сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-349

Л.Александров, Д.Караджов, П.Морозов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПИН-ЗАВИСИМЫХ СВЯЗАННЫХ КВАРК-АНТИКВАРКОВЫХ СОСТОЯНИЙ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

1986

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание масс тяжелых мезонов в Ψ- и Υ -секторе как энергии возбужденных состояний "кваркония" /связанной системы кварка и антикварка/ требует введения зависящего от спина $q\bar{q}$ -потенциала. Квазипотенциальный подход Логунова - Тавхелидзе [1-3] дает возможность для последовательного релятивистского моделирования взаимодействий спинорных частиц. Этот подход использован рядом авторов /см., например, работы [4-6]/ при анализе свойств $q\bar{q}$ -системы. При этом в качестве основных /производящих/ потенциалов чаще всего использовались модельные потенциалы из [7,8].

В [5,6] в бесспиновом приближении проведено сравнение нерелятивистской модели кваркония, основывающейся на уравнении Шредингера, и релятивистской модели, полученной на основе квазипотенциального уравнения [3]. В нерелятивистском случае был использован потенциал Ричардсона [7]:

$$V_R = \frac{8\pi}{27}[\Lambda^2 r - \frac{1 - 4I_0(\Lambda r)}{r}], \qquad /1/$$

где $\Lambda = \mathrm{const.} > 0$, а I_0 - частный случай интегралов типа

$$I_m(\Lambda r) = \int_1^\infty \frac{\mu^{m-1} e^{-\lambda\mu r}}{\pi^2 + [\ln(\mu^2 - 1)]^2} d\mu \; (m = 0,1,2,\ldots). \qquad /2/$$

В релятивистском подходе квазипотенциал строился из производящего потенциала /1/, см. работу [5], п.2, и работу [6], п.2. Сравнение обеих моделей проведено путем решения обратных задач/см. [5], п.4/ для определения "константы связи" Λ и массы кварка m по всем известным массам тяжелых $q\bar{q}$ -систем. Решение соответствующих прямых задач на собственные значения проводилось методом стержневых сплайнов [10-12].

В настоящей работе рассматривается прямая задача для описания связанных $q\bar{q}$ -состояний с учетом спиновых взаимодействий без применения теории возмущений. Известно, что если основной потенциал имеет кулоновский вид, то потенциалы уравнений для спинорных частиц в нуле сингулярны как r^{-3}. В [9] построена модель, основывающаяся на квазипотенциальном уравнении [3], с квазипотенциалом, обеспечивающим регулярное поведение асимптотических решений спиновых уравнений в окрестности нуля. В разделе 2 настоящей работы приводится полный набор уравнений, вытекающих из модели[9]; приведены спин-зависящие квазипотенциалы, отвечающие двум производящим потенциалам [7,8]. Получены асимптотические решения этих уравнений на концах полуоси $[0, \infty]$ и условия их регулярности при $r \to 0$. Методом стержневых сплайнов /раздел 3/ построены приближенные решения всего набора уравнений для связанных состояний "чармония" ($c\bar{c}$) и "боттомония" ($b\bar{b}$). Параметры производящих потенциалов определены из бесспиновой обратной задачи [6]. Полученные результаты для прямой задачи становятся основой для постановки в ближайшем будущем спиновой обратной задачи, из которой будет определен лучший производящий потенциал для моделирования взаимодействия между тяжелыми кварками.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНАЯ СПИНОВАЯ СИСТЕМА И ЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Запишем квазипотенциальное уравнение модели[9] в координатном пространстве для случая произвольных производящих потенциалов $V_0(r)$, $S_0(r)$:

$$\{\Delta + b^2 - 2EV_0(r) + V_0^2(r) - 2m_w S_0(r) - S_0^2(r) - E_1 \Delta V_0(r) + \frac{E_2}{r}\frac{d}{dr}S_0(r) - \frac{E_3}{r}\frac{d}{dr}V_0(r)(\underline{L}\cdot\underline{S}) + \frac{E_2}{r}\frac{d}{dr}S_0(r)(\underline{L}\cdot\underline{S}) - \frac{1}{3w}\Delta V_0(r)(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{\sigma}_2) - \frac{1}{6w}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)V_0(r) \times \left[(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{\sigma}_2) - \frac{3(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{r})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{r})}{r^2}\right]\}\Phi(\underline{r};w) = 0, \qquad /3/$$

где $E_1 = \frac{3w+2m}{2w(w+2m)}$, $E_2 = \frac{4m}{w(w+2m)}$, $E_3 = \frac{4(w+m)}{w(2m+w)}$. Величины $E = \frac{w^2-2m^2}{2w}$ и $b^2 = \frac{w^2-4m^2}{4}$ имеют смысл соответственно энергии и квадрата полного импульса эффективной частицы с релятивистской приведенной массой $m_w = m^2/w$. Собственное значение w - это полная энергия двух частиц в системе центра инерции. Формулы записаны в предположении, что массы двух кварков равны m.

