

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-86-393

Л.С.Давтян, Г.С.Погосян\*, А.Н.Сисакян,  
В.М.Тер-Антонян\*

О СКРЫТОЙ СИММЕТРИИ  
ОДНОМЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА

Направлено в "Journal of Physics A"

\* Ереванский государственный университет

1986

## 1. Введение

Задача об одномерном атоме водорода ( $1H$ ), т.е. квантовой системе с гамильтонианом  $\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{|x|}$ , возникла при изучении поведения атома водорода в сильном магнитном поле. Строгий анализ  $1H$  в координатном представлении был предпринят в работе /1/. Там же было доказано два специфических свойства: а/ у  $1H$  не существует нормального состояния с конечной энергией, т.е. имеет место падение на центр; б/ дискретный спектр  $1H$  двукратно вырожден. Последнее свойство противоречит общепринятому утверждению о невырожденности дискретного спектра при одномерном движении /2/. Математическая причина двукратной вырожденности спектра заключается в том, что нули волновых функций совпадают с особенностью потенциала. Здесь мы хотим подчеркнуть, что это вырождение может быть объяснено и более привычным образом, а именно механизмом скрытой симметрии  $O(2)$  в дискретном спектре. К этому выводу приводит метод, разработанный Фоком /3/ полвека назад для атома водорода и во многом определивший более поздние состояния теории систем со скрытой симметрией /4/.

## 2. Импульсное представление

Стационарные состояния  $1H$  описываются уравнением Шредингера  $\hbar = \mu = e = 1$

$$\Psi''(x) + 2\left(E + \frac{1}{|x|}\right)\Psi(x) = 0. \quad /1/$$

Умножим уравнение /1/ на  $|x|$  и совершим Фурье-преобразование:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} a(p) dp.$$

Тогда, учитывая формулу /5/

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-iqx} dx = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \frac{1}{q^2},$$

в которой символ *p.v.* имеет смысл главного значения, приходим к интегральному уравнению /интеграл понимается в смысле главного значения/

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'^2 - 2E}{(p' - p)^2} a(p') dp' = -2a(p). \quad /2/$$

### 3. Фоковский формализм в дискретном спектре

Рассмотрим область дискретного спектра  $E < 0$ . Обозначим  $-2E$  через  $\rho_0^2$  и перепишем уравнение /2/:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'^2 + \rho_0^2}{(p' - p)^2} a(p') dp' = -2a(p). \quad /3/$$

Введем воображаемое двухмерное пространство с декартовыми координатами  $(\eta, \xi)$  и рассмотрим в нем окружность радиуса  $\rho_0$  с центром в начале координат /см. рис. 1/. Из рис. 1 видно, что

$$\rho = \rho_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad /4/$$

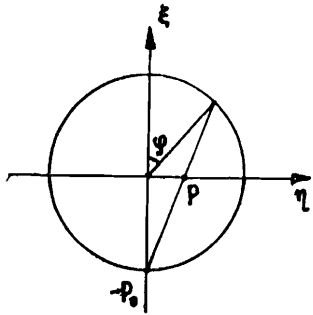


Рис. 1. Геометрическая картина стереографического проецирования в дискретном спектре.

Отображение /4/ переводит ось  $\eta$  в окружность и называется стереографической проекцией. С помощью /4/ уравнению /3/ можно придать следующий вид:

$$\frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi')}{1 - \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' = -\psi(\varphi), \quad /5/$$

где введено обозначение

$$\psi(\varphi) = (\rho^2 + \rho_0^2) a(\rho) = \frac{\rho_0^2}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} a(\rho). \quad /6/$$

Исследуем уравнение /5/. Начнем с формального разложения

$$\frac{1}{1 - \cos \gamma} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{im\gamma}. \quad /7/$$

Умножая /7/ на  $e^{-im'\gamma}(1 - \cos \gamma)$  и интегрируя по  $d\gamma$  в пределах  $(0, 2\pi)$ , легко получить трехчленное рекуррентное соотношение

$$2\delta_{m'0} = 2C_{m'} - C_{m'-1} - C_{m'+1},$$

которое вместе с условием  $C_{-m} = C_m$  приводит к формуле

$$C_m = C_0 - |m|.$$

Подчеркнем, что

$$C_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{1 - \cos \gamma}.$$

Этот интеграл расходится. Тем не менее, действуя формально и используя тождество /5/

