сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-86-478

Н.А.Черников

ДВА ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА БЕЛЬТРАМИ ВТОРОГО РОДА

1986

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Дифференциальный параметр Бельтрами второго рода $\Box\Psi$ для скалярной функции Ψ, заданной на N-мерном многообразии M, определяется по отношению к некоторому наперед заданному на том же многообразии симметричному тензорному полю g_{ab}. Считается, что определитель g матрицы (g_{ab}) не равен нулю и что, следовательно, существует обратное к g_{ab} тензорное поле g^{ab}, которое находится из условия $g^{ak}\, g_{kb} = \delta^{a}_{b}$, где в правой части написан символ Кронекера. Параметр $\Box\Psi$ равен скалярной функции

$$\Box\Psi = \frac{1}{\epsilon}\,\frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(\epsilon g^{ab}\,\frac{\partial\Psi}{\partial x^{b}}\right), \qquad /1/$$

где

$$\epsilon = \sqrt{|g|}. \qquad /2/$$

Функция Ψ называется гармонической по отношению к полю g_{ab}, если

$$\Box\Psi = 0\,. \qquad /3/$$

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Геометрический объект Γ, заданный на многообразии M, называется аффинной связностью /1/, если он характеризуется N^3 компонентами Γ^{a}_{mn}, преобразующимися при переходе от координат $x^1,\dots,x^N$ к координатам $\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^N$ по правилу

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{mn} = \left(\Gamma^{b}_{pq}\,\frac{\partial x^{p}}{\partial\tilde{x}^{m}}\,\frac{\partial x^{q}}{\partial\tilde{x}^{n}} + \frac{\partial^{2}x^{b}}{\partial\tilde{x}^{m}\partial\tilde{x}^{n}}\right)\frac{\partial\tilde{x}^{a}}{\partial x^{b}}\,. \qquad /4/$$

С помощью аффинной связности составляются ковариантные производные. Например, для скалярной функции Ψ, ковекторного поля Ψ_b и тензорного поля g^{ab} ковариантные производные равны

$$\nabla_{b}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^{b}}, \quad \nabla_{a}\Psi_{b} = \frac{\partial\Psi_{b}}{\partial x^{a}} - \Gamma^{s}_{ab}\,\Psi_{s}\,,$$

$$\nabla_{n}g^{ab} = \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^{n}} + \Gamma^{a}_{ns}\,g^{sb} + \Gamma^{b}_{ns}\,g^{as} \qquad /5/$$

Частным случаем является связность Кристоффеля

$$\Gamma^{a}_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} \left(\frac{\partial g_{sn}}{\partial x^{m}} + \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^{n}} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^{s}}\right). \qquad /6/$$

Ее свертка равна

$$\Gamma^{a}_{ma} = \frac{1}{2} g^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^{m}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x^{m}}. \qquad /7/$$

Следовательно,

$$g^{mn}\Gamma^{a}_{mn} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^{b}} (\epsilon g^{ab}). \qquad /8/$$

Поэтому параметр Бельтрами /1/ можно записать в виде

$$\Box \Psi = g^{mn} \nabla_m \nabla_n \Psi = g^{mn} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^m \partial x^n} - \Gamma^{b}_{mn} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{b}}\right). \qquad /9/$$

Другим примером аффинной связности является координатная связность. Обозначим ее $\check{\Gamma}$. Чтобы определить ее, выберем N функций

$$\psi^a (x^1, \dots, x^N), \qquad a \in \{1, \dots, N\}, \qquad /10/$$

достаточное число раз непрерывно дифференцируемых с отличным от нуля якобианом $\frac{\partial(\psi^1, \dots, \psi^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)}$. Такая совокупность функций составляет новую карту многообразия M. Положим, что в этой карте коэффициенты связности $\check{\Gamma}$ равны нулю. Тогда в исходной карте $x^1, \dots, x^N$ ее коэффициенты равны

$$\check{\Gamma}^{a}_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \psi^s} \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial x^m \partial x^n}. \qquad /11/$$

Заметим, что разность

$$P^{a}_{mn} = \check{\Gamma}^{a}_{mn} - \Gamma^{a}_{mn} \qquad /12/$$

любых двух связностей является тензором.

ПЕРВОЕ ТОЖДЕСТВО

Из выражений /9/, /11/ и /12/ непосредственно следует тождество

$$\frac{\partial x^a}{\partial \psi^s} \Box \psi^s = g^{mn} P^{a}_{mn}. \qquad /13/$$

ВТОРОЕ ТОЖДЕСТВО

Рассмотрим вектор

$$\Phi^a = \frac{\check{\epsilon}}{\epsilon} \check{\nabla}_b \left(\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}} g^{ab}\right), \qquad /14/$$

где $\check{\nabla}_b$ – ковариантная производная, составленная с помощью связности /11/, ϵ – скалярная плотность /2/ и $\check{\epsilon}$ – скалярная плотность, равная

$$\check{\epsilon} = \left| \frac{\partial(\psi^1, \dots, \psi^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} \right|, \qquad /15/$$

