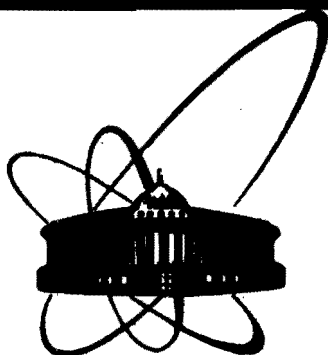


86-433



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P2-86-433

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов

**РАСЧЕТ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ
НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ
ВИНЕРОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ
Модели квантовой механики**

1986

Введение

Одной из важных проблем современной квантовой физики является исследование непертурбативной структуры вакуума в калибровочных теориях^{/1/}. К настоящему времени считается установленным (см., напр.^{/2/}), что волновая функция вакуума является суперпозицией вакуумов, принадлежащих различным гомотопическим классам^{/3/} с определенным целочисленным топологическим инвариантом (топологическим зарядом) Q , и характеризуется непрерывным параметром θ , нарушающим CP -инвариантность. Эти " θ -миры"^{/4/} не сообщаются друг с другом и являются физически неэквивалентными. Переходы между состояниями вакуума, обладающими различными Q , связаны с наличием в неабелевых калибровочных теориях (Янга-Миллса) в евклидовой метрике классических решений полевых уравнений, имеющих нетривиальную топологию (инстантоны), что впервые было обнаружено А.М.Поляковым с сотрудниками в 1975 г.^{/5/}. Использование инстантонных решений и их свойства рассмотрены в^{/6/}. Обзор методов исследования структуры вакуума в квантовой хромодинамике, определения вклада инстантонных эффектов в амплитуды различных процессов содержится в^{/7a/}.

Численный эксперимент, основанный на приближенном вычислении континуальных интегралов, широко используется сейчас для изучения непертурбативных характеристик в калибровочных теориях (см., напр.,^{/7-16/}, а также ссылки в этих работах). К сожалению, значения топологической восприимчивости (см., напр.,^{/11/})

$$\chi = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \langle Q^2 \rangle$$

(V - объем пространства-времени), вычисленные в данных работах путем расчетов методом Монте-Карло на решетке, отличаются друг от друга и от феноменологических оценок^{/17/} на 1-2 порядка. Как отмечается в^{/7a/}, причина такого отличия может заключаться как в различии определений топологического заряда на решетке, так и в возможности наличия специфической систематической погрешности, связанной с конечностью шага решеточной дискретизации. В работе^{/8/} была обнаружена возможность "скачка" частицы через потенциальный барьер

вместо проникновения сквозь него в результате туннелирования в численном эксперименте, когда шаг решетки сравним с размерами инстантонов. Как указали авторы^{/8/}, вследствие этого итерации могут сходиться к неверному результату. В^{/8/} (см. также^{/7a/}) для устранения этого нежелательного эффекта предложено использовать модифицированное действие, в котором сумма значений потенциала в узлах решетки

$$\frac{a}{2} [v(x_k) + v(x_{k+1})] \quad \text{заменена интегралом по отрезку прямой}$$

$\int_0^a v[x = x_k + \frac{\tau}{a}(x_{k+1} - x_k)] d\tau$. На необходимость использования решеток с большим числом узлов указывается также в работе^{/15a/}, где использованная решетка при определенных значениях константы связи оказалась слишком маленькой для проявления непертурбативных эффектов. Вычисляемая величина на такой решетке была далека от асимптотического значения. Другой возможной причиной отмеченного различия результатов (см.^{/7a/}) может являться предположение, что обычного времени релаксации недостаточно для проявления инстантонных эффектов.

В одной из последних работ^{/18/} путем расчета методом Монте-Карло на решетках до $I2^4$ с использованием оригинального алгоритма было получено значение топологической восприимчивости, лучше согласующееся с феноменологическими результатами. Интересно, что в^{/14/} эта величина была найдена в разумных пределах, что противоречит^{/15/}, хотя там используется подобный алгоритм. В соответствии с определением топологического заряда на решетке, предложенным в^{/14/}, в работе^{/19/} с применением стандартного варианта действия были получены результаты, хорошо согласующиеся с приближением разреженного инстантонного газа. В то же время в работе^{/20/} выдвигается обоснование того, что со стандартным действием невозможно правильно описать явления, вызываемые инстантонами, и предлагается свой вариант улучшенного действия.