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\gamma} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\gamma - 2\pi m),$$

имеем

$$\frac{1}{1 - \cos \gamma} = C_0 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\gamma - 2\pi m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| e^{im\gamma}.$$

Так как дальнейшее интегрирование в /5/ производится в смысле главного значения, то  $\gamma \neq 2\pi m$  и член, содержащий расходящуюся постоянную  $C_0$ , не дает вклада, т.е.

$$p.v. \frac{1}{1 - \cos \gamma} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| e^{im\gamma}.$$

Пользуясь этой формулой, легко показать, что уравнение /5/ имеет нетривиальное решение лишь при условии  $\rho_0 = 1/|m|$ , из которого получается дискретный спектр  $1H$ , установленный в /2/:

$$E_m = -\frac{1}{2m^2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad /8/$$

Из /8/ следует как наличие падения на центр, так и двукратное вырождение. Функции  $\Psi(\varphi)$  имеют вид

$$\Psi_m^{(\pm)}(\varphi) = C e^{\pm im\varphi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad /9/$$

Отметим, что уравнение /5/ инвариантно относительно "сдвига"  $\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0$ ,  $\varphi' \rightarrow \varphi' + \varphi_0$ , что, в свою очередь, говорит о присущей  $1H$  скрытой симметрии  $O(2)$ .

#### 4. Вычисление нормировочной постоянной в дискретном спектре

Постоянная в /9/ определяется из физического условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_{\rho'}^{*(\pm)}(\rho) a_{\rho_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho = \delta_{\rho_0 \rho'}. \quad /10/$$

Из формул /6/ и /9/ следует, что

$$a_{\rho_0}^{(\pm)}(\rho) = C \frac{e^{\pm \frac{2i}{\rho_0} \arctg \frac{\rho}{\rho_0}}}{\rho^2 + \rho_0^2}.$$

Учитывая соотношение

$$\frac{1}{(\rho^2 + \rho_0^2)(\rho^2 + \rho_0'^2)} = \frac{1}{(\rho_0'^2 - \rho_0^2)} \left( \frac{1}{\rho^2 + \rho_0^2} - \frac{1}{\rho^2 + \rho_0'^2} \right)$$

и замечаем, что

$$\frac{e^{\pm \frac{2i}{\rho_0} \arctg \frac{\rho}{\rho_0}}}{\rho^2 + \rho_0^2} = \pm \frac{1}{2i} \frac{d}{d\rho} \left( e^{\pm \frac{2i}{\rho_0} \arctg \frac{\rho}{\rho_0}} \right),$$

приходим к формуле

$$J_{\rho_0 \rho'}^{(\pm)} = \frac{C(\rho_0') C(\rho_0)}{\rho_0'^2 - \rho_0^2} \sin \left( \frac{\pi}{\rho_0} - \frac{\pi}{\rho_0'} \right),$$

которая вместе с условием /10/ дает

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (m)^{-3/2}.$$

#### 5. Фоковский формализм в непрерывном спектре

Перейдем к обсуждению непрерывного спектра  $E > 0$ . Введем обозначения  $\rho^2 = 2E$  и перепишем уравнение /2/ в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho'^2 - \rho^2}{(\rho' - \rho)^2} a(\rho') d\rho' = -2a(\rho). \quad /11/$$

Рассмотрим в двумерном пространстве  $(\eta, \xi)$  гиперболу

$$\xi^2 - \eta^2 = \rho_0^2, \quad \xi = \pm \sqrt{\rho_0^2 + \eta^2}. \quad /12/$$

Существуют два режима стереографического проецирования, в зависимости от этого  $\rho \in (-\rho_0, \rho_0)$  или  $\rho \in ]-\infty, -\rho_0; \rho_0, \infty[$ . Обозначим первую из областей через  $\mathcal{D}_{in}$ , вторую - через  $\mathcal{D}_{out}$ . Для  $\rho \in \mathcal{D}_{in}$  картина проецирования дается рис. 2. Область  $\mathcal{D}_{in}$  отображается в верхнюю ветвь гиперболы /12/. Из рис. 2 следует, что вне зависимости от знака  $\rho$  справедливо соотношение

$$\rho = \frac{\rho_0 \eta}{\xi + \rho_0}, \quad \rho \in \mathcal{D}_{in}. \quad /13/$$

