcal{E}(A_+) = \mathcal{E}(A_-)$, где $\mathcal{E}(x)$ -знаковая функция. Форма решения (2.II) не меняется при совместном дробно-линейном преобразовании функций f и g:

$$f(u^+) = T\cdot \bar{f}(u^+), \quad g(u^-) = T\cdot \bar{g}(u^-), \qquad T\cdot x = \frac{a\cdot x + b}{c\, x + d}. \tag{2.I2}$$

В касательной плоскости к мировой поверхности струны можно всегда перейти от векторов $\dot{x}^\mu$ и $\acute{x}^\mu$ к изотропным векторам $\Psi'^{\,\mu}_{\pm}(u^\pm)$. Для этого используем общее решение уравнений движения (2.3)

$$x^\mu(u^1, u^2) = \frac{\Psi_+^\mu(u^+) + \Psi_-^\mu(u^-)}{2}. \tag{2.I3}$$

Подставляя (2.I3) в (2.2), получим

$$\Psi'^{\,2}_{\pm}(u^\pm) = 0. \tag{2.I4}$$

На решениях (2.9) и (2.II) векторы (Ψ'_+, Ψ'_-, η) удобно представить в виде разложений по постоянному базису (a_μ, b_μ, c_μ) следующим образом /I3,I4/:

$$\Psi'_{+\mu}(u^+) = \frac{A_+(u^+)}{f'(u^+)}\left[a_\mu + f(u^+)\, b_\mu + \frac{f^2(u^+)}{2}\cdot c_\mu\right],$$
$$\Psi'_{-\mu}(u^-) = \frac{A_-(u^-)}{g'(u^-)}\left[a_\mu + g(u^-)\, b_\mu + \frac{g^2(u^+)}{2}\cdot c_\mu\right],$$
$$\eta_\mu(u^1, u^2) = \frac{2a_\mu [f(u^+) + g(u^-)]\, b_\mu + f(u^+)\, g(u^-)\, c_\mu}{f(u^+) - g(u^-)}, \tag{2.I5}$$

где векторы (a_μ, b_μ, c_μ) определяются равенствами $a^2 = 0 = c^2$, $ac = 1$, $b^2 = -1$, $ab = 0 = cb$.

Рассмотрим теперь мировые траектории (2.4), ограничивающие поверхность струны. Согласно теореме существования из дифференциальной геометрии /8-I0/ каждая кривая $\{\rho_i(\tau), i = 1,2\} \subset M^1_1$ в трехмерном псевдоевклидовом пространстве E^1_2 однозначно (с точностью до движения E^1_2) определяется своей кривизной $k_i(\tau)$ и кручением $\varkappa_i(\tau)$, $i = 1,2$ x). Эти величины задают перемещение вдоль кривых подвижного репера поверхности M^1_1 при фиксированных значениях $\sigma = \sigma_i$, $i = 1,2$, причем векторы $\frac{\dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{\lambda(\tau,\sigma_i)}}$, $(-1)^{i+1}\frac{\acute{x}^\mu(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{\lambda(\tau,\sigma_i)}}$, $(-1)^{i+1}\eta^\mu(\tau,\sigma_i)$ представляют собой касательные, нормали и бинормали к траекториям (2.4) соответственно. Они удовлетворяют уравнениям Френе /8-I0/:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{\lambda(\tau,\sigma_i)}}\right) = (-1)^{i+1} k_i(\tau)\, \acute{x}^\mu(\tau,\sigma_i),$$
$$\frac{d}{d\tau}\frac{\acute{x}^\mu(\tau,\sigma_i)}{\sqrt{\lambda(\tau,\sigma_i)}} = (-1)^{i+1} k_i(\tau)\, \dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i) - \varkappa_i(\tau)\sqrt{\lambda(\tau,\sigma_i)}\,\eta^\mu(\tau,\sigma_i), \tag{2.I6}$$
$$\frac{d}{d\tau}\eta^\mu(\tau,\sigma_i) = \varkappa_i(\tau)\, x'^\mu(\tau,\sigma_i),$$
$$i = 1,2.$$

Сравнивая граничные условия (2.4) с первым соотношением (2.I6) при $i = 1,2$, для кривизны кривых $\{\rho_i(\tau), i = 1,2\}$ получим

$$k_i(\tau) = \frac{\gamma}{m_i}, \quad i = 1,2. \tag{2.I7}$$

Таким образом, радиусы кривизны траекторий (2.4) постоянны и равны $\frac{m_i}{\gamma}$, $i = 1,2$. Выражения для кручений этих кривых можно найти, проектируя последнее соотношение (2.I6) при $i = 1,2$ на вектор $\acute{x}^\mu(\tau,\sigma_i)$:

$$\varkappa_i(\tau) = -\frac{(x'\frac{d}{d\tau}\eta)}{\dot{x}^2} = \frac{(\dot{x}'\eta)}{\dot{x}^2} = \frac{b_{12}(\tau,\sigma_i)}{\lambda(\tau,\sigma_i)}, \qquad i = 1,2. \tag{2.I8}$$

Проекция этого же уравнения на вектор $\dot{x}^\mu(\tau,\sigma_i)$ дает

$$-(\dot{x}\frac{d}{d\tau}\eta) = (\ddot{x}\eta) = b_{11}(\tau,\sigma_i) = 0, \qquad i = 1,2. \tag{2.I9}$$