Очевидно, что необходима дальнейшая работа, чтобы с единых позиций объяснить имеющееся к настоящему времени большое количество результатов. В связи с этим в последнее время ряд авторов занимается более последовательным изучением этих явлений на моделях из квантовой механики. В работе^{/21/} (см. также^{/76/}) производится попытка описания непертурбативных явлений с помощью модифицированного вариационного принципа Фейнмана. В^{/22/} предлагается свой метод определения мультиинстантонного вклада в квантовой механике и выдвигается предположение о форме разложения этого вклада по степеням константы связи. Предположение подтверждается численными примерами расчетов для двугорбого потенциала и \cos -потенциала в квантовой механике. Несколько отличный от^{/22/} подход к этой проблеме реализуется в^{/23/}. В работе^{/7в/} также рассматриваются эффекты, связанные с туннелированием в одномерном двугорбом потенциале, и производится попытка созда-

ния эффективной теории, описывающей топологические флуктуации в квантовой теории поля в терминах коллективных координат (связанных с позициями инстантонов).

В данной работе мы хотим показать, как непертурбативные эффекты могут быть рассчитаны непосредственно на континуальном уровне без решеточной дискретизации. Вопросам математически строгого построения меры в континуальных интегралах квантовой физики уделяется в последнее время большое внимание^{/24/}. Значительное развитие получили методы приближенного вычисления континуальных интегралов^{/25/}. В работах^{/26/} нами были построены некоторые приближенные формулы для континуальных интегралов, точные на классе функциональных многочленов заданной степени. В^{/27/} использование этих формул и их эффективность были продемонстрированы на примерах гармонического и ангармонического осцилляторов. Очевидно, что при таком подходе не возникает проблем, подобных эффекту "скачка", обнаруженному в^{/8/}, и связанных с конечностью шага решетки. Расчеты на континуальном уровне в последнее время привлекают к себе внимание многих авторов. В недавних работах^{/28/} в рамках $su(2)$ - и $su(3)$ -групп в континуальном случае было получено алгебраическое выражение для топологического заряда, пригодное также для расчетов на решетке и допускающее простую геометрическую интерпретацию.

В настоящей работе с помощью приближенного вычисления континуальных интегралов по условной мере Винера мы исследуем вопросы, связанные с движением частицы в двугорбом потенциале, а также рассматриваем квантовый маятник, являющийся более адекватной моделью периодической структуры вакуума^{/29,30/} в теории Янга-Миллса. В используемом нами подходе определение топологического заряда оказывается довольно простым и достаточно наглядным. Полученные численные результаты хорошо согласуются с приближением разреженного инстантонного газа, причем проводимые расчеты позволяют исследовать границы применимости этого приближения. Мы также убедились, что основной вклад дают конфигурации, обладающие сравнительно небольшим топологическим зарядом. И, наконец, использование приближенных формул^{/26/} заменяет нахождение континуальных интегралов вычислением "обычных" интегралов малой кратности. Это позволяет использовать детерминированные методы (в частности, квадратурные формулы Гаусса и Чебышева) и приводит к значительной экономии счетного времени и памяти ЭВМ по сравнению с расчетами на решетке методом Монте-Карло.

I. Основные соотношения

В евклидовой квантовой механике матричные элементы оператора эволюции

$$z(x_f, x_i, T) = \langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle$$

системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 + V = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V, \quad (1)$$

состоящей из бесспиновой частицы массы $m=1$, совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $V(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, записываются в виде континуального интеграла по условной мере Винера (см. /31/, а также /24/):

$$z(x_i, x_f, T) = \int_{C_{0, x_i, T, x_f}} \exp\left\{-\int_0^T V[x(t)] dt\right\} d_w x. \quad (2)$$

Здесь и далее мы полагаем $\hbar = c = 1$. Интегрирование в (2) производится по пространству непрерывных на $[0, T]$ функций, удовлетворяющих

$$\begin{aligned} x(0) &= x_i, \\ x(T) &= x_f. \end{aligned}$$

В предположении наличия у H дискретного спектра

$$H \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

имеем

$$z(x_i, x_f, T) = \sum_n e^{-E_n T} \psi_n^*(x_i) \psi_n(x_f). \quad (3)$$

Таким образом, энергия основного состояния системы равна

$$E_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \ln z(T) \right], \quad (4)$$

где

$$z(T) = \sum_n e^{-E_n T} = \int_{-\infty}^{\infty} z(x, x, T) dx. \quad (5)$$

После соответствующей замены переменных в континуальном интеграле (см. /27a/) величина $z(x, x, T)$ записывается в виде следующего интеграла:

$$z(x, x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{C_{0,0,1,0}} \exp\left\{-T \int_0^1 V[\sqrt{T}x(t)+x] dt\right\} d_w x, \quad (6)$$

по нормированной условной мере Винера.