Так как отношение скалярных плотностей является скалярной функцией, то

$$\Phi^a = \check{\nabla}_b g^{ab} + \frac{\check{\epsilon}}{\epsilon} g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b} \frac{\epsilon}{\check{\epsilon}}. \qquad /16/$$

Согласно /5/ первое слагаемое в правой части здесь равно

$$\check{\nabla}_b g^{ab} = \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^b} + \check{\Gamma}^{a}_{bs} g^{sb} + \check{\Gamma}^{b}_{bs} g^{as}. \qquad /17/$$

Из /11/ и /15/ следует, что

$$\check{\Gamma}^{b}_{bs} = \frac{1}{\check{\epsilon}} \frac{\partial \check{\epsilon}}{\partial x^s}. \qquad /18/$$

Поэтому

$$\Phi^a = \check{\Gamma}^{a}_{mn} g^{mn} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^b} (\epsilon g^{ab}). \qquad /19/$$

Учитывая /8/, получаем

$$\Phi^a = g^{mn} P^{a}_{mn}. \qquad /20/$$

Подставляя это выражение в тождество /13/, приходим к другому тождеству, а именно:

$$\frac{\partial x^a}{\partial \psi^s} \Box \psi^s = \frac{\check{\epsilon}}{\epsilon} \check{\nabla}_b \left(\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}} g^{ab}\right). \qquad /21/$$

ГАРМОНИЧЕСКАЯ КАРТА

Координаты /10/ называются гармоническими, если каждая из них является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению /3/. Гармонические координаты составляют гармоническую карту.

Согласно доказанным тождествам три условия

$$\Box \psi^a = 0, \qquad g^{mn} P^{a}_{mn} = 0, \qquad /22/, /23/$$

$$\Phi^a = \frac{\check\epsilon}{\epsilon}\check\nabla_b\left(\frac{\epsilon}{\check\epsilon}g^{ab}\right) = 0 \qquad /24/$$

взаимно эквивалентны. Каждое из этих условий определяет гармоническую карту.

Отсюда видно, что в гармонической карте компоненты метрического тензора удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^b}(\epsilon g^{ab}) = 0, \qquad /25/$$

которые можно принять за определение гармонической карты /2/. Параметр Бельтрами /1/ в гармонической карте равен

$$\Box\Psi = g^{ab}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^a\,\partial x^b}. \qquad /26/$$

Уравнение /3/ для гармонической функции в гармонической карте принимает вид

$$g^{ab}\frac{\partial\Psi}{\partial x^a\,\partial x^b} = 0. \qquad /27/$$

ГАРМОНИЧЕСКАЯ КАРТА ЭЙНШТЕЙНА

В случае слабого гравитационного поля Эйнштейн /1918 г./ полагал, что компоненты g_{ab} равны /3/

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \Delta_{ab}, \qquad /28/$$

где η_{ab} не зависят от координат, а Δ_{ab} - очень малые величины. С точностью до первого порядка малости

$$g = \eta(1+\Delta^s_s), \quad g^{ab} = \eta^{ab} - \Delta^{ab}, \qquad /29/$$

где η - определитель матрицы (η_{ab}), числа η^{ab} находятся из условия $\eta^{ak}\eta_{kb} = \delta^a_b$,

$$\Delta_{as}\eta^{sb} = \Delta^b_a = \eta_{as}\Delta^{sb}. \qquad /30/$$

Согласно /29/

$$\frac{1}{\epsilon}\,\frac{\partial}{\partial x^b}(\epsilon g^{ab}) = -\frac{\partial}{\partial x^b}\theta^{ab}, \qquad /31/$$

где

$$\theta^{ab} = \Delta^{ab} - \frac{1}{2}\Delta^s_s\eta^{ab}. \qquad /32/$$

Условия гармоничности /25/ в данном случае означают как раз те самые условия

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\theta^{ab} = 0, \qquad /33/$$

которые накладывал Эйнштейн на метрику /28/. Они означают, что декартовы координаты для метрики

$$d\check s^2 = \eta_{ab}\,dx^a\otimes dx^b \qquad /34/$$

являются гармоническими координатами для метрики

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a\otimes dx^b. \qquad /35/$$

Заметим, что связность Кристоффеля для метрики /34/ является координатной связностью.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ КАРТА ФОКА

Метрика Шварцшильда /1916 г./

$$ds^2 = V^2c^2dt^2 - V^{-2}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \qquad /36/$$

где $V^2 = 1 - 2\alpha\rho^{-1}$, $\alpha = \gamma Mc^{-2}$ - гравитационный радиус массы M, определена в координатах ρ, θ, ϕ, t в области $\rho > 2\alpha$. В пространственно-временном мире с метрикой /36/ длина окружности, на которой $\rho = \mathrm{const}$, $\theta = \pi/2$, $t = \mathrm{const}$, равна $2\pi\rho$, чем и замечательна выбранная Шварцшильдом радиальная координата ρ.