Следовательно, траектории $\{\rho_i(\tau), i = 1,2\}$ являются асимптотическими линиями на мировой поверхности релятивистской струны. Согласно дифференциальной геометрии /8-I0/, такие кривые имеют нулевую нормальную кривизну в каждой точке. Учитывая, кроме того, что их бинормали направлены вдоль векторов $\eta^\mu(\tau,\sigma_1)$ и $-\eta^\mu(\tau,\sigma_2)$ соответ-

x) Вообще говоря, кривизна и кручение кривых на поверхности не принадлежат к "внутренней" геометрии этой поверхности, так как меняются при её изометриях. Ниже, однако, будет показано, что в случае кривых (2.4) это не так.

ственно, получим

$$k_{g_i}(\tau) = (-1)^{i+1} k_i(\tau) = (-1)^{i+1}\frac{\gamma}{m_i}, \qquad i = 1,2. \tag{2.20}$$

Здесь $k_{g_i}(\tau)$ – геодезические кривизны, определяемые в метрике (2.2) выражениями

$$k_{g_i}(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\,\frac{\partial}{\partial\sigma}(\ln\lambda), \qquad \sigma = \sigma_i, \quad i = 1,2. \tag{2.21}$$

Итак, асимптотические линии (2.4) являются одновременно линиями постоянной геодезической кривизны. Формулы (2.2I) позволяют выразить это в терминах метрики $\lambda(\tau,\sigma_i)$ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(\ln\lambda) = (-1)^{i+1}\frac{2\gamma}{m_i}\,\lambda^{\frac{1}{2}}, \qquad \sigma = \sigma_i, \quad i = 1,2. \tag{2.22}$$

В силу условий асимптотичности (2.I9) кручения $\varkappa_i(\tau)$, $i = 1,2$ можно связать с гауссовой кривизной мировой поверхности релятивистской струны. Подставляя (2.9) в (2.I9), получаем вместо двух функций $A_\pm(u^\pm)$ одну периодическую функцию x)

$$A_-(\tau) = A_+(\tau) = A(\tau), \qquad A(\tau-\pi) = A(\tau+\pi). \tag{2.23}$$

С учетом (2.23) соотношения (2.I8) принимают вид

$$\varkappa_i(\tau) = \frac{A(\tau+\sigma_i)}{\lambda(\tau,\sigma_i)}, \qquad i = 1,2. \tag{2.24}$$

Рассмотрим теперь гауссову кривизну мировой поверхности релятивистской струны с метрикой (2.2), определяемой уравнением (2.I0):

$$K(u^1,u^2) = -\frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial^2\ln\lambda}{\partial u^+\partial u^-} = -\frac{A_+(u^+)A_-(u^-)}{\lambda^2}. \tag{2.25}$$

Подстановка (2.23) в (2.25) дает для асимптотических линий (2.4) известную формулу Эннепера /I0/:

---

x) Можно показать /7/, что рассматриваемые здесь граничные значения переменной $\sigma_i = \mathrm{const}$ фиксируются условиями (2.23).

$$K(\tau,\sigma_i) = -\varkappa_i^2(\tau), \qquad i = 1,2. \tag{2.26}$$

Отсюда следует, что кручения (2.24) не меняются при изометриях поверхности M_1^1 в E_2^1.

Таким образом, мировые траектории массивных концов струны определяются условиями (2.4) как асимптотические линии, имеющие постоянную геодезическую кривизну. В задании этих кривых остается функциональный произвол, связанный с выбором кручений $\varkappa_i(\tau)$, i = I,2.

3. Краевая задача

Рассмотрим теперь задачу об определении минимальной поверхности $M_1^1 \subset E_2^1$ с метрикой (2.2), ограниченной двумя асимптотическими линиями постоянной геодезической кривизны. В таком подходе нелинейное уравнение Лиувилля (2.I0) является динамическим уравнением, а соотношения (2.22) – краевыми условиями задачи. Следуя геометрической точке зрения, кручения $\varkappa_i(\tau)$, i = I,2 в формулах (2.24) будем считать произвольными, но заданными функциями. Подставляя общее решение (2.II) в (2.22) и (2.24), получим систему двух уравнений на функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{g'(\tau)}{f'(\tau)} + 2\,\frac{f(\tau)+g'(\tau)}{f(\tau)-g(\tau)} = k\,|A(\tau)|\,\frac{|f(\tau)-g(\tau)|}{\sqrt{f'(\tau)g'(\tau)}}, \tag{3.1}$$

$$\frac{4}{[f(\tau)-g(\tau)]} = \frac{A(\tau)\,\varkappa_1(\tau)}{f'(\tau)\,g'(\tau)} \tag{3.2}$$

для траектории $\rho_1(\tau)$ при $\sigma = 0$, и систему уравнений со сдвинутыми аргументами на функции $f(+) = f(\tau+\pi)$ и $g(-) = g(\tau-\pi)$ x):

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{g'(-)}{f'(+)} + 2\,\frac{f'(+)+g'(-)}{f(+)-g(-)} = -k_2\,|A(+)|\,\frac{|f(+)-g(-)|}{\sqrt{f'(+)\,g'(-)}}, \tag{3.3}$$