В работе[9], п.3, приведен частный случай уравнения /3/, полученный при использовании потенциала Ричардсона /1/, то есть

$$\left.\begin{aligned} &V_0(r) = V_R(r), \\ &S_0(r) = \eta r, \quad |\eta| \geq \frac{8\pi}{27}\Lambda^2 \end{aligned}\right\}. \qquad /4'/$$

Здесь рассматриваем и второй вариант модели, основанный на

более простом "конвенциональном" потенциале[8]. В этом варианте производящие потенциалы

$$\left.\begin{aligned} &V_0(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r} + \eta\kappa r, \\ &S_0(r) = (1-\eta)\kappa r, \end{aligned}\right\} \qquad /4''/$$

которые, как и в рассмотренном выше случае, вызваны векторным /глюонным/ и скалярным, соответственно, обменом и зависят от двух параметров: $\alpha_s > 0$ - константы кулоновского взаимодействия и $\kappa > 0$ - константы линейного потенциала. Параметр η определяет части запирающего потенциала, относящиеся к векторному и скалярному обменам. Значение η определяется /см. работу[9], п.3.2/ из требования компенсации членов, пропорциональных r^2. Из этого условия следует, что $\eta = 1/2$.

По отношению к спиновым компонентам потенциалов, входящих в /3/, применяется процедура регуляризации, предложенная в работе[9]. В частности, в варианте с производящим потенциалом /4''/ пренебрегается членом контактного взаимодействия* /пропорциональный $\delta(r)$ / и членом $V_0^2(r) = 16\alpha_s^2/9r^2$. Можно считать, что первый из них не влияет существенно на связанные состояния. Второй член приводит к сингулярным в нуле при $J = 0$ волновым функциям. Его значение может оказаться сильно измененным при учете членов высших порядков по теории возмущений в квазипотенциале.

При сделанных предположениях запишем уравнение /3/ с регуляризованными квазипотенциалами в общепринятом виде:

$$\{\Delta + b^2 - V_{NS_i}(r) - V_{LS_i}(r)(\underline{L}\cdot\underline{S}) - V_{SS_i}(r)(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{\sigma}_2) - V_{T_i}(r) \times \frac{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{r})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{r})}{r^2}\}\Phi(\underline{r};w) = 0 \quad (i = 1, 2), \qquad /5/$$

где V_{NS_i} - бесспиновое, V_{LS_i} - спин-орбитальное, V_{SS_i} - спин-спиновое и V_{T_i} - тензорное взаимодействия, отмеченные индексом i : $i = 1$ соответствует производящим потенциалам /4''/, а $i = 2$ - производящим потенциалам /4'/. В явном виде имеем

* Этот член возникает из-за кулоновской части производящего потенциала /4''/. Потенциал /4'/ менее сингулярен, чем r^{-1}, из-за логарифмического фактора, учитывающего эффект поляризации вакуума, и не порождает контактного члена.

$$V_{NS_i}=\begin{cases} -\dfrac{8E\alpha_s}{3r}+\dfrac{\kappa wr}{2}+\dfrac{4\kappa\alpha_s}{3}+\dfrac{\kappa U_{11}}{2\,wr} & \text{при } i=1,\\[2ex] \dfrac{8\pi}{27}\Big[2E\dfrac{1-4I_0}{r}+\Lambda^2 wr+\dfrac{16\pi\Lambda^2}{27}(1-4I_0)-\dfrac{4\Lambda^2 m}{wZ_2} & \\ \quad -\Big(\dfrac{8\pi}{27}\Big)\Big(\dfrac{1-4I_0}{r}\Big)^2+\dfrac{\Lambda^2 U_{12}}{wr}(1+2I_2)\Big] & \text{при } i=2, \end{cases} \qquad /6/$$

$$V_{LS_i}=\begin{cases} \dfrac{16\alpha_s U_{21}}{3wr^3}+\dfrac{2\kappa}{Z_1 r} & \text{при } i=1,\\[2ex] \dfrac{32\pi}{27}\Big[\dfrac{U_{22}(1-4I_0-4\Lambda rI_1)}{wr^3}+\dfrac{\Lambda^2}{Z_2 r}\Big] & \text{при } i=2, \end{cases} \qquad /7/$$