Пропагатор $G(\tau)$ определяется следующим образом (см. /27a/):

$$G(\tau) = \langle 0 | x(0) x(\tau) | 0 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \Gamma(\tau), \quad (7)$$

где корреляционная функция

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \langle x(0) x(\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{z(T)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \int_{C_{0,0,1,0}} \exp\left\{-T \int_0^1 V[\sqrt{T}x(t)+x] dt\right\} [\sqrt{T}x(\frac{\tau}{T})+x] d_w x. \end{aligned} \quad (8)$$

Разность энергий основного и первого возбужденного состояний системы определяется (см., напр., /9/) как

$$\Delta E = E_1 - E_0 = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \ln G(\tau). \quad (9)$$

С помощью (3) может быть найден и квадрат модуля волновой функции основного состояния системы:

$$|\Psi_0(x)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[e^{E_0 T} \cdot z(x, x, T) \right]. \quad (10)$$

В случае, когда $V(x)$ является ограниченной периодической функцией (для определенности - с периодом 2π) на $x \in (-\infty, \infty)$, анализ гамильтониана (1) сводится /32/ к изучению

$$H(\theta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_\theta + V. \quad (11)$$

Здесь $\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_\theta$ есть оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ на $L^2[0, 2\pi]$ с граничными условиями вида

$$\Psi(2\pi) = e^{i\theta} \Psi(0); \quad \Psi'(2\pi) = e^{i\theta} \Psi'(0),$$

θ - фиксированный параметр, $|\theta| \leq \pi$. Согласно теореме Блоха (см., напр., /33/), если $\Psi(x)$ является собственной функцией гамильтониана (11) с периодическим $V(x)$, то

$$\Psi(x+2\pi) = e^{i\theta} \Psi(x). \quad (12)$$

Таким образом, в этом случае имеем

$$z(x, x+2\pi N, T) = e^{i\theta N} z(x, x, T). \quad (13)$$

Произведя преобразование, устраняющее фазовый множитель (см. /4, I2/)

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-i(x/2\pi)\theta} \Psi(x),$$

получаем, что формула (2) сохраняет свое значение после замены действия новым (" θ -действие") /4/:

$$S_\theta = S - i\theta Q, \quad (14)$$

где Q - топологический заряд. Определение топологического заряда в рассматриваемом случае следует из (13) (ср. с [6, 12]):

$$Q(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \dot{x} dt = \left[\frac{x}{2\pi} \right], \quad (15)$$

$(x(0)=x; \quad x(T) = x \bmod 2\pi)$

где $[]$ обозначает целую часть числа.

2. Туннелирование в двугорбом потенциале

Рассмотрим основное состояние квантовомеханической системы, описываемой гамильтонианом (1) с потенциалом

$$V(x) = \lambda(x^2 - f^2)^2, \quad (16)$$

имеющим минимумы в $\pm f$. Благодаря наличию туннелирования волновая функция основного состояния является четной суперпозицией волновых функций в каждой из ям. Основным эффектом, вызываемым инстантонами, является расщепление энергетических уровней (двукратно вырожденных в предположении отсутствия инстантонов). В приближении разреженного инстантонного газа [6] энергия основного состояния системы равна

$$E_0 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \cdot \frac{\omega}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}}, \quad (17)$$

где $\omega^2 = 8\lambda f^2$.

При этом корреляционная функция ведет себя [8] как

$$\Gamma(\tau) = \langle x(0)x(\tau) \rangle = f \exp\left(-\frac{dn}{d\tau_0} \tau\right),$$

где $\frac{dn}{d\tau_0} = \omega \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \cdot \exp\left(-\frac{\omega^3}{12\lambda}\right)$ (18)

- плотность инстантонов. Таким образом, согласно (7), (9) разность энергий основного и первого возбужденного состояний равна

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{dn}{d\tau_0} \quad (19)$$

в приближении разреженного инстантонного газа.

Для численных расчетов по ряду причин нам было удобно зафиксировать в (16) значение λ равным 0,5 и исследовать зависимость величин от f^2 (при желании зависимость от λ может быть получена с помощью соответствующей замены переменных). После некоторых преобразований для континуального интеграла (6) получаем следующее выражение:

$$Z(x, X, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{T}{2} (x^2 - f^2)^2\right\} \times \quad (20)$$

$$\times \int_{C_{0,0,1,0}} \exp\left\{-\int_0^T [c_1 x(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + c_4 x^4(t)] dt\right\} d_w x,$$

где

$$c_1 = 2XT \sqrt{T} (x^2 - f^2), \quad (21)$$

$$c_2 = T^2 (3x^2 - f^2),$$

$$c_3 = 2XT^2 \sqrt{T},$$

$$c_4 = \frac{1}{2} T^3.$$

В [27a] нами было показано, что для гармонического осциллятора хорошие приближения результатов к теоретическим значениям могут быть получены уже при $T \approx 5$. С учетом этого обстоятельства мы произведем расчеты при значениях T того же порядка. Для вычисления континуального интеграла (20) воспользуемся составной приближенной формулой, точной для функциональных многочленов степени $\leq 2m+1$ [26]:

$$\int_{C_{0,0,1,0}} F[x] d_w x \approx (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k^2\right\} \frac{1}{2^m} \times \quad (22)$$

$$\times \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\rho^{(m)}(v, \cdot) - \rho_n^{(m)}(v, \cdot) + \Psi_n(u, \cdot)] dv du,$$

