ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2-86-500

Г.А.Козлов

О РАСПАДЕ $\pi \to \mu\tilde{\nu}$ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в журнал "Zeitschrift für Physik"
и на Международную конференцию "Структура
адронов 86", ЧССР, ноябрь 1986 г.

1986

I. Введение

Общепризнанным является мнение о том, что в наиболее простом варианте релятивистской составной модели хорошей аппроксимацией является представление мезона как связанного состояния кварка и антикварка. Такое представление успешно реализуется, в частности, при описании процессов распадов мезонов. Матричные элементы таких процессов в общем случае выражаются через волновые функции (в.ф.) связанного состояния (кварка и антикварка), которые являются решениями динамических уравнений в квантовой теории поля (уравнение Бете–Солпитера, Логунова – Тавхелидзе и др.).

На рис. I изображена схема распада $\pi\to\mu\tilde\nu$ без лептонной части.

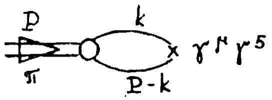

Рис. I

Соответствующий матричный элемент имеет следующий вид:

$$M^\mu(\pi\to\mu\tilde\nu)=\frac{G}{\sqrt{2}}\,f_\pi\,P^\mu\,, \qquad (I.I)$$

где P – полный импульс π -мезона, G – константа слабого взаимодействия.

Полагая, что π -мезон имеет определенную кварковую структуру, информация о которой содержится в в.ф. $\Psi(k;P)$, зависящей от импульса кварка и полного импульса π -мезона, матричный элемент (I.I) можно записать в следующем виде:

$$M^\mu(\pi\to\mu\tilde\nu)=\frac{G}{\sqrt{2}}\,n_c\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,Tr\left\{\Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k;P)\cdot A^{*\mu}_{\sigma_1\sigma_2}(k,P-k)\right\}, \qquad (I.2)$$

где $n_c=3$ – число "цветов", а в.ф. $\Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k;P)$, заданная в пространстве индексов σ_1, σ_2 – проекций спинов кварков с импульсами k и $P-k$, соответственно, на ось z, изображена на рис. 2.

Аксиальный ток $A^\mu_{\sigma_1\sigma_2}(k,P-k)$ можно интерпретировать как "амплитуду" перехода пары кварк-антикварк в аксиальную вершину $\gamma^\mu\gamma^5$:

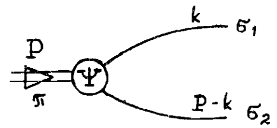

Рис. 2

$$A^\mu_{\sigma_1\sigma_2}(k,P-k)=\bar{u}_{\sigma_1}(k)\gamma^\mu(1-g_A\gamma^5)v_{\sigma_2}(P-k)\,, \qquad (I.3)$$

где g_A –безразмерная аксиальная константа.

В.ф. $\Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k;P)$ связана со скалярной частью $\tilde{\Psi}_S(k;P)$ с помощью следующей спинорной структуры:

$$\Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k;P)=\bar{u}^{\sigma_1}(k)\gamma^5\tilde{\Psi}_S(k;P)\,v^{\sigma_2}(P-k). \qquad (I.4)$$

В формулах (I.3) и (I.4) $u(k)$ и $v(P-k)$ – биспиноры кварка и антикварка соответственно, нормированные инвариантными условиями (массы u- и d -кварков считаем одинаковыми и равными m_q)

$$\bar{u}(k)u(k)=2m_q\,,$$
$$\bar{v}(P-k)v(P-k)=-2m_q\,. \qquad (I.5)$$

Заметим, что множитель, учитывающий число "цветов", n_c входит в условие нормировки для $\Psi^{\sigma_1\sigma_2}(k;P)$. Подставляя (I.4) и (I.3) в (I.2), вычисляя соответствующий шпур, получим следующее выражение для матричного элемента:

$$M^\mu(\pi\to\mu\tilde\nu)=\frac{G}{\sqrt{2}}\,4m_q g_A n_c P^\mu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{\Psi}_S(k;P). \qquad (I.6)$$

Умножая правые части в (I.I) и (I.6) на лептонный ток L_μ и сравнивая между собою эти части, получим следующее выражение для константы f_π :

$$f_\pi=4m_q g_A n_c\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{\Psi}_S(k;P). \qquad (I.7)$$