---

x) Периодическая функция $A(\tau)$, с физической точки зрения, является чисто калибровочной величиной. Удерживая её в этих соотношениях, мы в дальнейшем покажем, что граничные условия приводят к дополнительным требованиям на выбор калибровки.

$$\frac{4}{[f(+)-g(-)]^2}=\frac{A(+)\,\varkappa_2(\tau)}{f'(+)\,g'(-)} \tag{3.4}$$

для траектории $\rho_2(\tau)$ при $\sigma=\pi$. При независимом рассмотрении соотношений (3.I)-(3.2) и (3.3)-(3.4) решения $f(\tau)$ и $g(\tau)$ уравнений (3.I)-(3.2) представляются в параметрическом виде с помощью функций $\varkappa_1(\tau)$ и $A(\tau)$, а решения $f(+)$ и $g(-)$ системы (3.3)-(3.4) выражаются через $\varkappa_2(\tau)$ и $A(+)$. Чтобы показать это, преобразуем данные уравнения следующим образом. Подставляя (3.2) в (3.I), получим

$$\frac{d}{d\tau}\ln\frac{g'(\tau)}{f'(\tau)}+\varepsilon_1\sqrt{A(\tau)\varkappa_1(\tau)}\left(\sqrt{\frac{f'(\tau)}{g'(\tau)}}+\sqrt{\frac{g'(\tau)}{f'(\tau)}}\right)= \tag{3.5}$$
$$=2k_1\sqrt{\frac{A(\tau)}{\varkappa_1(\tau)}},$$

где знаковая функция $\varepsilon_1=\varepsilon(f'(\tau))\varepsilon(f(\tau)-g(\tau))$. Введем теперь новую независимую переменную

$$\xi(\tau)=\int^{\tau}d\tau_1\sqrt{A(\tau_1)\varkappa_1(\tau_1)}, \tag{3.6}$$

такую, что

$$\begin{aligned} f(\tau)&=f(\tau(\xi))=F(\xi),\\ g(\tau)&=g(\tau(\xi))=G(\xi),\\ \varkappa_1(\tau)&=\varkappa_1(\tau(\xi))=\tilde{\varkappa}_1(\xi). \end{aligned} \tag{3.7}$$

После замены (3.6)-(3.7) уравнения (3.2) и (3.5) принимают вид

$$\frac{4F'\cdot G'}{(F-G)^2}=1, \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{d\xi}\ln\frac{G'}{F'}+\varepsilon_1\left(\sqrt{\frac{F'}{G'}}+\sqrt{\frac{G'}{F'}}\right)=\frac{2k_1}{|\tilde{\varkappa}_1|}. \tag{3.9}$$

Логарифмируя и дифференцируя по ξ соотношение (3.8), получим

$$\frac{d}{d\xi}\ln(F'\cdot G')-\varepsilon_1\left(\sqrt{\frac{F'}{G'}}-\sqrt{\frac{G'}{F'}}\right)=0. \tag{3.10}$$

Сложение и вычитание (3.9) и (3.I0) дает систему уравнений первого порядка на функции $\frac{1}{\sqrt{F'}}$ и $\frac{1}{\sqrt{G'}}$:

$$2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{F'}}\right)+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{G'}}=\frac{k_1}{|\tilde{\varkappa}_1|}\frac{1}{\sqrt{F'}}, \tag{3.11}$$

$$-2\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{G'}}\right)+\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{F'}}=\frac{k_1}{|\tilde{\varkappa}_1|}\frac{1}{\sqrt{G'}}. \tag{3.12}$$

Условия совместности этой системы выражаются уравнениями

$$D(F)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1^2}{\tilde{\varkappa}_1^2}\right)-k_1\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{|\tilde{\varkappa}_1|}\right), \tag{3.13}$$

$$D(G)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1^2}{\tilde{\varkappa}_1^2}\right)+k_1\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{|\tilde{\varkappa}_1|}\right). \tag{3.14}$$

Здесь $D(y)$ – производная Шварца функции $y(x)$ по аргументу x:

$$D(y)=-2\sqrt{y'}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{y'}}\right). \tag{3.15}$$

В дальнейшем нам потребуется выражение производной (3.I5) от сложной функции $z(y(x))$ /I5/:

$$D(z(y(x)))_x=D(z)_y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+D(y)_x. \tag{3.16}$$

Рассмотрим теперь уравнения (3.3)-(3.4) для траектории $\rho_2(\tau)$ при $\sigma=\pi$. Применяя к ним изложенную выше процедуру, имеем

$$2\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi'(+)}}\right)+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{Q'(-)}}=-\frac{k_2}{|\tilde{\varkappa}_2|}\frac{1}{\sqrt{\Phi'(+)}}, \tag{3.17}$$

$$2\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{Q'(-)}}\right)-\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\Phi'(+)}}=\frac{k_2}{|\tilde{\varkappa}_2|}\frac{1}{\sqrt{Q'(-)}}, \tag{3.18}$$