где $\rho^{(m)}(v, t) = \sum_{i=1}^m c_i^{(m)} \rho(v_i, t); \quad \rho(w, t) = \begin{cases} -t \text{Sign} w, & t \leq |w|, \\ (1-t) \text{Sign} w, & t > |w|; \end{cases}$

$$\{c_i^{(m)}\}^2 - \text{корни многочлена} \quad Q_m(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{m-k}}{k!};$$

$$\rho_n^{(m)}(v, t) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \text{Sink}\pi t \sum_{i=1}^m c_i^{(m)} \text{Sign} v_i \cdot \text{Cosk}\pi v_i;$$

$$\Psi_n(u, t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} u_k \text{Sink}\pi t.$$

Результаты вычисления E_0 согласно (4)-(5) с помощью приближенной формулы (22) при $n=m=1$ показаны на рис. 1 сплошными кружками. Счетное время для каждого значения f^2 составило порядка 10 с на ЭВМ СРС-6500. Сплошная линия обозначает "точный" результат, полученный в [34]. Светлыми кружками представлены результаты [8] вычисления E_0 .

на решетке методом Монте-Карло. Квадратиками показаны результаты, полученные в^{/9/} на решетке с числом узлов $n = 303$ и шагом $a = 0,25$ при вычислении N -кратного интеграла путем усреднения по 10 монте-карловским итерациям. Поскольку в^{/8,9/} принято $m = 0,5$; $\lambda = 1$, результаты этих работ для сравнения с нашими разделены на 2. Пунктирной линией на рис.1 изображено значение E_0 , полученное в приближении разреженного инстантонного газа согласно (17). Следует обратить внимание на некоторые неточности в графическом представлении результатов^{/9/}, допущенные в работах^{/7,8/}. Счетное время и ЭВМ, на которой производились расчеты, в^{/7-9/} не указаны; результаты вычислений приведены в виде графиков. Из рис.1 следует, что результаты, полученные с помощью (22), по точности не хуже, а в некоторых случаях и лучше, чем в методе Монте-Карло, хотя кратность вычисляемых интегралов у нас на два порядка меньше.

Перейдем теперь к вычислению пропагатора $G(\tau)$ и разности энергий $\Delta E = E_1 - E_0$. В соответствии с (7), (8)

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot z_1(x, x, T) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} z(x, x, T) dx} \quad (23)$$

где $z(x, x, T)$ определяется согласно (20),

$$z_1(x, x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{T}{2}(x^2 - f^2)^2\right\} \times \int_0^1 \exp\left\{-\int_0^1 [c_1 x(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + c_4 x^4(t)] dt\right\} \left\{\left(\frac{x}{T}\right) + x\right\} d_w x; \quad (24)$$

коэффициенты $c_{0,0,0,1,0}$ соответствуют (21). Вычисляя континуальные интегралы (20) и (24) с помощью приближенной формулы (22) с $n=m=1$ и находя логарифмическую производную $G(\tau)$, мы определяем величину ΔE в соответствии с (9). Результаты наших расчетов показаны точками на рис.2. Кругами и квадратиками обозначены результаты работ^{/8/} и^{/9/} соответственно. Сплошная линия представляет собой "точный" результат^{/34/}, пунктирная - приближение разреженного инстантонного газа (18)-(19).

Квадрат модуля волновой функции основного состояния, вычисленный нами согласно (10) с помощью формулы (22) при $n=m=1$, $\tau = 4,5$; $f^2 = 2$, приведен на рис.3 крестиками. Точками показаны результаты^{/9/}, полученные на решетке с числом узлов $n = 200$ и шагом $a = 0,25$ путем усреднения по 100 монте-карловским итерациям. Звездочками обозначены значения

$$|\Psi_0(\pm f)|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2f}{\pi}}$$

получаемые в приближении разреженного инстантонного газа^{/6/}. Сплошная и пунктирная линии соединяют точки для удобства восприятия.