Реализация практического вычисления f_π, равно как и вычисления характеристик распадов мезонов с использованием двухвременных в.ф., существенно затруднена из-за сложности решения уравнения Бете – Солпитера. Известно, что в теории связанного состояния эффективным методом, позволяющим ясно описывать динамику взаимодействия двух частиц, является теория /I/, основанная на использовании трехмерного уравнения для в.ф. Бете – Солпитера, зависящей только от одного временного параметра. Во многих работах /2-7/ описание распадов мезонов

Объединенный институт ядерных исследований

проводилось с использованием таких трехмерных в.ф. Динамическими уравнениями для таких в.ф. служат уравнения квазипотенциального /1/ типа. Вычисление константы f_π в кварковой модели впервые было проведено в работах /8,9/, где f_π определялась через нерелятивистскую в.ф. мезона. При использовании одновременного формализма в /4/ получено выражение f_π с точностью до константы нормировки в.ф., отвечающей взаимодействию в квантовой хромодинамике. В работе /6/ в рамках квазипотенциального формализма, основанного на шпурионной диаграммной технике /10/, возникающей в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля (КТП), получена зависимость f_π от 3-мерной в.ф. Авторы в /11/ для вычисления f_π использовали нерелятивистскую 3-мерную в.ф. осцилляторного типа.

Целью настоящей работы является описание распада $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ с использованием 3-мерной в.ф. в модели, рассматривающей π-мезон как связанное состояние кварка и антикварка. Для сравнения результатов, полученных в работах /4,6,11/ и в настоящей, нам будет полезно сначала в п.2 вычислить константу f_π в рамках формализма хронологически упорядоченного произведения операторов поля с использованием частотных функций $S^{\pm}(x)$. В итоге константа f_π будет определяться 3-мерным интегралом с вершинной функцией, описывающей переход π-мезона в два кварка. В п. 3, используя одновременной подход к КТП, вычислим f_π с потенциалом запирания осцилляторного типа. Результаты обсуждаются в п. 4.

2. Распад $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ в рамках формализма хронологически упорядоченного произведения операторов поля

Физическая S-матрица в координатном представлении, отвечающая лагранжиану взаимодействия $\mathcal{L}(x)$, имеет следующий вид:

$$S = T\exp\left[i\int\mathcal{L}(x)\,dx\right]. \tag{2.1}$$

Представив в (2.1) S-матрицу в виде $S=1+iR$, найдем R:

$$R=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{n!}\int T\left[\mathcal{L}(x_1)\mathcal{L}(x_2)\dots\mathcal{L}(x_n)\right]dx_1dx_2\dots dx_n \tag{2.2}$$

Для получения выражения матричного элемента $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ в виде 3-мерного интеграла раскроем T-произведение лагранжианов в (2.2) в виде

$$R=\sum_P i^{n-1}\int\Theta(x^0_{i_1}-x^0_{i_2})\,\Theta(x^0_{i_2}-x^0_{i_3})\dots\Theta(x^0_{i_{n-1}}-x^0_{i_n})\cdot$$
$$\mathcal{L}(x_{i_1})\cdot\mathcal{L}(x_{i_2})\dots\mathcal{L}(x_{i_n})\,dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_n}, \tag{2.3}$$

предполагая в дальнейшем при спаривании ферми – операторов использовать $S^{\pm}(x)$ – функции. Символ $\sum_P$ в (2.3) означает суммирование по всем перестановкам $i_1, i_2, \dots, i_n$ чисел 1,2,..., n ($n!$ слагаемых). Применительно к распаду $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ оператор R_2 имеет следующий вид:

$$R_2=\frac{i}{2!}\int T\left[\mathcal{L}_\pi(x_1)\mathcal{L}_W(x_2)\right]dx_1dx_2=$$
$$i\int\left[\mathcal{L}_\pi(x_1)\mathcal{L}_W(x_2)\Theta(x_1^0-x_2^0)+\mathcal{L}_W(x_2)\mathcal{L}_\pi(x_1)\Theta(x_2^0-x_1^0)\right]dx_1dx_2, \tag{2.4}$$

где

$$\mathcal{L}_\pi(x_1)=:\bar{\psi}(x_1)\Gamma\psi(x_1):\ \phi_\pi(x_1), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}_W(x_2)=\frac{G}{\sqrt{2}}:\bar{\psi}(x_2)\gamma^\mu(1-g_A\gamma^5)\psi(x_2):\ L_\mu. \tag{2.6}$$