где $\varepsilon_2=\varepsilon(\Phi'(+))\varepsilon(\Phi(+)-Q(-))$, а $\Phi(\eta+\pi)$, $Q(\eta-\pi)$ и $\tilde{\varkappa}_2(\eta)$ получаются из функций $f(\tau+\pi)$, $g(\tau-\pi)$ и $\varkappa_2(\tau)$ подстановкой

$$\eta(\tau)=\int^{\tau}d\tau_1\sqrt{A(\tau_1+\pi)\varkappa_2(\tau_1)}. \tag{3.19}$$

Условия совместности системы (3.17)-(3.18) выражаются через производные Шварца функций $\Phi(+)$ и $Q(-)$ так:

$$D(\Phi(+)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2^2}{\tilde{æ}_2^2}\right) + k_2 \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{|\tilde{æ}_2|}\right), \tag{3.20}$$

$$D(Q(-)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2^2}{\tilde{æ}_2^2}\right) - k_2 \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{|\tilde{æ}_2|}\right). \tag{3.21}$$

Используя (3.6),(3.19) и (3.16), перейдем в уравнениях (3.13)-(3.14) и (3.20)-(3.21) к независимой переменной τ. Теперь легко видеть, что выражения для производных Шварца функций $f(\tau)$, $g(\tau)$ и $f(+)$, $g(-)$ не являются независимыми. Заменяя аргумент τ в уравнении (3.13) на $\tau+\pi$, а в уравнении (3.14) на $\tau-\pi$, и приравнивая полученные соотношения выражениям (3.20) и (3.21) соответственно, находим два условия на функции $æ_1(\tau)$ и $æ_2(\tau)$, причем аргументы у этих функций сдвинуты:

$$D\left(\int^{\tau}\sqrt{A(+)\,æ_1(+)}\right) + |A(+)æ_1(+)|\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1}{æ_1^2(+)}\right) - \frac{k_1}{\sqrt{A(+)æ_1(+)}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{|æ_1(+)|}\right)\right\} = D\left(\int^{\tau}\sqrt{A(+)æ_2}\right) + |A(+)æ_2|\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2^2}{æ_2^2}\right) + \frac{k_2}{\sqrt{A(+)æ_2}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{|æ_2|}\right)\right\}, \tag{3.22}$$

$$D\left(\int^{\tau}\sqrt{A(+)æ_1(-)}\right) + |A(+)æ_1(-)|\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_1^2}{æ_1^2(-)}\right) + \frac{k_1}{\sqrt{A(+)æ_1(-)}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{|æ_1(-)|}\right)\right\} = D\left(\int^{\tau}\sqrt{A(+)æ_2}\right) + |A(+)æ_2|\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k_2^2}{æ_2^2}\right) - \frac{k_2}{\sqrt{A(+)æ_2}}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{|æ_2|}\right)\right\}. \tag{3.23}$$

Отсюда непосредственно следует, что наиболее общее решение рассматриваемой краевой задачи содержит одну произвольно заданную на интервале $[0, 2\pi]$ функцию, в качестве которой можно выбрать кручение $æ_i(\tau)$ какой-либо одной траектории $\rho_i(\tau)$.

Ограничимся случаем постоянных кручений $æ_i$, $i = 1,2$, когда обе мировые траектории массивных концов струны являются винтовыми линиями /8-10/. В этом случае соотношения (3.22)-(3.23) сводятся к равенству:

$$|æ_2|\,\omega_2 = |æ_1|\,\omega_1, \tag{3.24}$$

где $\omega_i = \frac{1}{4}\left(1-\frac{k_i^2}{æ_i^2}\right)$, $i = 1,2$. Учитывая, что в правых частях уравнений (3.13)-(3.14) и (3.20) - (3.21) исчезает последний член, получим

$$D(G(\xi))_\xi - D(F(\xi))_\xi = 0,$$
$$D(Q(-))_\eta - D(\Phi(+))_\eta = 0. \tag{3.25}$$

Поэтому функции $G(\xi)$ и $Q(-)$ связаны с функциями $F(\xi)$ и $\Phi(+)$ дробно-линейными подстановками /15/

$$G(\xi) = T_1 \cdot F(\xi),$$
$$Q(-) = T_2 \cdot \Phi(\eta+\pi), \tag{3.26}$$

параметрическое представление для этих функций следует из решения уравнений (3.13)-(3.14) и (3.20)-(3.21).

При $æ_1 = const$ решение системы (3.13)-(3.14) после перехода к независимой переменной τ имеет вид

$$f(\tau) = C_1 - \mathcal{E}(f')\,\frac{ctg\left(\sqrt{\omega_1}\,\xi(\tau)+\Delta\right)}{\sqrt{\omega_1}\,(a_1^2+a_2^2)}, \tag{3.27}$$

$$g(\tau) = C_1 - \mathcal{E}(f')\,\frac{ctg\left(\sqrt{\omega_1}\,\xi(\tau)+\Delta-\Gamma_1\right)}{\sqrt{\omega_1}\,(a_1^2+a_2^2)}, \tag{3.28}$$

$$ctg\,\Gamma_1 = \frac{k_1}{|æ_1|}\,\frac{1}{2\sqrt{\omega_1}},$$

где a_i, $i = 1,2$ - произвольные постоянные, $ctg\,\Delta = a_2/a_1$. Выражения (3.27)-(3.28) справедливы при $\omega_1 > 0$, случаи $\omega_1 = 0$ и $\omega_1 < 0$ рассматриваются аналогично. Чтобы удовлетворить уравнению (3.2) в (3.27) и (3.28) выбрана одна и та же константа C_1. Переменная $\xi(\tau)$ определяется формулой (3.6), причем в силу (2.23) и $æ_1 = const$ имеет место условие периодичности

$$\xi'(\tau+2\pi) = \xi'(\tau). \tag{3.29}$$

Используя параметрическое представление (3.27)-(3.28), нетрудно получить соотношение (3.26) для функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$.