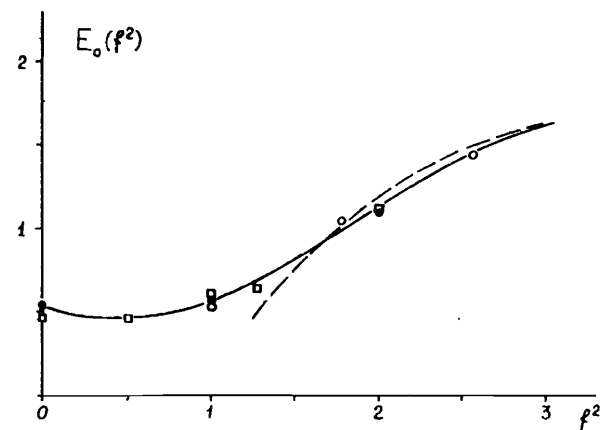


Рис.1

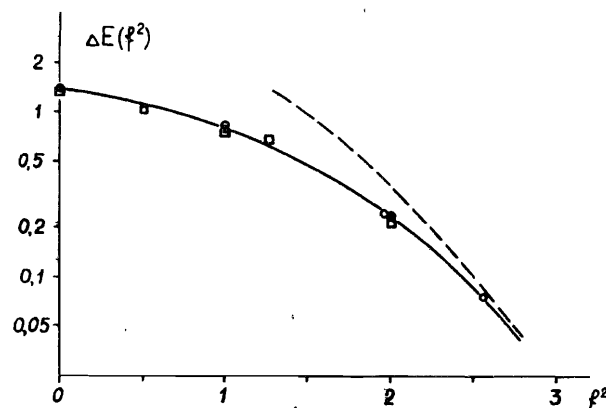


Рис.2

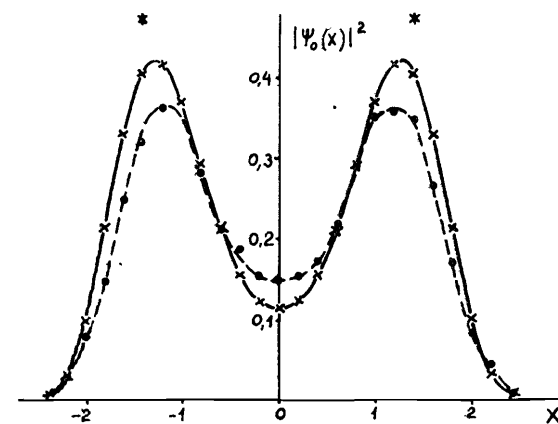


Рис.3

3. Квантовый маятник

Рассмотрим теперь квантовомеханическую систему, описываемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \lambda p^2 + V(x) \quad (25)$$

где

$$V(x) = \frac{\omega^2}{\lambda} (1 - \cos x) \quad (26)$$

ω - частота малых осцилляций, λ - константа связи. Вычисляя величину $Z(T)$ в виде

$$Z(T) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, T) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} Z(x, x, T) dx + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi(n-1)}^{2\pi n} Z(x, x, T) dx \quad (27)$$

после замены переменных $x = \bar{x} + 2\pi n$ с учетом (13) мы получаем

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta n} \int_0^{2\pi} Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, T) d\bar{x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta n} \int_{-2\pi}^0 Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, T) d\bar{x} \quad (28)$$

где

$$Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, T) = \frac{e^{-\frac{\omega^2 T}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{T}}} e^{-2\pi \frac{2\lambda}{T} n^2} \exp\left\{\frac{\omega^2 T}{\lambda} \int_0^1 \cos\left[\sqrt{\frac{T}{\lambda}} x(t) + 2\pi n t + \bar{x}\right] dt\right\} d_{w^*} x \quad (29)$$

Таким образом,

$$Z(T) = \frac{e^{-\frac{\omega^2 T}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{T}}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi \frac{2\lambda}{T} n^2} \left[e^{i\theta n} z_n(T) + e^{-i\theta n} z_{-n}(T) \right] d_{w^*} x \quad (30)$$

где

$$z_n(T) = \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{T}}} [I_n(x, T) + I_n(-x, T)] dx \quad (31)$$

$$I_n(x, T) = \int_{C_{0,0,1,0}} \exp\left\{-\frac{\omega^2 T}{\lambda} \int_0^1 \cos\left[\sqrt{\frac{T}{\lambda}} x(t) + 2\pi n t + x\right] dt\right\} d_{w^*} x \quad (32)$$

Используя свойство четности косинуса и свойство континуального интеграла $\int_{C_{0,0,1,0}} F[x(\cdot)] d_{w^*} x = \int_{C_{0,0,1,0}} F[-x(\cdot)] d_{w^*} x$, мы получаем

$$I_n(x, T) = I_n(-x, T)$$

Следовательно,

$$z_n(T) = z_{-n}(T)$$

и

$$Z(T) = \frac{2e^{-\frac{\omega^2 T}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{T}}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \theta n \cdot e^{-2\pi \frac{2\lambda}{T} n^2} \cdot z_n(T) \quad (33)$$

Для приближенного вычисления $I_n(x, T)$ мы будем пользоваться "элементарной формулой" (см. [27]):

$$\int_{C_{0,0,1,0}} F[x] d_{w^*} x \approx \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\rho^{(m)}(v, \cdot)] dv_1 \dots dv_m \quad (34)$$

где $\rho^{(m)}(v, t)$ имеет то же значение, что и в (22). Применяя (30), мы, в частности, получаем, что $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\pi$, то есть ряд (29) хорошо сходится.