В лагранжианах (2.5) и (2.6) $\psi(x_i)$ и $\bar{\psi}(x_i)$ – операторы полей кварка и антикварка (i = 1,2), имеющих одинаковые массы m_1, $\phi_\pi(x)$ – в.ф. π-мезона, Γ –вершинная функция, характеризующая пион-кварковую связь, G – константа слабого взаимодействия, g_A –аксиальная константа (индексы внутренней симметрии и угол Кабиббо явно не выписываем), L_μ – лептонный ток. Выбрав в (2.5) вершинную функцию в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta}=(\gamma^5)_{\alpha\beta}\cdot\tilde{\Gamma}_S, \tag{2.7}$$

где $\tilde{\Gamma}_S$ – скалярная часть, и подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получим следующее выражение для R_2:

$$R_2=iL_\mu\int dx_1dx_2\,\phi_\pi(x_1)\left[S^+(x_2-x_1)\gamma^5S^-(x_1-x_2)\gamma^\mu(1-g_A\gamma^5)\cdot\right. \tag{2.8}$$
$$\left.\Theta(\lambda(x_1-x_2))+S^+(x_1-x_2)\gamma^\mu(1-g_A\gamma^5)S^-(x_2-x_1)\gamma^5\Theta(\lambda(x_2-x_1))\right]\tilde{\Gamma}_S,$$

где

$$S^{\pm}(x)=\frac{\pm1}{(2\pi)^3i}\int d^4k\,\Theta(\pm k^0)e^{ik\cdot x}\delta(k^2-m_1^2)(-\hat{k}+m_1). \tag{2.9}$$

Заметим, что оператор R_2 в (2.8) записан в четырехмерном виде, так как функции $\Theta(x_i^{\,0}-x_j^{\,0})$, появившиеся в (2.4), заменены на инвариантные функции $\Theta(\lambda(x_i-x_j))$, (i, j = I,2), $\lambda\cdot x=\lambda^0 x^0-\vec{\lambda}\cdot\vec{x}$, $\lambda=(\lambda^0,\vec{\lambda}=0)$, $\lambda^2=1$. Для простоты дальнейших вычислений выберем вектор λ коллинеарным времениподобному вектору P (P –полный импульс системы кварк-антикварк).

Вычисление матричного элемента $\langle\mu,\tilde{\nu}|R_2|\pi\rangle$ приводит к следующему выражению:

$$M(\pi\to\mu\tilde{\nu})\equiv\langle\mu,\tilde{\nu}|R_2|\pi\rangle=C_\mu\int d^4k\,\Theta(k^0)\,\delta(k^2-m_q^2)\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\alpha-i\varepsilon}\Big\{\Theta(-P^0-k^0+\lambda^0\alpha)\,\delta\left[(P+k-\lambda\alpha)^2-m_q^2\right]\cdot Tr(T_1^{\,\mu})+$$
$$+\Theta(P^0-k^0+\lambda^0\alpha)\,\delta\left[(-P+k-\lambda\alpha)^2-m_q^2\right]\cdot Tr(T_2^{\,\mu})\Big\}\cdot\tilde{\Gamma}_s(k;\alpha), \tag{2.I0}$$

где

$$C_\mu\equiv\frac{G}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\delta^{(4)}(P-p_\mu-p_{\tilde{\nu}})\,g_A\cdot n_c\cdot L_\mu}{2\sqrt{\pi\cdot P^0}}\Bigg|_{P^0=\sqrt{\vec{P}^2+m_\pi^2}},\quad n_c=3,\ p_\mu,\ p_{\tilde{\nu}}-$$

импульсы μ-мезона и антинейтрино соответственно,

$$Tr(T_1^{\,\mu})=4m_q P^\mu(\alpha/\sqrt{P^2}-1), \tag{2.II}$$

$$Tr(T_2^{\,\mu})=-4m_q P^\mu(\alpha/\sqrt{P^2}+1). \tag{2.I2}$$

Заметим, что импульсы кварков "находятся" на массовой поверхности, а вершина перехода мезона в пару кварк-антикварк "находится" вне энергетической поверхности, т.е. в этой вершине Γ помимо кварковых и π -мезонной линий есть ещё дополнительная входящая или выходящая линия, "переносящая" импульс $\lambda\alpha$. Так, например, первое слагаемое в (2.I0) соответствует выходящей из вершины Γ дополнительной линии с импульсом $\lambda\alpha$, второе слагаемое – входящей в вершину Γ линии с импульсом $\lambda\alpha$.