Прежде чем рассматривать уравнения (3.20) -(3.21), отметим, что равенство (3.24) дает $\mathcal{E}(\omega_2)=\mathcal{E}(\omega_1)$. Поэтому при $\omega_1>0$ необходимо положить $\omega_2>0$. Тогда общее решение (3.20)-(3.2I) для $\varkappa_2=const$ записывается так:

$$f(\tau+\pi)=C_2-\mathcal{E}(f'(+))\,\frac{ctg(\sqrt{\omega_2}\,\eta(\tau)+\delta)}{\sqrt{\omega_2}(b_1^2+b_2^2)}\,, \qquad (3.30)$$

$$g(\tau-\pi)=C_2=\mathcal{E}(f'(+))\,\frac{ctg(\sqrt{\omega_2}\,\eta(\tau)+\delta+\Gamma_2)}{\sqrt{\omega_2}(b_1^2+b_2^2)}\,,$$

$$ctg\,\Gamma_2=\frac{k_2}{|\varkappa_2|}\;\frac{1}{2\sqrt{\omega_2}}\,, \qquad (3.3I)$$

где b_i, $i=1,2$ - произвольные константы и $ctg\,\delta=b_2/b_1$. Из сравнения формул (3.6) и (3.I9) следует, что

$$\eta'(\tau)=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\,\xi'(\tau+\pi)=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\,\xi'(\tau-\pi),$$

откуда, вводя постоянные h_i, $i=1,2$, для переменной $\eta(\tau)$ находим

$$\eta(\tau)=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\,\xi(\tau+\pi)+h_1=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\,\xi(\tau-\pi)+h_2\,. \qquad (3.32)$$

Параметрическое представление (3.30)-(3.3I), как и в предыдущем случае, удовлетворяет соотношению (3.26). С помощью (3.32) и (3.24) получим, что постоянные интегрирования в выражениях (3.27)-(3.28) и (3.30)-(3.3I) связаны между собой следующим образом:

$$\sqrt{\omega_2}(b_1^2+b_2^2)=\sqrt{\omega_1}(a_1^2+a_2^2)\,,$$

$$C_2=C_1=C\,, \qquad (3.33)$$

$$\sqrt{\omega_2}\,h_1=\Delta-\delta\pmod{\pi}\,,$$

$$\sqrt{\omega_2}\,h_2=\sqrt{\omega_2}\,h_1-(\Gamma_1+\Gamma_2)\pmod{\pi}.$$

Представления (3.27)-(3.28) и (3.30)-(3.3I) можно привести к более простому виду, если воспользоваться инвариантностью уравнения

Лиувилля (2.I0) и краевых условий (3.I)-(3.2), (3.3)-(3.4) относительно совместного дробно-линейного преобразования (2.I2) функций $f(u^+)$ и $g(u^-)$. Равенства (3.33) позволяют заменить

$$f(u^+)=\frac{\tilde f(u^+)}{\sqrt{\omega_1}(a_1^2+a_2^2)}+C\,,$$

$$g(u^-)=\frac{\tilde g(u^-)}{\sqrt{\omega_1}(a_1^2+a_2^2)}+C\,. \qquad (3.34)$$

Согласно (3.34) из (3.37)-(3.28) находим

$$\tilde f(\tau)=-\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg(\sqrt{\omega_1}\,\xi(\tau)+\Delta)\,,$$

$$\tilde g(\tau)=-\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg(\sqrt{\omega_1}\,\xi(\tau)+\Delta-\Gamma_1)\,, \qquad (3.35)$$

где $\mathcal{E}(\tilde f')$ фиксируется требованием монотонности функции $\tilde f(\tau)$. Соотношения (3.26) теперь принимают вид

$$\tilde g(\tau)=\frac{\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg\,\Gamma_1\,\tilde f(\tau)-1}{\tilde f(\tau)+\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg\,\Gamma_1}\,,$$

$$\tilde g(\tau-\pi)=\frac{\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg\,\Gamma_2\,\tilde f(\tau+\pi)+1}{-\tilde f(\tau+\pi)+\mathcal{E}(\tilde f')\,ctg\,\Gamma_2}\,. \qquad (3.36)$$

В силу (3.36) значения функции $\tilde f(\tau)$ на концах интервала $[\tau,\tau+2\pi]$ связаны дробно-линейным преобразованием

$$\tilde f(\tau+2\pi)=\frac{ctg(\Gamma_1+\Gamma_2)\,\tilde f(\tau)-\mathcal{E}(\tilde f')}{\mathcal{E}(\tilde f')\,\tilde f(\tau)+ctg(\Gamma_1+\Gamma_2)}\,. \qquad (3.37)$$