Удобно перейти к переменной  $\mu$   $-\infty < \mu < \infty$ , т.е. записать уравнение верхней гиперболы в параметрическом виде:

$$\eta = \rho_0 \operatorname{sh} \mu, \quad \xi = \rho_0 \operatorname{ch} \mu.$$

Тогда отображение /13/ примет компактный вид:

$$\rho = \rho_0 \operatorname{th} \frac{\mu}{2}, \quad \rho \in \mathcal{D}_{in}. \quad /14/$$

Область  $\mathcal{D}_{out}$  преобразуется в нижнюю ветвь гиперболы. В этом случае картина стереографического проецирования определяется рис. 3, из которого следует связь

$$\rho = \frac{\rho_0 \eta}{\xi + \rho_0}, \quad \rho \in \mathcal{D}_{out}. \quad /15/$$

Формулы /13/ и /15/ отличаются тем, что в первой из них  $\xi > \rho_0$ , а во второй  $\xi < -\rho_0$ . В /15/ удобна параметризация  $-\infty < \mu < \infty$

$$\eta = \rho_0 \operatorname{sh} \mu, \quad \xi = -\rho_0 \operatorname{ch} \mu.$$

На языке переменной  $\mu$  уравнение нижней ветви гиперболы имеет вид

$$\rho = -\rho_0 \operatorname{cth} \frac{\mu}{2}, \quad \rho \in \mathcal{D}_{out}. \quad /16/$$

С помощью отображений /14/ и /15/ легко показать, что уравнение /II/ распадается на систему двух интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\mu') d\mu'}{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu' - \mu}{2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\mu') d\mu'}{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu' - \mu}{2}} = \frac{4\pi}{\rho_0} A(\mu), \quad /17/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\mu') d\mu'}{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu' - \mu}{2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\mu') d\mu'}{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu' - \mu}{2}} = \frac{4\pi}{\rho_0} B(\mu), \quad /18/$$

в которых

$$A(\mu) = \frac{a(\rho_0 \operatorname{th} \frac{\mu}{2})}{\operatorname{ch}^2 \frac{\mu}{2}}, \quad B(\mu) = \frac{a(-\rho_0 \operatorname{cth} \frac{\mu}{2})}{\operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2}}. \quad /19/$$

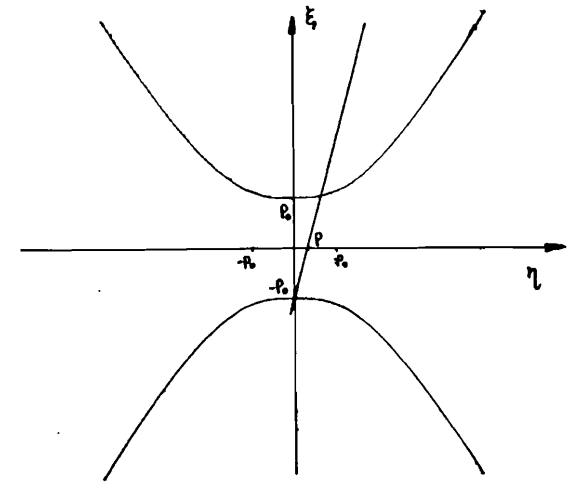


Рис. 2. Отображение области значений импульса  $\rho$  на верхнюю ветвь гиперболы  $\xi^2 - \eta^2 = \rho_0^2$ .

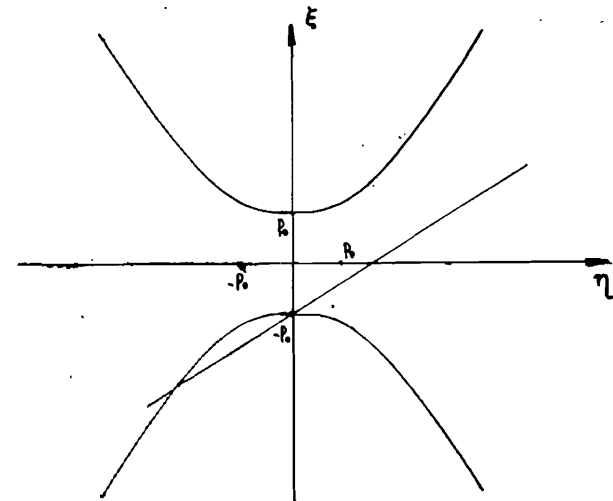


Рис. 3. Отображение области значений импульса  $\rho$  на нижнюю ветвь гиперболы  $\xi^2 - \eta^2 = \rho_0^2$ .