В работе /6/ выполнен расчет f_π с использованием "шпурионной" диаграммной техники /I0/, где входящей в вершину шпурионной линии отвечает пропагатор следующего вида:

$$g(\tau)=\frac{1}{2\pi(\tau-i\varepsilon)}, \tag{2.I3}$$

а каждой внутренней линии, соответствующей виртуальной спинорной частице с импульсом k_j и массой m соответствует пропагатор

$$S^{+}_{\alpha\beta}(k_j;m)=\Theta(k_j^0)(\hat{k}_j+m)_{\alpha\beta}\,\delta(k_j^2-m^2). \tag{2.I4}$$

Подставляя (2.II) и (2.I2) в (2.I0), проинтегрировав по скалярному параметру α, получим следующее выражение для $M(\pi\to\mu\tilde{\nu})$:

$$M(\pi\to\mu\tilde{\nu})=\frac{G}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4m_q P^\mu L_\mu g_A n_c\,\delta^{(4)}(P-p_\mu-p_{\tilde{\nu}})}{\sqrt{\pi\cdot P^0}}\Bigg|_{P^0=\sqrt{\vec{P}^2+m_\pi^2}}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2k^0)}\cdot\frac{\tilde{\Gamma}_s(\vec{k})}{[(2k^0)^2-m_\pi^2-i\varepsilon]}, \tag{2.I5}$$

где $k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m_q^2}$.

Отметим, что воспользовавшись при вычислении $M(\pi\to\mu\tilde{\nu})$ причинными функциями спинорных полей $S^c(x)$ с последующим представлением их в виде $S^c(x)=\Theta(x^0)S^-(x)-\Theta(-x^0)S^+(x)$, мы получим сумму из четырех слагаемых, два из которых при дальнейших вычислениях обратятся в нуль, и, таким образом, $M(\pi\to\mu\tilde{\nu})$ будет определяться двумя слагаемыми:

$$M(\pi\to\mu\tilde{\nu})=\mathcal{D}_\mu\int\frac{d^3\vec{k}}{2k^0}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha\,d\beta}{(\alpha-i\varepsilon)(\beta-i\varepsilon)}\Big\{\Theta(-P^0+\lambda^0(\alpha+\beta)-k^0)\cdot$$
$$\delta\left[(\lambda(\alpha+\beta)-P-k)^2-m_q^2\right]\cdot Tr(T_1^{\,\mu})+\Theta(P^0+\lambda^0(\alpha+\beta)-k^0)\cdot$$
$$\delta\left[(\lambda(\alpha+\beta)+P-k)^2-m_q^2\right]\cdot Tr(T_2^{\,\mu})\Big\}\cdot\tilde{\Gamma}_s(\vec{k};\alpha,\beta), \tag{2.I6}$$

где

$$\mathcal{D}_\mu=\frac{-G}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i\,\delta^{(4)}(P-p_\mu-p_{\tilde{\nu}})\,g_A\cdot n_c\cdot L_\mu}{2(2\pi)^{3/2}\sqrt{2P^0}}\Bigg|_{P^0=\sqrt{\vec{P}^2+m_\pi^2}}, \tag{2.I7}$$

$$Tr(T_1^{\,\mu})=4m_q(\lambda(\alpha+\beta)-P)^\mu, \tag{2.I8}$$

$$Tr(T_2^{\,\mu})=-4m_q(\lambda(\alpha+\beta)+P)^\mu. \tag{2.I9}$$

Выполнив в (2.16) интегрирование по скалярным переменным α и β, получим выражение (2.15). Сравнивая $M(\pi \to \mu \bar{\nu})$ в (2.15), с одной стороны, с его инвариантным выражением через константу f_π, с другой стороны, получим формулу для f_π:

$$f_\pi = \frac{m_q g_A \cdot n_c}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2k^0} \cdot \frac{\Gamma_s(\vec{k})}{(2K^0)^2 - m_\pi^2 - i\varepsilon} . \qquad (2.20)$$

Заметим, что f_π может быть записана в более простом виде, если интеграл в (2.20) представить в спектральном виде

$$f_\pi = \frac{m_q g_A n_c}{(2\pi)^2} \int\limits_{4m_q^2}^{\infty} dt \, \frac{\sqrt{1 - 4m_q^2/t}}{t - m_\pi^2 - i\varepsilon} \cdot \tilde{\Gamma}_s(t) . \qquad (2.21)$$