Вместе с требованием монотонности условие (3.37) приводит к существенным особенностям в поведении $\tilde f(\tau)$. Действительно, используя (3.37), получим

$$\tilde f(\tau+\pi)-\tilde f(\tau-\pi)=-\frac{\mathcal{E}(\tilde f')[\tilde f^2(\tau-\pi)+1]}{\mathcal{E}(\tilde f')\tilde f(\tau-\pi)+ctg(\Gamma_1+\Gamma_2)}\,. \qquad (3.38)$$

Для монотонно возрастающей функции $\tilde f(\tau):\tilde f'(\tau)>0$,

$\tilde{f}(\tau+\pi)-\tilde{f}(\tau-\pi)>0$ отсюда следует ограничение сверху:

$$\tilde{f}(\tau)<-ctg(\Gamma_1+\Gamma_2). \tag{3.39}$$

Если же $\tilde{f}(\tau)$ является монотонно убывающей функцией: $\tilde{f}'(\tau)<0$, $\tilde{f}(\tau+\pi)-\tilde{f}(\tau-\pi)<0$, то соотношение (3.38) дает для неё ограничение снизу:

$$\tilde{f}(\tau)>ctg(\Gamma_1+\Gamma_2). \tag{3.40}$$

Тем самым в рассматриваемом случае для значений функции $\tilde{f}(\tau)$ имеется запрещенная зона шириной $2\,ctg(\Gamma_1+\Gamma_2)$. Отметим, что неравенства (3.39)-(3.40) после подстановки в них (3.35) сводятся к условию на выбор калибровочной функции $A(\tau)$:

$$\int^{\tau} d\tau_1\sqrt{A(\tau_1)}<\frac{\Gamma_1+\Gamma_2-\Delta}{\sqrt{\omega_1\varkappa_1}}\ (\mathrm{mod}\ \pi). \tag{3.41}$$

При $\omega_1>0$ эта функция выражается через $\tilde{f}(\tau)$ и $\tilde{f}'(\tau)$ следующим образом:

$$\sqrt{A(\tau)}=\frac{\xi'(\tau)}{\sqrt{\varkappa_1}}=\frac{1}{\sqrt{\omega_1\varkappa_1}}\cdot\frac{|\tilde{f}'(\tau)|}{(\tilde{f}^2(\tau)+1)}. \tag{3.42}$$

Для остальных значений ω_1 вместо формулы (3.42) получим

$$\sqrt{A(\tau)}=\frac{1}{\sqrt{\varkappa_1}}\cdot\frac{|\tilde{f}'(\tau)|}{\tilde{f}^2(\tau)},\quad \omega_1=0, \tag{3.43}$$

$$\sqrt{A(\tau)}=\frac{1}{\sqrt{|\omega_1|\varkappa_1}}\cdot\frac{|\tilde{f}'(\tau)|}{(1-\tilde{f}^2(\tau))},\quad \omega_1<0. \tag{3.44}$$

Здесь $A(\tau)$ может иметь одну или две особенности при вещественных значениях функции $\tilde{f}(\tau)$.

Теперь нетрудно получить параметрическое уравнение для радиус-вектора (2.I3) минимальной поверхности $M^1_1\subset E^1_2$, ограниченной двумя асимптотическими винтовыми линиями. Для этого заметим, что совместное дробно-линейное преобразование (2.I2) функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ не изменит представлений (2.I5), если дополнить его соответствующим вращением изотропного базиса (a,b,c) в E^1_2. В частности, при подстановке (3.34) необходимо положить

$$\tilde{a}_\mu=\sqrt{\omega_1}(a_1^2+a_2^2)(a_\mu+C\,b_\mu+\tfrac{1}{2}C\,c_\mu),$$
$$\tilde{b}_\mu=b_\mu+C\cdot c_\mu, \tag{3.45}$$
$$\tilde{c}_\mu=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}(a_1^2+a_2^2)}\,C_\mu.$$

Выбирая векторы (3.45) в виде $\tilde{a}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $\tilde{b}=(0,0,1)$, $\tilde{c}=(1,-1,0)$, подставим (3.35) в формулы (2.I6). В результате они легко интегрируются, и мы находим для радиус-вектора (2.I3) параметрическое уравнение геликоида:

$$x^\mu(\tau,\sigma)=\frac{\varepsilon(f')}{4\omega_1|\varkappa_1|}\left\{\frac{\theta(\alpha)+\theta(\beta)}{2},\right.$$
$$-\sin\left[\frac{\theta(\alpha)+\theta(\beta)}{2}-\Gamma_1\right]\cos\left[\frac{\theta(\alpha)-\theta(\beta)}{2}+\Gamma_1\right], \tag{3.46}$$
$$\left.\varepsilon(f')\cos\left[\frac{\theta(\alpha)+\theta(\beta)}{2}-\Gamma_1\right]\cos\left[\frac{\theta(\alpha)-\theta(\beta)}{2}+\Gamma_1\right]\right\},$$

где $\frac{\theta(\tau)}{2}=\sqrt{\omega_1}\,\xi(\tau)+\Delta$. Ранее это решение было получено в работах /4-7/ с помощью других методов, однако особенности типа (3.4I) там не отмечались.