Аналогично расчетам, приведенным в предыдущем разделе, при исследовании зависимости топологической восприимчивости от параметра $\nu = \frac{\omega}{\lambda}$ мы зафиксировали значение $\lambda = 1$. Результаты вычисления величины

$$\frac{1}{T_0} \langle Q^2 \rangle \quad (35)$$

где

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{Z(T)} \cdot \frac{2e^{-\frac{T\omega^2}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\lambda}{T}}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \theta n \cdot n^2 \cdot e^{-2\pi \frac{2\lambda}{T} n^2} z_n(T) \quad (36)$$

с помощью (30) при $m=1$, $T_0=7$, $\theta=0$ показаны точками на рис. 4 в логарифмическом масштабе. Расчеты показали, что для достижения точности в виде трех верных знаков в (31) достаточно трех-четырех членов ряда, то есть основной вклад в (31) дают члены с $n < 5$. Счетное время на ЭВМ ссс-6500 составило ≈ 10 с на точку в. Крестиками на рис. 4 показана зависимость от ν величины

$$\frac{1}{\epsilon N} \langle Q^2 \rangle \quad (37)$$

полученной в [12] методом Монте-Карло на решетке с $N = 100$, $\epsilon = \omega a = 1$ (N - число узлов, a - шаг решетки). Сплошной линией при $\nu > 0,5$ изображено приближение разреженного инстантонного газа [12]:

$$\frac{1}{T_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\nu} e^{-8\nu} \left[1 - \frac{7}{64} \nu^{-1} - \dots \right] \quad (38)$$

Кривая при $\nu < 0,5$ представляет собой высокотемпературное разложение [12] в континуальном пределе ($\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, ϵN фиксировано):

$$\frac{1}{T_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \nu} \quad (39)$$

Для более точного сравнения величины $\langle Q^2 \rangle$ с теоретическим предсказанием рассмотрим величину

$$D = \frac{1}{T_0} \langle Q^2 \rangle \cdot \nu^{-1/2} e^{8\nu} \quad (40)$$

Очевидно, что в континуальном пределе (при этом $s=8$) и при достаточно больших ν (полуклассическая область) должно выполняться

$$D = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \approx 4,51. \quad (33)$$

Результаты наших расчетов показаны точками на рис.5, они хорошо согласуются с (33). Крестиками обозначены результаты $\sqrt{12}$, полученные при $\varepsilon = 1$, $n=100$, $s=7,87$ (действие для инстантона на такой решетке). Отличие результатов $\sqrt{12}$ от теоретического предсказания (33) не объясняется наличием фактора двухпетлевой поправки в квадратных скобках (32). Таким образом, строго говоря, из этих результатов нельзя сделать вывод о справедливости приближения разреженного инстантонного газа. Для прояснения ситуации в работе $\sqrt{12}$ были проведены также расчеты при $\varepsilon = 0,6$ (в точке $\beta = 0,7$) и при этом получено $D = 3,3$, то есть больше, чем при $\varepsilon = 1$, но все равно меньше теоретической оценки. Дальнейшее уменьшение ε в $\sqrt{12}$ не производилось вследствие возникающих при этом трудностей, связанных с возрастанием размеров инстантонов. Ясно, что у нас подобных проблем не возникает, расчеты ведутся на континуальном уровне, $\varepsilon = 0$.

Путем определения параметров методом наименьших квадратов из соотношения

$$\ln \left[\frac{1}{T_0} \langle Q^2 \rangle \right] = \ln D - s\beta + p \ln \beta$$

в работе $\sqrt{12}$ с $s = 7,87$ было получено

$$D = 2,98 ; \quad p = 0,46 .$$

С учетом $s=8$ в континуальном пределе согласно полученным нами значениям, показанным точками на рис.5, мы имеем

$$D = 4,25 ; \quad p = 0,493 ,$$

что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями (в континуальном пределе теоретический результат $p = 0,5$).