Уравнение для скалярной части вершинной функции $\tilde{\Gamma}_s(\vec{k})$ может быть получено из двух следующих соотношений:

$$\delta^{(4)}(P - k_2 + \lambda\alpha - k_1) \cdot \Gamma^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda\alpha; P) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3 i} \int \frac{d^3 \vec{k}_1'}{2k_1'^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha'}{\alpha' - i\varepsilon} \int d^4 k_2' \, \theta(k_2'^0) \, \delta(k_2'^2 - m_q^2) \cdot \qquad (2.22)$$

$$V^{\alpha\beta}_{\sigma\rho}(k_1, k_2; \lambda\alpha \,|\, k_1', k_2'; \lambda\alpha') \cdot \Gamma^{\sigma\rho}(k_1', k_2'; \lambda\alpha'; P) \cdot$$

$$\delta^{(4)}(\lambda(\alpha - \alpha') - k_2 + k_1' - k_1 + k_2') \cdot \delta^{(4)}(P - k_2' + \lambda\alpha' - k_1') ;$$

$$\delta^{(4)}(P + k_1 - \lambda\alpha + k_2) \cdot \Gamma^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda\alpha; P) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3 i} \int \frac{d^3 \vec{k}_1'}{2k_1'^0} \int \frac{d\alpha'}{\alpha' - i\varepsilon} \int d^4 k_2' \, \theta(k_2'^0) \, \delta(k_2'^2 - m_q^2) \cdot$$

$$\cdot V^{\alpha\beta}_{\sigma\rho}(k_1, k_2; \lambda\alpha \,|\, k_1', k_2'; \lambda\alpha') \cdot \Gamma^{\sigma\rho}(k_1', k_2'; \lambda\alpha'; P) \cdot$$

$$\delta^{(4)}(\lambda(\alpha' - \alpha) + k_1 - k_1' - k_2' + k_2) \cdot \delta^{(4)}(P + k_1' - \lambda\alpha' + k_2') . \qquad (2.23)$$

Соотношения (2.22) и (2.23) графически изображены на рис. 3 и 4 соответственно.

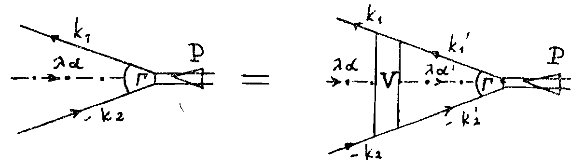

Рис. 3

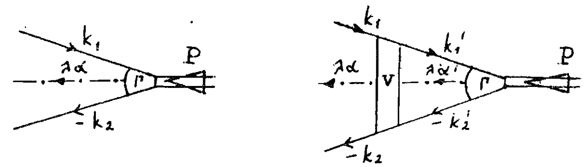

Рис. 4

В соотношениях (2.22) и (2.23) мы будем использовать потенциал $V(k_1, k_2; \lambda\alpha \,|\, k_1', k_2'; \lambda\alpha)$, заданный в следующем виде:

$$V(k_1, k_2; \lambda\alpha \,|\, k_1', k_2'; \lambda\alpha') = \bar{u}(k_1)\gamma_\mu u(k_1')\bar{v}(k_2')\gamma^\mu v(k_2) V_s(q^2; \lambda\alpha; \lambda\alpha'), \qquad (2.24)$$

где

$$V_s(q^2; \lambda\alpha; \lambda\alpha') = -g^2/q^2 , \quad q = k_1 - k_1' \qquad (2.25)$$

и константа g зависит от $Q^2 = -q^2$ в квантовой хромодинамике. Спинорную структуру вершинной функции Γ выделим следующим образом:

$$\Gamma^{\sigma_1\sigma_2}(k_1, k_2; \lambda\alpha; P) = i\,\bar{u}^{\sigma_1}(k_1)\gamma^5 v^{\sigma_2}(k_2) \cdot \tilde{\Gamma}_s(k_1, k_2, \lambda\alpha; P) , \qquad (2.26)$$

где $\tilde{\Gamma}_s(k_1, k_2; \lambda\alpha; P)$ – скалярная функция, индексы σ_1, σ_2 – проекции спинов кварка и антикварка с импульсами k_1 и k_2 соответственно на ось z. Используя стандартную технику вычислений в соотношениях (2.‥) и (2.‥), получим следующее выражение для скалярной части вершинной функции в системе центра масс:

$$\tilde{\Gamma}_s(k^0,P)=\frac{8}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{k}'}{2k^{0\prime}}\left(\frac{2k^{0\prime}}{2k^0}\right)\cdot\frac{\tilde{\Gamma}_s(k^{0\prime};P)}{(2k^{0\prime})^2-m_\pi^2-i\varepsilon}\cdot$$

$$V_s(q^2)\cdot(2k^0\cdot k^{0\prime}-m_q^2), \qquad (2.27)$$

где $k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m_q^2}$, $k^{0\prime}=\sqrt{\vec{k}'^2+m_q^2}$.