$$V_{SS_i}=\begin{cases} -U_{31}\Big(\dfrac{2\alpha_s}{3wr^3}-\dfrac{\kappa}{4wr}\Big) & \text{при } i=1,\\[2ex] -\dfrac{4\pi U_{32}}{27w}\Big[\dfrac{1-4I_0-4\Lambda rI_1-4(\Lambda r)^2 I_2}{r^3}-\dfrac{\Lambda^2}{r}\Big] & \text{при } i=2, \end{cases} \qquad /8/$$

$$V_{T_i}=\begin{cases} U_{31}\Big(\dfrac{2\alpha_s}{wr^3}+\dfrac{\kappa}{4wr}\Big) & \text{при } i=1,\\[2ex] \dfrac{4\pi U_{32}}{27w}\Big[3\dfrac{1-4I_0-4\Lambda rI_1-\dfrac{4(\Lambda r)^2 I_2}{3}}{r^3}+\dfrac{\Lambda^2}{r}\Big] & \text{при } i=2. \end{cases} \qquad /9/$$

В выражениях /6/-/9/ использованы следующие обозначения:

$$U_{11}=\frac{3w-2m}{Z_1},\quad U_{12}=\frac{3w+2m}{Z_2},\quad U_{2i}=\frac{w+m}{Z_i},\quad U_{3i}=\frac{w+2m}{Z_i},$$

$Z_i = w+2m-2V_{0i}'$, $i = 1,2$. Квазипотенциалы в случае $i = 2$ получены при $\eta=\frac{8\pi}{27}\Lambda^2$. Интегралы I_m /$m = 0,1,2$/ определены в /2/. Регуляризующие "затравочные" потенциалы имеют вид

$$V_{0i}'=\begin{cases} -C\,\dfrac{4\alpha_s}{3r} & \text{при } i=1,\\[2ex] -C\,\dfrac{8\pi(1-4I_0)}{27r} & \text{при } i=2, \end{cases} \qquad /10/$$

где параметр C (C = const. ≥ 1) определяет их силу.

Установим структуру уравнения /5/ при различных значениях полного спина S и полного момента J. Она определяется наличием спин-тензорного члена /9/. Если $V_T\equiv 0$, то гамильтониан задачи хотя и неинвариантен относительно независимых вращений пространства и спинов, все еще коммутирует с операторами $\underline{L}^2$ и $\underline{S}^2$ и решения уравнения /5/ можно искать как общие собственные функции орбитального момента $\underline{L}^2$, полного спина $\underline{S}^2$, полного момента J^2 и его проекции J_z на оси z. Тогда зависимость волновой функции $\Phi_{SJ}(\underline{r};w)=f_{(L)}(r;w)\,\mathcal{Y}^M_{LSJ}(\Theta,\phi)$ от углов Θ, ϕ выражается явно при помощи коэффициентов Клебша-Гордана. В присутствии тензорных сил /9/ гамильтониан уже не коммутирует с $\underline{L}^2$, но продолжает коммутировать с S^2 и с оператором пространственной четности P. Поэтому в зависимости от квантового числа полного спина S уравнение /5/ приобретает различные формы.

Случай А: $S=0$. Существует единственная возможность - $L = J$ и, следовательно, $P=(-1)^J$. Воспользуемся операторными тождествами

$$\underline{L}\cdot\underline{S}=\frac{1}{2}(\underline{J}^2-\underline{L}^2-\underline{S}^2),\quad (\underline{\sigma}_1\cdot\underline{\sigma}_2)=2\underline{S}^2-3,$$

$$T\equiv\frac{(\underline{\sigma}_1\cdot\underline{r})(\underline{\sigma}_2\cdot\underline{r})}{r^2}=\frac{2(\underline{S}\cdot\underline{r})^2}{r^2}-1, \qquad /11/$$

и, действуя тензорным оператором T на волновую функцию Φ_{SJ}, получим $Tf_{(J)}\mathcal{Y}^M_{J0J}=-f_{(J)}\mathcal{Y}^M_{J0J}$. С учетом этого равенства из /5/ следует радиальное уравнение для $S = 0$:

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{J(J+1)}{r^2}+b^2-V_{NS_i}+3V_{SS_i}+V_{T_i}\Big]\chi_{(J)}(r;w)=0\quad (i=1,2). \qquad /12/$$

В уравнении /12/ и в дальнейшем используется подстановка $\chi_{(L)}(r;w)=rf_{(L)}(r;w)$. Это уравнение описывает состояния с противоположными спинами /парасостояния/ кварков. В стандартных спектроскопических обозначениях $n^{2S+1}L_J$ / $n = 1,2,\ldots$/ парасостояния имеют сигнатуру n^1S_0, n^1P_0, ...