Уравнения /17/ и /18/ инвариантны относительно трансляций  $\mu' \rightarrow -\mu' + \mu_0$ ,  $\mu \rightarrow \mu + \mu_0$ , что указывает на наличие группы скрытой симметрии.

Займемся решением системы /17/, /18/. Здесь нам понадобятся два интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\mu} d\mu}{\operatorname{ch}^2 \mu} = \frac{\pi q}{\operatorname{sh} \frac{\pi q}{2}}, \quad /20/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq\mu} d\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu} = -\pi q \operatorname{cth} \frac{\pi q}{2}. \quad /21/$$

Первый интеграл взят из справочника /6/, второй можно вычислить, пользуясь формулой /7/

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ibz} dz}{\operatorname{sh} z + \operatorname{sha}} = -\frac{i\pi e^{iab} (\operatorname{ch} \pi b - e^{-2iab})}{\operatorname{sh} \pi b \operatorname{cha}}.$$

Разложим теперь функции  $A(\mu)$  и  $B(\mu)$  в интегралы Фурье:

$$A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\tau\mu} d\tau, \quad B(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) e^{i\tau\mu} d\tau.$$

Подставляя эти разложения в уравнения /17/ и /18/ и пользуясь формулами /20/ и /21/, приходим к системе однородных уравнений, из которой заключаем, что  $\tau$  может принимать лишь два значения  $\tau = \pm \frac{1}{P_0}$ , а функции  $A$  и  $B$  имеют следующий вид:

$$A_{P_0}^{(\pm)}(\mu) = C e^{\pm i\frac{\mu}{P_0}},$$

$$B_{P_0}^{(\pm)}(\mu) = -C e^{\mp i\frac{\mu}{P_0}}.$$

Переходя согласно /19/ к исходным волновым функциям  $a(\rho)$ , получим

$$a^{(\pm)}(\rho_0 \operatorname{th} \frac{\mu}{2}) = C \operatorname{ch}^2 \frac{\mu}{2} e^{\pm i\frac{\mu}{P_0}},$$

$$a^{(\pm)}(-\rho_0 \operatorname{cth} \frac{\mu}{2}) = -C \operatorname{sh}^2 \frac{\mu}{2} e^{\mp i\frac{\mu}{P_0}}.$$

Эти же функции можно выразить через переменную  $\rho$ :

$$a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) = \begin{cases} \frac{C P_0^2}{P_0^2 - \rho^2} e^{\pm \frac{2i}{P_0} \operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0}}, & |\rho| < P_0, \\ \frac{C P_0^2}{P_0^2 - \rho^2} e^{\mp \frac{2i}{P_0} \operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0}}, & |\rho| > P_0. \end{cases}$$

В точках  $\rho = \pm P_0$  функции  $a_{P_0}^{(\pm)}(\rho)$  не определены.

#### 6. Вычисление нормировочной постоянной в непрерывном спектре

Примем для определенности, что  $P_0' > P_0$ , и разобьем область значений  $\rho$  на пять подобластей:  $E_1 = (-\infty, -P_0')$ ,  $E_2 = (-P_0', P_0)$ ,  $E_3 = (-P_0, P_0)$ ,  $E_4 = (P_0, P_0')$ ,  $E_5 = (P_0', \infty)$ . В области  $E_3$

$$\int_{E_3} a_{P_0'}^{*(\pm)}(\rho) a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho = \lim_{\lambda \rightarrow P_0} \int_{-\lambda}^{\lambda} a_{P_0'}^{*(\pm)}(\rho) a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho.$$

Заменяя в  $a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) \operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0}$  на  $\operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0}$  и выделяя разность  $P_0 - P_0'$ , получим

$$\int_{E_3} a_{P_0'}^{*(\pm)}(\rho) a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho = \frac{\pi C^2 P_0^3}{2} \delta(P_0' - P_0),$$

аналогично

$$\int_{E_2 + E_4} a_{P_0'}^{*(\pm)}(\rho) a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho = \lim_{\lambda_1 \rightarrow -P_0} \lim_{\lambda_2 \rightarrow P_0} \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{-\lambda_2}^{-\lambda_1} \right\} a_{P_0'}^{*(\pm)}(\rho) a_{P_0}^{(\pm)}(\rho) d\rho.$$