Определим в.ф., описывающую относительное движение кварка и антикварка в связанном состоянии:

$$\tilde{\Phi}_s(\vec{k})=\frac{(2k^0)\,\tilde{\Gamma}_s(k^0;P)}{(2k^0)^2-m_\pi^2-i\varepsilon}\,. \qquad (2.28)$$

Тогда уравнение для в.ф. $\tilde{\Phi}_s(\vec{k})$ примет следующий вид:

$$\left[(2k^0)^2-m_\pi^2\right]\tilde{\Phi}_s(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{k}'}{2k'^0}\,\tilde{\Phi}_s(\vec{k}'). \qquad (2.29)$$

Используя определение в.ф. $\tilde{\Phi}_s(\vec{k})$ в виде (2.28), представим константу f_π в виде

$$f_\pi=\frac{m_q\,g_A\,n_c}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\vec{k}}{\vec{k}^2+m_q^2}\cdot\tilde{\Phi}_s(\vec{k}). \qquad (2.30)$$

Таким образом, получено выражение для константы f_π, явным образом зависящей от параметра m_q и вида 3-мерной релятивистской волновой функции связанного состояния.

3. Распад $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ в одновременном формализме

Одновременная в.ф. $\tilde{\Psi}^{\sigma_1\sigma_2}(k_1,k_2)$, описывающая относительное движение кварка и антикварка с импульсами k_1 и k_2 соответветственно, определяется через в.ф. Бете – Солпитера

$$\Psi_{BS}(x_1,x_2)=\langle 0|T(\bar\Psi(x_1)\Psi(x_2))|M_B,\vec{K}\rangle \qquad (3.1)$$

следующим образом /13,14,12/:

$$\tilde{\Psi}^{\sigma_1\sigma_2}(k_1,k_2)=\frac{-(2\pi)^4}{4m_q^2}\,\bar{u}_\alpha^{\sigma_1}(\Lambda^{-1}_{\lambda_P}k_1)\,v_\beta^{\sigma_2}(\Lambda^{-1}_{\lambda_P}k_2)\cdot$$

$$\int d^4x\,e^{i(k_1-k_2)x}\,\delta(\lambda_P\cdot x)\langle 0|T(\bar\Psi_\beta(\tfrac{x}{2})\Psi_\alpha(-\tfrac{x}{2}))|M_B,\vec{K}\rangle. \qquad (3.2)$$

В формулах (3.1), (3.2) $\Psi(x)(\bar\Psi(x))$ – оператор поля кварка (антикварка), $x=x_1-x_2$, $|M_B,\vec{K}\rangle$ – вектор, описывающий связанное состояние как одну частицу с массой M_B и импульсом $\vec{K}$, $\lambda_P^\mu=P^\mu/\sqrt{P^2}$, Λ_{λ_P} – матрица чистого лоренцева преобразования в систему покоя составной частицы, движущейся со скоростью λ_P^μ, и такая, что $\Lambda_{\lambda_P}(M_P,\vec{0})=(P^0,\vec{P})$, M_P –масса составной частицы. Инвариантная $\delta(\lambda_P\cdot x)$– функция в (3.2) обеспечивает в с.ц.и. равенство $x_1^0=x_2^0$, т.е. равенство времен кварка и антикварка. В формализме одновременного подхода к КТП матричный элемент распада $\pi\to\mu\tilde\nu$ имеет следующий вид (без лептонной части):

$$M^\mu(\pi\to\mu\tilde\nu)=\frac{G}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n_c}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathring{\vec{k}}}{2\mathring{k}^0}\,\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\Psi}^{\sigma_1\sigma_2}(\mathring{\vec{k}})\cdot A^{*\mu}_{\sigma_1\sigma_2}(\mathring{\vec{k}})\right\}, \qquad (3.3)$$

где $A^\mu_{\sigma_1\sigma_2}(\mathring{\vec{k}})$ – аксиальный ток или "амплитуда" перехода связанной пары кварк-антикварк в аксиальную вершину $\gamma^\mu\gamma^5$, а "нули" сверху над векторами отражают тот факт, что эти векторы являются ковариантно-обобщенными векторами импульсов частиц в с.ц.и. Воспользовавшись основными правилами построения $\tilde\Psi(\mathring{\vec{k}})$ и $A^\mu(\mathring{\vec{k}})$ в квазипотенциальном подходе к КТП, изложенными в работах /4,12/, получим следующее выражение для f_π /4/:

$$f_\pi=\frac{m_q\,g_A\,n_c}{2\pi^3\,m_\pi}\int\frac{d^3\mathring{\vec{k}}}{2\mathring{k}^0}\,\tilde{\Phi}(\mathring{\vec{k}}), \qquad (3.4)$$