Случай Б: $S=1$. Рассмотрим две возможности, вытекающие из неравенства $|L-S|\leq J\leq L+S$:

Б1: $S = 1$, $L=J$ $(J>0)$, $P=(-1)^J$. В этом случае действуем оператором T, $Tf_{(J)}\mathcal{Y}^M_{J1J}=f_{(J)}\mathcal{Y}^M_{J1J}$, и получаем радиальное уравнение

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{J(J+1)}{r^2}+b^2-V_{NS_i}+V_{LS_i}-V_{SS_i}-V_{T_i}\Big]\chi_{(J)}(r;w)=0\quad (i=1,2), \qquad /13/$$

которое описывает состояния типа n^3P_1, n^3D_2, ...

Б2: $S = 1$, $L=J\pm 1$ $(J\neq 0)$, $P=(-1)^{J\pm 1}$. Теперь собственная функция является суперпозицией двух компонент с $L=J+1$ и $L=J-1$, которые имеют одинаковую пространственную четность:

$$\Phi_{SJ}(r;w) = f_{(J-1)}(r;w)\mathcal{Y}^{M}_{J-1\,1\,J}(\Theta,\phi) + f_{(J+1)}(r;w)\mathcal{Y}^{M}_{J+1\,1\,J}(\Theta,\phi). \qquad /14/$$

Действие тензорного оператора T на обе компоненты функции /14/ выражается равенством

$$T f_{(J\pm1)}\mathcal{Y}^{M}_{J\pm1\,1\,J} = \mp f_{(J\pm1)}\mathcal{Y}^{M}_{J\pm1\,1\,J} + \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} f_{(J\pm1)}\mathcal{Y}^{M}_{J\mp1\,1\,J}.$$

Из-за смешивания по угловым частям в этом случае уравнение /5/ порождает систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиальных функций $f_{(J+1)}$, $f_{(J-1)}$ /или $\chi_{(J+1)}$, $\chi_{(J-1)}$/:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{(J+1)(J+2)}{r^2} + b^2 - V_{NS_i} + (J+2)V_{LS_i} - V_{SS_i} + \frac{V_{T_i}}{2J+1}\right]\times\\
&\times\chi_{(J+1)}(r;w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}V_{T_i}\,\chi_{(J-1)}(r;w) = 0,\\
&\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J-1)}{r^2} + b^2 - V_{NS_i} - (J-1)V_{LS_i} - V_{SS_i} - \frac{V_{T_i}}{2J+1}\right]\times\\
&\times\chi_{(J-1)}(r;w) - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}V_{T_i}\,\chi_{(J+1)}(r;w) = 0 \quad (i=1,2).
\end{aligned}\right\} \qquad /15/$$

Система /15/ отвечает состояниям типа $n\,^3S_1$, $n\,^3D_1$, $n\,^3P_2$.

Рассмотрим, наконец, частный случай, когда $J = 0$ при $S = 1$. В этом же случае компонента волновой функции с $L = J - 1 = -1$ не имеет физического смысла и принимается, что $\chi_{(-1)} \equiv 0$. Система /15/ вырождается в одно уравнение:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + b^2 - V_{NS_i} + 2V_{LS_i} - V_{SS_i} + V_{T_i}\right]\chi_{(J+1)}(r;w) = 0 \quad (i=1,2), \qquad /16/$$

которое является моделью для состояний типа $n\,^3P_0$.

Таким образом, вся совокупность связанных $q\bar{q}$ -состояний, с учетом спиновых структур потенциала, описывается набором уравнений /12/, /13/, /15/ и /16/. Этот набор уравнений будем в дальнейшем называть прямой задачей. Для проведения численного анализа прямой задачи при помощи метода стержневых сплайнов /МСС/ необходимо сначала найти главные части асимптотических решений уравнений /12/, /13/, /15/, /16/ на концах полуоси $[0,\infty)$.