Вычислим теперь величину энергии вакуума. Вследствие инстантонных эффектов энергия основного состояния E размывается в зону и характеризуется нарушающим sp -инвариантность углом θ . Значения $E(\theta)$, полученные в соответствии с

$$E(\theta) = - \frac{1}{T} \ln Z(T) ; \quad \omega = t ; \quad \nu = \frac{1}{\lambda}$$

с помощью приближенной формулы (30) с $m=1$, показаны на рис.6 для $\beta=1$, $T=8,6$ и $\beta=1,2$, $T=5,15$ точками и квадратиками соответственно. Сплошными линиями представлены теоретические оценки, получаемые в приближении разреженного инстантонного газа $\sqrt{12}$:

$$E(\theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 4} \beta^{-1} - \frac{1}{32 \cdot 16} \beta^{-2} - \dots \right) - \cos \theta \cdot \frac{8}{\sqrt{\pi}} \beta^{-1/2} e^{-8\beta} \left[1 - \frac{7}{64} \beta^{-1} - \dots \right] .$$

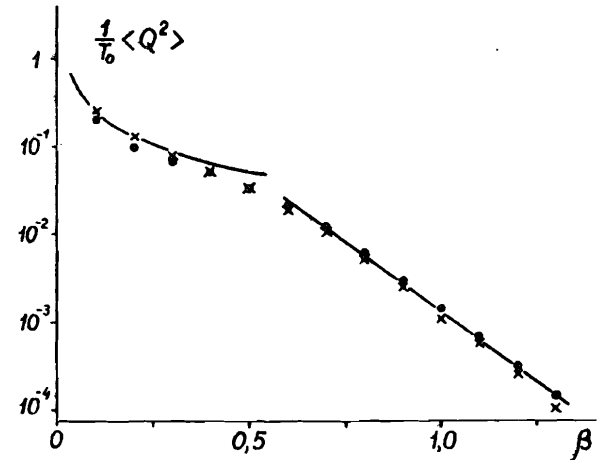


Рис.4

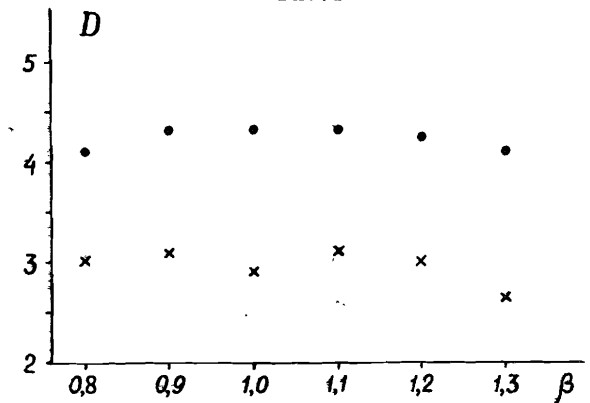


Рис.5

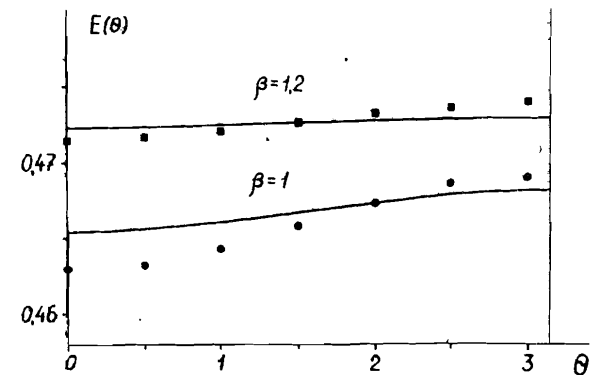


Рис.6

Характерная косинусоидальная зависимость наших результатов хорошо прослеживается на этом рисунке.

4. Выводы

Таким образом, проведенные нами расчеты подтверждают справедливость приближения разреженного инстантонного газа и позволяют исследовать границы применимости этого приближения. Проведение вычислений на континуальном уровне позволило получить более точные результаты, чем были получены путем расчетов методом Монте-Карло на решетке, при этом в используемом нами подходе не возникает ряда проблем, связанных с конечностью шага решеточной дискретизации. На простых моделях квантовой механики мы продемонстрировали эффективность метода, основанного на вычислении винеровских интегралов с помощью построенных приближенных формул. Для использования метода в задачах квантовой теории поля необходима дальнейшая работа в области теории меры в континуальном интеграле и построение приближенных формул.

Литература

1. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. "Наука", М., 1978.
2. Callan C.G., Dashen R.F., Gross D.J. a) Phys. Lett., 1976, v.63B, No3, p.334; b) Phys. Lett., 1977, v.66B, No4, p.375; c) Phys. Rev., 1978, v.17D, No10, p.2717.
3. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. Изд. Моск. ун-та, М., 1986.
4. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля. "Мир", М., 1985.
5. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S. Phys. Lett., 1975, v.59B, p.85.
Polyakov A.M. Phys. Lett., 1975, v.59B, p.82.
6. Coleman S. In: "the Why's of Subnuclear Physics", Plenum Press, N.Y., 1979, p.805.
Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А. УФН, 1982, т.136, № 4, с.553.
Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. "Мир", М., 1985.
7. Shuryak E.V. a) Phys.Rep., 1984, v.115, No4,5, p.151; b) INP, 84-157, Novosibirsk, 1984; в) INP,85-71, Novosibirsk, 1985.
8. Shuryak E.V., Zhironov O.V. Nucl. Phys., 1984, B242, p.393.
9. Creutz M., Freedman B. Ann. of Phys., 1981, 132, p.427.
10. Berg V., Lüscher M. Nucl. Phys., 1981, B190, No2, p.412.