где в.ф. $\tilde{\Phi}(\mathring{\vec{k}})$ удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$n_c\int\frac{d^3\mathring{\vec{k}}}{(2\pi)^3}\left|\tilde{\Phi}(\mathring{\vec{k}})\right|^2=M_B, \qquad (3.5)$$

M_B –масса связанного состояния. Соотношение для f_π в (3.4) сравнимо с результатом из работы /11/

$$f_\pi=\frac{\hat{m}}{4\sqrt{2}\,\pi^3}\int\frac{d^3\tau}{(\tau^2+\hat{m}^2)^{3/4}}\cdot\varphi_{PS}(\tau), \qquad (3.6)$$

где $\tau=p_\perp$ –поперечный импульс кварка в системе покоя мезона, $\hat{m}$ – конституентная масса кварка. При вычислении f_π авторы в /11/ использовали в.ф. гармонического осциллятора $\varphi_{ps}(\tau)=N\exp(-\tau^2/2\sigma^2)$ при $\hat{m}$ = 340 МэВ, σ = 180 МэВ. Для численной оценки f_π мы будем использовать формулу (3.4), полученную в результате последовательной формулировки релятивистского одновременного подхода к теории Бете – Солпитера. В качестве релятивистской одновременной в.ф. будем использовать

$$\phi(\chi_k) = N \exp\left(-m_q \operatorname{ch} \chi_k / 2\omega\right), \tag{3.7}$$

определяемую потенциалом запирания осцилляторного типа /5/ и записанную в пространстве "быстрот" кварков χ_k. Используя переменную χ_k, выражение для f_π можно представить так:

$$f_\pi = \frac{4 m_q^2 g_A n_c}{\pi \cdot m_\pi} \int_0^\infty d\chi_k \operatorname{sh}\chi_k \cdot \phi(\chi_k). \tag{3.8}$$

В результате получим простое выражение для f_π:

$$f_\pi = \frac{2 n_c}{a \cdot \pi} e^{-a} \left(\frac{m_q^3}{6 m_\pi K_1(2a)} \right)^{1/2}, \tag{3.9}$$

где $a \equiv m_q/2\omega$, $K_1(2a)$ – модифицированная функция Бесселя, m_π –масса пиона.

Вследствие "элементарной" природы кварка полагаем $g_A \simeq 1$ (в случае барионов, например, $g_A \simeq 1,25$). При выборе значения параметра m_q считаем, что кварки являются "конституентными". В этом случае масса кварка может быть выбрана из следующего соотношения:

$$m_q \sim \frac{1}{2} m_\rho \sim \frac{1}{3} m_N \simeq 340 \text{ МэВ}, \tag{3.10}$$

где m_ρ и m_N –массы ρ – мезона и нуклона соответственно. Результаты вычисления f_π при $m_q = 340$ МэВ и различных значениях параметра ω представлены в таблице.

Таблица

ω, МэВ	m_q = 340 МэВ f_π, МэВ
20	86
24	94
25	102
50	166

Из таблицы видно, что экспериментальное значение $f_\pi \simeq 94$ МэВ воспроизводится при значении "осцилляторной частоты" ω = 24 МэВ.

4. Заключение

В заключение мы отметим, что, исходя из предположения элементарности частиц и вершин в распаде $\pi \to \mu \tilde{\nu}$, константу распада f_π в 4-мерном формализме можно определить интегралом следующего вида (см. рис. I):

$$I = \frac{G}{\sqrt{2}} g_{ps} \int d^4k \frac{Sp\{u(k,\nu)\gamma^5 \bar{u}(k,\nu)\gamma^\mu(1-g_A\gamma^5)v(P-k,\nu)\bar{v}(P-k,\nu)\}}{(m_q^2-k^2-i\varepsilon)[m_q^2-(P-k)^2-i\varepsilon]}. \tag{4.1}$$

Полагаем, что в действительности в интеграле (4.I) величина

$$\Psi(k;P) = \frac{u(k,\nu)\gamma^5\bar{v}(P-k,\nu)}{(m_q^2-k^2-i\varepsilon)[m_q^2-(P-k)^2-i\varepsilon]} \tag{4.2}$$