Гармонические координаты Фока являются следующими функциями координат Шварцшильда:

$$x^1 = (\rho - \alpha)\sin\theta\cos\phi = x, \quad x^3 = (\rho - \alpha)\cos\theta = z,$$
$$x^2 = (\rho - \alpha)\sin\theta\sin\phi = y, \quad x^4 = ct. \qquad /37/$$

Если перейти к другой радиальной координате, то соответственно изменятся выражения /36/ и /37/. Например, полагая $\rho = r + \alpha$, получаем

$$ds^2 = \frac{r-\alpha}{r+\alpha}c^2dt^2 - \frac{r+\alpha}{r-\alpha}dr^2 - (r+\alpha)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2), \qquad /36'/$$

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi = x, \quad x^3 = r\cos\theta = z, \qquad /37'/$$
$$x^2 = r\sin\theta\sin\phi = y, \quad x^4 = ct.$$

Полагая $\rho = u(1+\alpha/2u)^2$, получаем

$$ds^2 = \left[\frac{2u-\alpha}{2u+\alpha}\right]^2c^2dt^2 - \left[1+\frac{\alpha}{2u}\right]^4[du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)], \qquad /36''/$$

$$x^1 = \left(1+\frac{\alpha^2}{4u^2}\right)u\sin\theta\cos\phi = x, \quad x^3 = \left(1+\frac{\alpha^2}{4u^2}\right)u\cos\theta = z, \qquad /37''/$$
$$x^2 = \left(1+\frac{\alpha^2}{4u^2}\right)u\sin\theta\sin\phi = y, \quad x^4 = ct.$$

Запишем, наконец, метрику Шварцшильда в гармонической карте Фока:

$$ds^2 = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} + a} c^2 dt^2 -$$

$$- \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + a)^2}{x^2+y^2+z^2} (dx^2+dy^2+dz^2) - \qquad /38/$$

$$- a^2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} + a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - a} \frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} .$$

В связи с этим Фок писал: "Сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x, y, z ? Нам представляется единственно правильным второе определение" /см.[4], с. 273/.

Как видно, Фок придавал реальный смысл координатной связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$, компоненты которой в выбранной им карте равны нулю. Такая связность наделяет мир Шварцшильда структурой аффинного пространства, но не дает никакой информации о группе Лоренца. Однако дальше Фок писал: "В случае изолированной системы масс существует координатная система, а именно гармоническая, которая определяется путем наложения добавочных условий однозначно, с точностью до преобразований Лоренца" /см.[4], с. 445/.

Отсюда можно сделать вывод /который мы и сделали в[5]/ о том, что вместе с метрикой Шварцшильда /38/ Фок рассматривал метрику

$$d\check{s}^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad /39/$$

хотя и не сообщил об этом в своей книге[4].

Но и Эйнштейн в статье[3] вместе с метрикой де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) c^2 dt^2 -$$

$$- \left(1 + \frac{2a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad /40/$$

рассматривал метрику Минковского /39/, а при больших значениях суммы квадратов $x^2+y^2+z^2$ метрика Шварцшильда /38/ переходит

в метрику де Ситтера /40/. Заметим, что при больших значениях этой суммы метрика /38/ принимает "изотропный" вид.

Разумеется, установленное выше соответствие между метриками Шварцшильда, Минковского и де Ситтера должно не теряться при переходе от гармонической к какой-либо другой координатной карте. Например, в координатах r, θ, ϕ, t /а это отнюдь не гармоническая карта, здесь только две координаты, ϕ и t, гармонические/ метрику Шварцшильда надо записывать в виде /36'/, метрику Минковского - в виде

$$d\check{s}^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \qquad /41/$$

а метрику де Ситтера - в виде

$$d\check{s}^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{2a}{r}\right)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \qquad /42/$$

Таким образом, подход Эйнштейна к проблеме тяжелого источника гравитационного поля отличается от подхода Фока в несущественном, только в том, что первый рассматривал поле вдали от источника, а второй - всюду в области $\rho > 2a$. По сути же подход Фока к этой проблеме совпадает с подходом Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
2. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. "Наукова думка", Киев, 1985.
3. Эйнштейн А. О гравитационных волнах /1918/. - Собр. научн. трудов, т. 1, "Наука", М., 1965, с.631-646.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.
5. Черников Н.А. В кн.: Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с. 382.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Черников Н.А.

Р2-86-478

Два тождества для дифференциального параметра Бельтрами второго рода

Доказаны два тождества для дифференциального параметра Бельтрами второго рода. Условия гармоничности записаны в трех взаимно эквивалентных видах. Сравнивается, как эти условия выглядят в работах А.Эйнштейна и В.А.Фока.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Chernikov N.A.

P2-86-478

Two Identities for the Second Beltrami Differential Parameter

Two identities are proved for the second differential Beltrami parameter. The conditions of harmonicity are written in three equivalent forms. Comparison is made for these conditions in works by A.Einstein and V.A.Fock.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986