объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-354

Н.М.Атакишиев*, Р.М.Мир-Касимов

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МОДЕЛИ ОСЦИЛЛЯТОРА

Направлено в "Journal of Physics A: Math.Gen." и в Оргкомитет IX Международного семинара по физике высоких энергий и теории поля /Протвино, июль 1986 г./

* Институт физики АН АзССР, Баку

1986

В рамках квазипотенциального подхода к проблеме двух тел [I,2] в релятивистском конфигурационном $\vec{r}$ - пространстве [3] были рассмотрены обобщенные когерентные состояния (КС) для модели линейного осциллятора [4-6]. Настоящая работа посвящена аналогичной задаче для релятивистской модели трехмерного осциллятора [7-9]. В сферической системе координат $\vec{r}=(r,\theta,\varphi)$ построен интеграл по путям [I0] для амплитуды перехода между обобщенными КС [II-I3] (более подробный список литературы приведен в [5]). Вычислена функция распределения, соответствующая радиальной части гамильтониана, и получены классические уравнения движения в обобщенном фазовом пространстве. Показано, что использование квазиклассического правила квантования Бора - Зоммерфельда приводит к точному выражению для уровней энергии рассмотренного осциллятора.

I. Вследствие O(3) - симметрии модели [7-9] зависимость волновой функции

$$\Psi_{n\ell m}(\vec{r})=r^{-1}\chi_n^{\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{I}$$

от углов θ и φ описывается сферическими гармониками $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$. Поэтому трехмерная задача сводится к нахождению собственных значений и собственных функций радиальной части гамильтониана $\tilde{H}_\ell(r)\chi_n^\ell(r)= = E_{n\ell}\,\chi_n^\ell(r)$. В обсуждаемом нами случае модель характеризуется конечно-разностным оператором

$$\tilde{H}_\ell(r)=\frac{mc^2}{2}\left\{\exp\left(-i\frac{d}{d\tilde{r}}\right)+\left[1+\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2\tilde{r}^{(2)}\right]\left[1+\frac{\ell(\ell+1)}{\tilde{r}^{(2)}}\right]\exp\left(i\frac{d}{d\tilde{r}}\right)\right\}, \tag{2}$$

где $\tilde{r}=r/\lambda$ - безразмерная переменная, $\lambda=\hbar/mc$ - комптоновская длина волны, $\exp(a\frac{d}{dx})f(x)=f(x+a)$, $x^{(\alpha)}=i^\alpha\Gamma(\alpha-ix)/\Gamma(-ix)\equiv i^\alpha(-ix)_\alpha$. Радиальная часть волновой функции (I) имеет вид

$$\chi_n^\ell(r)=N_n^\ell(-\tilde{r})^{(\ell+1)}M_\nu(\tilde{r})\,\mathcal{P}_n^{\nu;\ell}(\tilde{r}^2), \tag{3}$$

причем функции $(-\tilde{r})^{(\ell+1)}$ и $M_\nu(\tilde{r})=\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^{i\tilde{r}}\Gamma(\nu+i\tilde{r})$, $2\nu=1+\left[1+4\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2\right]^{1/2}$, определяют асимптотическое поведение $\chi_n^\ell(r)$ соответственно при $r\to 0$ и $r\to\infty$. Полиномиальная часть волновой функции $\chi_n^\ell(r)$ выражается через дуальные многочлены Хана (см. [8,9], где приведена и нормировочная константа N_n^ℓ):

$$\mathcal{P}_n^{\nu;\ell}(\tilde r^2)=(\nu+1/2)_n^{-1}\, W_n^{(0)}(-\tilde r^2-1/4;\ell+1/2,1/2-\nu).$$

Пространство квадратично-интегрируемых на $[0,\infty)$ собственных функций $\chi_n^\ell(r)$ радиальной части гамильтониана $\tilde H_\ell(r)\equiv 2\hbar\omega K_0$ представляет собой прямую сумму бесконечномерных $\tilde{SU}(1,1)$ -неприводимых подпространств $D^+(\varkappa_\ell)$ (орбитальное квантовое число ℓ фиксировано, радиальное квантовое число n = 0,1,2,...), характеризуемых собственными значениями $\varkappa_\ell=\frac{1}{2}(\nu+\ell+1)$ оператора Казимира

$$K^2=K_0^2-\frac{1}{2}\left(K_+K_-+K_-K_+\right)=\varkappa_\ell(\varkappa_\ell-1)\hat{I}.$$