является 4-мерной спинорной волновой функцией, описывающей структуру π –мезона, в предположении, что π –мезон является связанным состоянием кварков. Выражение $1/[(m_q^2-k^2-i\varepsilon)(m_q^2-(P-k)^2-i\varepsilon)]$ является частным случаем выбора скалярной волновой функции. Таким образом, если мы имеем волновую функцию $\Psi(k;P)$, являющуюся решением какого-нибудь динамического уравнения, например, Бете – Солпитера, и притом такую, что эта в.ф. удовлетворительно описывает динамику взаимодействия составляющих π –мезон частиц, то константа f_π будет однозначно определяться выражением (I.7).

Используя формализм хронологически упорядоченного произведения операторов поля в КТП, константу f_π можно определить 3-мерным интегралом следующего вида (предполагаем элементарность вершины π – мезон-кварк-антикварк, $\Gamma_s = 1$):

$$I = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2k^0)^2} \cdot \frac{2k^0}{(2k^0)^2 - m_\pi^2 - i\varepsilon}, \tag{4.3}$$

где выражение $2k^0/[(2k^0)^2 - m_\pi^2 - i\varepsilon]$ является частным видом скалярной 3-мерной в.ф. Учитывая структуру π –мезона с помощью 3-мерной вершинной функции $\Gamma_s(\vec{k})$, в.ф. может быть определена по формуле (2.28). Тогда константа f_π определяется видом волновой функции $\Phi_s(\vec{k})$ в (2.30)

Выражение для f_π (3.4), полученное в одновременном формализме, отличается от (2.30) на фактор $2k^0/m_\pi$ ($k^0=\sqrt{\vec{k}^2+m_q^2}$), являющийся в распаде $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ проявлением ковариантного условия выхода за энергетическую поверхность при определении одновременной волновой функции.

Автор благодарен В.И. Саврину, Н.Б. Скачкову, А.В. Радюшкину за полезные замечания и обсуждение работы.

Литература

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cim., 1963, 29, p. 380.
2. Savrin V.I., Skachkov N.B. Lett. Nuovo Cim., 1980, 29, N 4, p. 363.
3. Bergström L., Snellman H. Z. Phys., 1981, 8C, № 4, p. 363.
4. Саврин В.И., Скачков Н.Б. Труды У Международного семинара "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля". ИФВЭ, Протвино, 1982, т. П, с. 229.
5. Kozlov G.A. et al., Z. Phys., 1983, 21C, N 1/2, p. 63.
6. Саврин В.И., Санадзе В.В., Скачков Н.Б. Сообщение ОИЯИ Р2-84-40, Дубна, 1984.
7. Kozlov G.A. et al. Proceedigs of the XVIII International Symposium "Special Topics in Gauge Field Theories" Ahrenshoop, 1984, p. 68.
8. Матвеев В.А., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. Препринт ОИЯИ Р2-2527, Дубна, 1965.
9. Van Royen R., Weisskopf V.F. Nuovo Cim., 1967, 50A, p.617.
10. Кадышевский В.Г. ЖЭТФ, 1964, 46 № 2, с. 654; № 3, с. 872; Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., 1968, B6, N 2, p. 125.
11. Fuchs N.H., Scadron M.D. Nuovo Cimento, 1984, 80A, N 2, p. 141.
12. Саврин В.И., Скачков Н.Б., Тюменков Г.Ю. ТМФ, 1983, 54, № 2, с. 173.
13. Логунов А.А., Саврин В.И., Тюрин Н.Е., Хрусталев О.А. ТМФ, 1971, 6, № 2, с. 157.
14. Faustov R.N. Ann Phys., 1973, 78, N 1, p. 176.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июля 1986 года.

Козлов Г.А. Р2-86-500
О распаде $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ в релятивистской теории связанных состояний

В рамках формализма хронологически упорядоченного произведения операторов поля получено выражение для константы f_π в зависимости от вида 3-мерной волновой функции связанного состояния. С использованием одновременного подхода к квантовой теории поля вычисляется f_π с потенциалом запирания /осцилляторного типа/ кварков.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Kozlov G.A. P2-86-500
On decay $\pi\to\mu\tilde{\nu}$ in the Relativistic Theory of Bound States

Within the formalism of T-ordered product of field operators the constant f_π is determined as a function of a 3-dimensional wave function of the bound state. The single-time approach is applied to calculate f_π with the quark confinement potential (of an oscillator type).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986