11. Lüscher M. a) Nucl. Phys., 1982, B205, No3, p.483; b) Comm. Math. Phys., 1982, v.85, No1, p.39.
12. Bunk V., Wolff U. Nucl. Phys., 1983, B215, No4, p.495.
13. Махалдиани Н.В., Мюллер-Пройскер М. Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, № 9, с.440.
14. Woit P. Phys. Rev. Lett., 1983, v.51, No8, p.638.
15. Polonyi J. a) ILL-(TH)-83-3, Urbana, 1983; b) Phys. Rev., 1984, D29, No4, p.716.
16. Fox I.A. et al. Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, No8, p.749.
17. Veneziano G. Nucl. Phys., 1979, B159, p.213.
Di Vecchia P. et al. Nucl. Phys., 1981, B181, p.318.
Narisop S. CERN, TH-3796, Geneva, 1984.
18. Teper M. RAL-85-089, Chilton, 1985.
19. Bhanot G. et al. Nucl. Phys., 1984, B230, p.291.
20. Iwasaki Y., Yoshie T. Phys. Lett., 1984, v.143B, p.449.
21. Dyakonov D.I., Petrov V.Yu. Nucl. Phys., 1984, B245, No2, p.259.
22. Zinn-Justin J. J.Math.Phys., 1984, v.25, No3, p.549.
23. Damburg R., Propin R., Martyschenko V. J.Phys. A:Math. Gen., 1984, v.17, No18, p.3493.
24. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. "Мир", М., 1984.
25. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. "Наука и техника", Минск, 1985.
26. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В.
а) ОИЯИ, PII-83-867, Дубна, 1983;
б) в сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, № 4-84, Дубна, 1984, с.28;
в) ОИЯИ, PII-84-775, Дубна, 1984.
27. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В.
а) ОИЯИ, PII-85-764, Дубна, 1985;
б) ОИЯИ, PII-85-765, Дубна, 1985.
28. Laursen M.L., Schierholz G., Wiese U.-J. DESY, 85-062, Hamburg, 1985.
Göckeler M. et al. DESY, 85-142, Hamburg, 1985.
29. Jackiw R., Rebbi C. Phys. Rev. Lett., 1976, v.37, No3, p.172.
30. Stone M. Phys. Rev., 1978, D18, No12, p.4752.
31. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. "Мир", М., 1965.
32. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.4. "Мир", М., 1982.
33. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. "Мир", М., 1974.
34. Blankenbecler R. et al. Phys. Rev., 1980, D21, p.1055.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
D11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
D7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
D2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
D13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
D2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
п1 2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
D17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
D10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
D4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
D11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
D13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю.

P2-86-433

Расчет топологических эффектов в калибровочных теориях на основе приближенного вычисления винеровских интегралов. Модели квантовой механики

На моделях квантовой механики рассматривается вычисление характеристик топологических эффектов на континуальном уровне без решеточной дискретизации. Интегралы по условной мере Винера вычисляются с помощью приближенных формул, точных на классе функциональных многочленов заданной степени. Для одномерного двугорбого потенциала вычислены значения E_0 , E_1 энергий основного и первого возбужденного состояний и квадрат модуля волновой функции основного состояния $|\Psi_0(x)|^2$. В случае периодического потенциала /квантовый маятник/ вычислена топологическая восприимчивость $1/T \langle Q^2 \rangle$ и энергия θ -вакуума $E(\theta)$. Результаты находятся в хорошем согласии с приближением разреженного инстантонного газа. Приводится численное сравнение метода с методом Монте-Карло на решетке.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.

P2-86-433

Computation of Topological Effects in Gauge Theories by the Numerical Evaluation of Conditional Wiener Integrals. Quantum Mechanics Models

The characteristics of topological effects are investigated numerically on the models of quantum mechanics in the continuum without lattice discretization. The conditional Wiener integrals are computed using approximate formulae exact on the class of polynomial functionals of a given degree. For the one-dimensional double-well potential the values E_0 , E_1 of the ground and first excited state energies and the amplitude of the ground state wave function squared $|\Psi_0(x)|^2$ are calculated. In the case of periodic potential (the quantum pendulum) the topological susceptibility $1/T \langle Q^2 \rangle$ and the θ -vacuum energy $E(\theta)$ are obtained. The results are in good agreement with the dilute instanton gas approximation. Numerical comparison with the Monte Carlo method on lattice is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986