4. Калибровочная инвариантность

Изотермические координаты на мировой поверхности релятивистской струны определяются условиями (2.2) неоднозначно. Преобразования параметров $u^\pm$

$$u^\pm\longrightarrow\bar{u}^\pm=E_\pm(u^\pm) \tag{4.I}$$

сохраняют конформный вид первой квадратичной формы поверхности M^1_1, причем метрика $\lambda(u^\pm)$ изменяется следующим образом:

$$\lambda(u^+,u^-)\longrightarrow\bar{\lambda}(\bar{u}^+,\bar{u}^-)=\frac{\lambda(u^+,u^-)}{E'_+(u^+)\,E'_-(u^-)}. \tag{4.2}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы $A_\pm(u^\pm)$ при заменах (4.I) переходят в выражения x)

x) В геометрическом подходе к динамике релятивистской струны с массами на концах коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности M^1_1 являются динамическими переменными. Поэтому в отличие от теории поверхностей, в которой обычно изучается поведение метрик при различных отображениях, здесь рассматриваются преобразования (4.2)-(4.3).

$$A_\pm(u^\pm) \longrightarrow \bar{A}_\pm(\bar{u}^\pm) = \frac{A_\pm(u^\pm)}{E'^2_\pm(u^\pm)} . \tag{4.3}$$

С помощью формул (4.2)-(4.3) нетрудно убедиться, что уравнение Лиувилля (2.I0) инвариантно относительно преобразований (4.I). Чтобы не менялись соотношения (2.22) и (2.24), определяющие мировые траектории массивных концов струны, необходимо дополнительно потребовать выполнения следующих условий:

$$E'_-(\tau) = E'_+(\tau), \tag{4.4}$$

$$E'_-(\tau - \pi) = E'_+(\tau + \pi).$$

Такая инвариантность в теории релятивистской струны с массами на концах обычно связывается с произволом в выборе функций $A_\pm(u^\pm)$[7]. Действительно, эти функции определяются соотношениями (2.23) и (3.4I) неоднозначно. Поэтому их всегда можно зафиксировать путем подходящего выбора системы координат u^i , $i = 1,2$ на мировой поверхности релятивистской струны.

С другой стороны, чисто калибровочным степеням свободы в рассматриваемой задаче будут соответствовать такие преобразования (4.I), которые сохраняют как метрику $\lambda(u^+, u^-)$, так и коэффициенты второй квадратичной формы $A_\pm(u^\pm)$:

$$\bar{\lambda}(\bar{u}^+, \bar{u}^-) = \lambda(\bar{u}^+, \bar{u}^-), \tag{4.5}$$

$$\bar{A}_\pm(\bar{u}^\pm) = A_\pm(\bar{u}^\pm). \tag{4.6}$$

С помощью (4.2)-(4.3) отсюда получаем условия на функции $E_\pm(u^\pm)$:

$$\frac{\lambda(u^+, u^-)}{E'_+(u^+)\, E'_-(u^-)} = \lambda\left(E_+(u^+), E_-(u^-)\right), \tag{4.7}$$

$$\frac{A_\pm(u^\pm)}{E'^2_\pm(u^\pm)} = A_\pm\left(E_\pm(u^\pm)\right). \tag{4.8}$$

Следует отметить, что преобразования (4.7)-(4.8) представляют собой более специальный класс отображений по сравнению с изометриями, для которых выполняется только соотношение (4.7). Тем не менее нетривиальность этого класса в данном случае можно проиллюстрировать следующей теоремой.

Мировая поверхность релятивистской струны с массами на концах, допускающая преобразования (4.7)-(4.8), локально эквивалентна геликоиду.

Для доказательства удобно ограничиться инфинитезимальными преобразованиями (4.I) вида

$$E_\pm(u^\pm) = u^\pm + e_\pm(u^\pm). \tag{4.9}$$

Условие (4.7) в первом порядке по $e_\pm(u^\pm)$ теперь дает уравнение Киллинга в случае изометрии /II/:

$$\frac{\partial(\ln\lambda)}{\partial u^+} e_+ + \frac{\partial(\ln\lambda)}{\partial u^-} e_- + \frac{\partial e_+}{\partial u^+} + \frac{\partial e_-}{\partial u^-} = 0. \tag{4.10}$$

Подставляя (4.9) в (4.8), находим

$$2 e'_\pm A_\pm + A'_\pm e_\pm = 0. \tag{4.11}$$

Это позволяет выразить компоненты $e_\pm(u^\pm)$ двухмерного вектора Киллинга через калибровочные функции $A_\pm(u^\pm)$ следующим образом:

$$e_\pm(u^\pm) = \frac{q_\pm}{\sqrt{A_\pm(u^\pm)}} , \tag{4.12}$$

где $q_\pm$ – некоторые константы. Используя (2.II) и (4.I2), уравнение (4.I0) перепишем так:

$$\left(\frac{f''}{f'} - \frac{2f'}{f-g}\right)\frac{q_+}{\sqrt{A_+}} + \left(\frac{g''}{g'} + \frac{2g'}{f-g}\right)\frac{q_-}{\sqrt{A_-}} +$$
$$+ q_+ \frac{\partial}{\partial u^+}\left(\frac{1}{\sqrt{A_+}}\right) + q_- \frac{\partial}{\partial u^-}\left(\frac{1}{\sqrt{A_-}}\right) = 0 , \tag{4.13}$$
$$f = f(u^+), \quad g = g(u^-).$$