Генераторы K_0, $K_\pm$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[K_-,K_+]=2K_0,\qquad [K_0,K_\pm]=\pm K_\pm$$

алгебры Ли динамической группы симметрии $\tilde{SU}(1,1)$. Они реализуются конечно-разностными операторами, и их действие на $\chi_n^\ell(r)$ задается формулами (см. /8/)

$$K_0\chi_n^\ell(r)=(n+\varkappa_\ell)\chi_n^\ell(r),\quad K_+\chi_n^\ell(r)=a_{n+1}^\ell\chi_{n+1}^\ell(r),\quad K_-\chi_n^\ell(r)=a_n^\ell\chi_{n-1}^\ell(r),$$
$$a_n^\ell=[n(n+2\varkappa_\ell-1)]^{1/2}. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\chi_n^\ell(r)=[n!(2\varkappa_\ell)_n]^{-1/2}K_+^n\chi_0^\ell(r). \qquad (5)$$

В нерелятивистском пределе $\chi_n^\ell(r)$ совпадает с радиальной частью шредингеровской волновой функции нерелятивистского трехмерного осциллятора.

2. В гильбертовом пространстве неприводимого унитарного представления $D^+(\varkappa_\ell)$ динамической группы симметрии $\tilde{SU}(1,1)$ определим волновую функцию когерентного состояния $\langle r|\zeta,\varkappa_\ell\rangle$ с помо-

щью соотношения $D(\alpha)=\exp(\alpha K_+-\alpha^*K_-)$ на $\chi_0^\ell(r)$, т.е.

$$\langle r|\zeta,\varkappa_\ell\rangle=D(\alpha)\chi_0^\ell(r)=(1-|\zeta|^2)^{\varkappa_\ell}\exp(\zeta K_+)\chi_0^\ell(r), \qquad (6)$$

где $\alpha=-\frac{\tau}{2}e^{-i\phi}$, $\zeta=-\text{th}\frac{\tau}{2}e^{-i\phi}$ (см. /II-I3/). Из (5) и (6) вытекает, что разложение $\langle r|\zeta,\varkappa_\ell\rangle$ по базисным функциям $\chi_n^\ell(r)$ имеет вид

$$\langle r|\zeta,\varkappa_\ell\rangle=(1-|\zeta|^2)^{\varkappa_\ell}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2\varkappa_\ell)_n}{n!}\right]^{1/2}\zeta^n\chi_n^\ell(r). \qquad (7)$$

Амплитуда перехода (пропагатор) между $SU(1,1)$КС определяется как сумма "парциальных" амплитуд:

$$K(\zeta',\zeta;T)=\sum_{\ell=0}^{\infty}K_\ell(\zeta',\zeta;T),$$

$$K_\ell(\zeta',\zeta;T)=\langle\zeta',\varkappa_\ell|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}T\tilde H_\ell(r)\right]|\zeta,\varkappa_\ell\rangle=\langle\zeta',\varkappa_\ell|\exp(-2i\omega TK_0)|\zeta,\varkappa_\ell\rangle. \qquad (8)$$

Используя (7), легко показать, что

$$K_\ell(\zeta',\zeta;T)=e^{-2i\omega T\varkappa_\ell}\langle\zeta',\varkappa_\ell|\zeta e^{-2i\omega T},\varkappa_\ell\rangle=e^{-2i\omega T\varkappa_\ell}\left[(1-|\zeta|^2)(1-|\zeta'|^2)\right]^{\varkappa_\ell}\left(1-\zeta\zeta'^*e^{-2i\omega T}\right)^{-2\varkappa_\ell}.$$

Функция распределения для рассматриваемой модели релятивистского осциллятора

$$Z=\text{Tr}\,K(\zeta',\zeta;-i\hbar\beta)=\left[2e^{\hbar\omega\beta}(1-e^{-\hbar\omega\beta})\,\text{sh}\,\beta\hbar\omega\right]^{-1}=e^{-(\nu-\frac{1}{2})\beta\hbar\omega}Z_{HP},$$

где Z_{HP} – функция распределения нерелятивистского трехмерного осциллятора.