Учитывая, что при  $P_0' = P_0$   $\operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0} = \operatorname{arcth} \frac{\rho}{P_0}$ , легко доказать, что этот интеграл обращается в нуль. Наконец,

$$\int_{E_1 + E_5} a_{p_0}^{*(\pm)}(p) a_{p_0}^{(\pm)}(p) dp = \frac{\pi c^2 p_0^3}{2} e^{\frac{2E}{p_0}} \delta(p_0' - p_0),$$

и потому, собирая все формулы, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_{p_0}^{*(\pm)}(p) a_{p_0}^{(\pm)}(p) dp = \frac{\pi c^2 p_0^3}{2} (1 + e^{\frac{2E}{p_0}}) \delta(p_0' - p_0).$$

Выберем условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_{p_0}^{*(\pm)}(p) a_{p_0}^{(\pm)}(p) dp = 2\pi \delta(p_0' - p_0).$$

Тогда постоянная  $C$  будет равна

$$C = \frac{2}{p_0^{3/2} \sqrt{1 + e^{\frac{2E}{p_0}}}}.$$

### 7. Случай $E = 0$

Остановимся специально на случае  $E = 0$ . Уравнение /2/ при этом принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'^2}{(p' - p)^2} a(p') dp' = -2a(p).$$

Здесь вместо стереографического проецирования делаем замену  $\xi = \frac{2}{p}$  и приходим к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi') d\xi'}{(\xi' - \xi)^2} = -\frac{\pi}{2} \psi(\xi),$$

в котором

$$\psi(\xi) = \frac{a(p)}{\xi^2}.$$

Из формулы /5/

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2} dx = -\pi|2|$$

следует, что уравнение /22/ имеет решения

$$\psi^{(\pm)}(\xi) = c e^{\pm i\frac{\xi}{2}},$$

и, следовательно,

$$a_0^{(\pm)}(p) = c \frac{e^{\pm i\frac{2}{p}}}{p^2}.$$

### 8. Заключение

Итак, нами получено уравнение Шредингера для  $1H$  в импульсном представлении, дан анализ стереографического проецирования при  $E < 0$  и  $E > 0$ , получены уравнения Фока для  $1H$ , выявлена скрытая симметрия и найдены волновые функции в импульсном пространстве, указан метод вычисления нормировочных постоянных и рассмотрен специальный случай  $E = 0$ . Все это говорит о том, что одномерный атом водорода вписывается в известную схему /8-10/ теории скрытой симметрии водородных систем размерности  $n \geq 2$ . Единственной специфической чертой является отсутствие основного состояния с конечной энергией.

Мы благодарны С.И.Виницкому, И.В.Луценко, А.Дж.Магацян, Л.Г.Мардомян и Л.И.Пономареву за полезные обсуждения.

### Литература

1. R.London. One-Dimensional Hydrogen Atom. Amer.J.Phys., 27, No. 9, 649-655, 1959.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
3. V.A.Fock. Z. Phys., 98, 145, 1935.
4. Englfield M.J. Group Theory and the Coulomb Problem. Wiley - Interscience, New-York, Sydney, Toronto, 1972.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними, вып. I. Физматгиз, М., 1958, стр. 209.
6. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ФМЛ, М., 1963, стр. 519.
7. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. "Наука"М., 1981, стр. 367.
8. Попов В.С. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. "Наукова думка", Киев, 1967.
9. Bander M., Itzykson C. Group Theory and the Hydrogen Atom 1,2. Rev. Mod.Phys., 38, 330-345, 346-358, 1966.
10. Shibuya T., Wolfman C. The Kepler Problem in Two-Dimensional Momentum Space. Amer. J.Phys., 33, 570, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 июня 1986 года.

Давтян Л.С. и др.

P2-86-393

О скрытой симметрии одномерного атома водорода

Применен подход Фока к задаче об одномерном атоме водорода. Получены интегральные уравнения фоковского типа в дискретном и непрерывном спектре. Изучен случай нулевой энергии. Вычислены полные функции и нормировочные постоянные в импульсном представлении.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Davtyan L.S. et al.

P2-86-393

On Hidden Symmetry of a One-Dimensional Hydrogen Atom

The Fock method is applied to the problem of a one-dimensional hydrogen atom. Integral Fock equations are obtained in discrete and continuous spectra; the case of zero energy is studied; and wave functions and normalization constants are calculated in the momentum representation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986