Общее решение (4.I3) дается выражениями

$$A_+(u^+) = q_+^2 \frac{f'^2(u^+)}{[af^2(u^+) + bf(u^+) + c]^2} ,$$

$$A_-(u^-) = q_-^2 \frac{g'^2(u^-)}{[a g^2(u^-) + b g(u^-) + c]^2} . \tag{4.14}$$

Здесь a , b , c – произвольные постоянные. Чтобы не иметь дела с особенностями $A_\pm(u^\pm)$ при вещественных значениях функций $f(u^+)$ и $g(u^-)$, можно положить $b^2 - 4a\cdot c < 0$. В этом случае формулы (4.14) с помощью совместного дробно-линейного преобразования

$$f(u^+) = \frac{\tilde{f}(u^+) - b}{2a} , \quad g(u^-) = \frac{\tilde{g}(u^-) - b}{2a} \tag{4.15}$$

приводятся к виду (3.42). Подставляя далее полученные таким образом выражения для $A_\pm(u^\pm)$ в условия (2.23), находим две системы дифференциальных уравнений первого порядка на функции $\tilde{f}(\tau)$, $\tilde{g}(\tau)$ и $\tilde{f}(\tau+\pi)$, $\tilde{g}(\tau-\pi)$ соответственно. Теперь нетрудно видеть, что алгебраическими интегралами этих систем являются соотношения (3.36), причем $q_+^2 = 1/4\,\omega_1 |\varkappa_1|$, $q_-^2 = 1/4\,\omega_2 |\varkappa_2|$. Тем самым утверждение доказано.

5. Заключение

В предложенном здесь геометрическом методе решения краевой задачи в теории массивной релятивистской струны существенную роль играют кручения $\varkappa_i(\tau)$, $i = 1,2$ мировых траекторий точечных масс. Эти величины определяются соотношениями (3.22)-(3.23) лишь с точностью до произвольной на интервале $[0,2\pi]$ функции. Именно такой произвол в теории релятивистской струны требуется для решения задачи Коши. Полный анализ уравнений (3.22)-(3.23) довольно сложен. Мы рассмотрели здесь только простейший случай постоянных кручений $\varkappa_i$, $i = 1,2$. Поиск общих решений в рамках геометрического подхода представляет несомненный интерес.

Авторы признательны В.В. Нестеренко за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Barbashov B.M. Nucl. Phys., 1977, B129, p. 175-188.
2. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, 1978, 9, с. 709-758.
3. Черников Н.А. Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т. 42, с. 59-70; ТМФ, 1980, т. 43, с. 356-366.
4. Frampton P.H. Phys. Rev., 1975, D12, p. 538-545.
5. Chodos A., Thorn C.B. Nucl. Phys., 1974, B72, p. 509-522.
6. Шавохина Н.С. ДАН СССР, 1982, 265, с. 852-856.
7. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. В кн.: Тр. Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля, ИФВЭ, Протвино, 1983, т. 2, с. 3-14. 1984, т. 1, с. 82-83.
8. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия М. , "Наука", 1979.
9. Норден А.П. Теория поверхностей. М., Гостехтеориздат, 1956.
10. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
11. Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton, 1964.
12. Omnes R. Nucl. Phys., 1979, B149, p. 269-284.
13. Барбашов Б.М., Кошкаров А.Л. ТМФ, 1979, т. 39, с. 27-34.
14. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М. ТМФ, 1979, т. 40, с. 15-17.
15. Ford L.R. Automorphic Functions, Chelsea Publ. Comp., 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 августа 1986 года.

Барбашов Б.М., Червяков А.М. Р2-86-521
Геометрический метод решения краевой задачи в теории релятивистской струны с массами на концах

Рассматривается дифференциально-геометрическая формулировка динамики релятивистской струны с массами на концах в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Поверхность, заметаемая струной, описывается дифференциальными формами и ограничена двумя кривыми - мировыми траекториями ее массивных концов. Эти кривые имеют постоянную геодезическую кривизну, а их кручение определяется лишь с точностью до произвольной на интервале /0, 2π/ функции. При выборе постоянных кручений, когда точечные массы движутся по винтовым линиям, мировая поверхность релятивистской струны является геликоидом. Изучены преобразования криволинейных координат, переводящие в себя обе дифференциальные формы струнной поверхности. Доказано, что поверхность релятивистской струны с массами на концах, допускающая такие преобразования, локально эквивалентна геликоиду, а ограничивающие ее кривые имеют постоянное кручение.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Barbashov B.M., Chervyakov A.M. P2-86-521
Geometrical Method for Solving the Boundary Problem in Theory of a Relativistic String with Masses at Its Ends

The geometrical formulation of the dynamics of the relativistic string with the point mass at its ends in three-dimensional space-time is considered. The world trajectories of the point mass restricting the string sheet have a constant geodesic curvature and the torsion which is determined up to an arbitrary on the interval /0, 2π/ function. In the case of constant torsions when the point masses move over helicies the string world surface is the helicoid. The transformations of curvelinear coordinates on the string surface mapping onto themselves its fundamental forms are considered. It is proved that the world surface of the relativistic string with massive ends admitting these transformations is equivalent to the helicoid.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986