3. Аналогично одномерному случаю /4,5/ каждой "парциальной" амплитуде (8) можно сопоставить интеграл по путям

$$K_\ell(\zeta',\zeta;T)=\int\mathcal{D}\rho_{\varkappa_\ell}(\zeta)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T\mathcal{L}_\ell(\zeta,\dot\zeta;\zeta^*,\dot\zeta^*)\,dt\right] \qquad (9)$$

с классической функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}_\ell(\zeta,\dot\zeta;\overset{*}{\zeta},\dot{\overset{*}{\zeta}})=\frac{i\hbar\varkappa_\ell}{1-|\zeta|^2}\left[\dot\zeta(t)\overset{*}{\zeta}(t)-\zeta(t)\dot{\overset{*}{\zeta}}(t)\right]-\mathcal{H}_\ell(\zeta,\zeta) \tag{I0}$$

в искривленном фазовом пространстве, представляющем собой плоскость Лобачевского /II-I4/. В формуле (I0) использовано обозначение

$$\mathcal{H}_\ell(\zeta,\zeta)\equiv\frac{\langle\zeta,\varkappa_\ell|\widetilde{H}_\ell(r)|\zeta,\varkappa_\ell\rangle}{\langle\zeta,\varkappa_\ell|\zeta,\varkappa_\ell\rangle}=2\hbar\omega\varkappa_\ell\frac{1+|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\ .$$

Представлению (9) соответствуют классические уравнения Лагранжа – Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\ell}{\partial\dot\zeta}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}_\ell}{\partial\zeta}\ ,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\ell}{\partial\dot\zeta^*}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}_\ell}{\partial\zeta^*}\ . \tag{II}$$

Они получаются путем вариации действия $S=\int\limits^{T}\mathcal{L}_\ell\,dt$. Если учесть, что в рассматриваемом нами случае $\mathcal{H}_\ell(\zeta,\zeta)\overset{\circ}{=}\mathcal{H}_\ell(\tau)=2\hbar\omega\varkappa_\ell\,\mathrm{ch}\,\tau$, то в терминах групповых параметров τ и ϕ уравнения (II) принимают простой вид: $\dot\tau=0$, $\dot\phi=2\omega$. Очевидно, что решениями этих уравнений являются $\tau=\mathrm{const.}$, $\phi=2\omega t+\phi_0$, т.е. движение в фазовом пространстве будет осцилляторным .

4. Для определения возможных значений энергии $E_\ell=\mathcal{H}_\ell(\tau)$ классической системы, описываемой лагранжианом (I0), выразим его через параметры τ и ϕ :

$$\mathcal{L}_\ell(\tau,\phi)=\hbar\varkappa_\ell\left[(\mathrm{ch}\,\tau-1)\dot\phi-2\omega\,\mathrm{ch}\,\tau\right]\equiv\hbar\varkappa_\ell\widetilde{\mathcal{L}}(\tau,\phi). \tag{I2}$$

Введение канонически-сопряженного "координате" ϕ импульса $\widetilde{p}=\partial\widetilde{\mathcal{L}}/\partial\dot\phi=\mathrm{ch}\,\tau-1$ позволяет представить (I2) в более компактном виде:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\tau,\phi)=\widetilde{p}\,\dot\phi-2\omega(\widetilde{p}+1).$$

Подставляя теперь (I2) в (9), мы приходим к представлению

$$K_\ell(\zeta',\zeta;T)=\int\mathcal{D}\varrho_{\varkappa_\ell}(\zeta)\exp\left[i\varkappa_\ell\int\limits_0^T\widetilde{\mathcal{L}}(\tau,\phi)dt\right]. \tag{I3}$$

Так как при $\hbar\to0$ параметр $\varkappa_\ell$, характеризующий неприводимое представление $D^+(\varkappa_\ell)$ динамической группы симметрии $SU(1,1)$, ведет себя как $\varkappa_\ell\simeq mc^2/\hbar\omega$, то из (I3) вытекает, что при достаточно больших $\varkappa_\ell$ движение становится квазиклассическим(ср. с /I3/). Поэтому при $\varkappa_\ell\to\infty$ мы можем воспользоваться правилом квантования Бора – Зоммерфельда:

$$\oint\widetilde{p}\,d\phi=\frac{2\pi}{\varkappa_\ell}\,n\ ,\qquad n=0,1,2,\dots\ ,$$

из которого следует, что импульс $\widetilde{p}=n/\varkappa_\ell$. Следовательно, энергия рассматриваемой системы

$$E_\ell=\mathcal{H}_\ell(\tau)=2\hbar\omega\varkappa_\ell\,\mathrm{ch}\,\tau=2\hbar\omega\varkappa_\ell(\widetilde{p}+1)=2\hbar\omega(n+\varkappa_\ell)\ . \tag{I4}$$

Таким образом, как и в нерелятивистском случае, квазиклассическое правило квантования Бора – Зоммерфельда дает для уровней энергии релятивистского трехмерного осциллятора (2) выражение (I4), совпадающее с точным .

Мы благодарны В.Г. Кадышевскому, В.И. Манько и М.В. Савельеву за полезные обсуждения.

Литература

I. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, I963, 29, No 2, 380-399.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl. Phys., I968, B6, No 2, I25-I48.
3. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. Nuovo Cimento, I968, 55A, No 2, 233-257.
4. Atakishiyev N.M. Proceedings of the XVIII International Symposium (Ahrenshoop, GDR, I984). Berlin - Zeuthen, I984, PHE 84-I3, p. 56-67.
5. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М. ТМФ, I986, 67, № I, 68-75.
6. Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М., Нагиев Ш.М. ТМФ, I980, 44, № I, 47-62.

7. Донков А.Д. и др. ТМФ, 1971, 8, № 1, 61-72.

8. Atakishiyev N.M., Mir-Kasimov R.M., Nagiyev Sh. M. Annalen der Physik (Leipzig), 1985, 42, No 1, 25-30.

9. Атакишиев Н.М. ТМФ, 1984, 58, № 2, 254-260; Annalen der Physik (Leipzig), 1985, 42, No 1, 31-34.

10. Peak D., Inomata A. J. Math. Phys., 1969, 10, No.8, 1422-1428.

11. Perelomov A.M. Commun Math. Phys., 1972, 26, No 3, 222-236; УФН, 1977, 123, вып. 1,23-55.

12. Gerry C.C., Silverman S. J. Math. Phys., 1982, 23, No 11, 1995-2003.

13. Gerry C.C., Togeas J.B., Silverman S. Phys. Rev., 1983, D28, No 8, 1939-1944.

14. Berezin F.A. Commun. Math. Phys., 1975, 40, No 2, 153-174.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Атакишиев Н.М., Мир-Касимов Р.М. Р2-86-354
Обобщенные когерентные состояния
для трехмерной релятивистской модели осциллятора

Рассмотрены SU(1,1)-когерентные состояния для релятивистской модели осциллятора в конфигурационном $\vec{r}$-представлении. С помощью интеграла по путям для амплитуды перехода между SU(1,1)КС получены классические уравнения движения в обобщенном фазовом пространстве. Показано, что использование квазиклассического правила квантования Бора - Зоммерфельда приводит к точному выражению для уровней энергии.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Atakishiyev N.M., Mir-Kasimov R.M. P2-86-354
Generalized Coherent States
for a Three Dimensional Relativistic Model
of the Oscillator

The SU(1,1) coherent states for a relativistic model of the oscillator in the configurational $\vec{r}$-representation are considered. Classical equations of motion in the generalized phase space are obtained with the help of the path integral for the transition amplitude between SU(1,1)CS. It is shown that the use of the semiclassical Bohr - Sommerfeld quantization rule yields the exact expression for the energy levels.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986