При $r \to \infty$ асимптотический вид всех рассматриваемых уравнений одинаков /в частности, система /15/ вырождается в одно урав-

нение/:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2m^2\kappa r}{w}\right)\chi_\infty(r;w) = 0 \quad \text{при } i = 1,\\
&\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{8\pi\Lambda^2 wr}{27}\right)\chi_\infty(r;w) = 0 \quad \text{при } i = 2.
\end{aligned}\right\} \qquad /17/$$

Асимптотические решения χ_∞ для всей совокупности рассматриваемых уравнений имеют вид

$$\chi_\infty(r;w) = \exp\left(-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{2\kappa}{w}}\,r^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad = 1, \qquad /18'/$$

$$\chi_\infty(r;w) = \exp\left(-\frac{4\Lambda}{9}\sqrt{\frac{2\pi w}{3}}\,r^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad = 2. \qquad /18''/$$

Асимптотический вид уравнений /12/, /13/, /15/, /16/ при $r \to 0$ получим, совершив предельный переход $r \to 0$ в потенциалах /6/-/9/ и использовав /в случае $i = 2$/ асимптотики интегралов /2/:

$$I_0(\Lambda r) \xrightarrow[r\to0]{} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\ln(\Lambda r)}\right),\quad I_m \xrightarrow[r\to0]{} \frac{1}{4(\Lambda r)^m \ln^2(\Lambda r)}$$

/$m = 1,2$/. Асимптотические решения χ_0, при $r \to 0$, уравнений /12/, /13/, /15/, /16/ получаются в виде формальных рядов $\chi_0 = r^t(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots)$. Для применения МСС нам нужна только главная часть этих решений, то есть значения

$$\chi_{0,(L)}(r;w) = r^t. \qquad /19/$$

При этом физический смысл имеют только те решения, для которых

$$t \geq 1 \qquad /20/$$

/ограниченные в нуле решения/.

Перейдем к рассмотрению отдельных случаев. Асимптотический вид уравнения /12/ одинаков в случаях $i = 1,2$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2}\right]\chi_{0,(J)}(r;w) = 0.$$

Подставляя в это уравнение χ_0 из /19/, получим характеристическое уравнение $t(t-1) - J(J+1) = 0$ с корнем

$$t = J + 1, \qquad /21/$$

который удовлетворяет неравенству /20/ при $J = 0,1,2,\ldots$ и любых собственных значениях w.

Уравнение /13/ имеет также одинаковый асимптотический вид при $i = 1,2$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + \frac{3w+2m}{2Cw}\right] \chi_{0,(J)}(r;w) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение для решений типа /19/ имеет корень

$$t = \frac{1}{2} + \sqrt{(J+\frac{1}{2})^2 - \frac{3w+2m}{2Cw}}, \qquad /22/$$

который удовлетворяет условию /20/, если выполнено неравенство

$$\frac{3w+2m}{2Cw} \leq J(J+1) \quad (J = 1,2, \ldots). \qquad /23/$$

Асимптотический вид системы /15/ при $i = 1,2$ таков:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D_1}{r^2}\right)\chi_{0,(J+1)} + \frac{D_2}{r^2}\chi_{0,(J-1)} = 0, \\ &\frac{D_2}{r^2}\chi_{0,(J+1)} + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{D_3}{r^2}\right)\chi_{0,(J-1)} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad /24/$$

с $D_1 = (J+2)[(J+1)(2J+1) - D_4 - D_5]/(2J+1)$, $D_2 = -\dfrac{3\sqrt{J(J+1)}}{2(2J+1)} D_5$,

$D_3 = (J-1)[J(2J+1) + D_4]/(2J+1)$, $D_4 = \dfrac{(8J+3)w + (8J+2)m}{2Cw}$,

$D_5 = (w+2m)/Cw$, $J = 1,2,\ldots$.

Асимптотические решения находим, полагая, что

$$\left.\begin{aligned} \chi_{0,(J+1)} &= a_0 r^t, \\ \chi_{0,(J-1)} &= b_0 r^t, \end{aligned}\right\} \qquad /25/$$

где неизвестные a_0 и b_0 - нетривиальное решение системы

$$\left.\begin{aligned} &[t(t-1) - D_1]a_0 + D_2 b_0 = 0, \\ &D_2 a_0 + [t(t-1) - D_3]b_0 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad /26/$$

получающейся в результате подстановки /25/ в /24/. Условие разрешимости системы /26/

$$[t(t-1) - D_1][t(t-1) - D_3] - D_2^2 = 0 \qquad /27/$$

приводит к двум неотрицательным корням:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \tau_{1,2}}, \quad \tau_{1,2} = \frac{D_3 + D_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{D_3 - D_1}{2}\right)^2 + D_2^2}. \qquad /28/$$

Решения /28/ удовлетворяют неравенству /20/ только при тех значениях w, для которых

$$\tau_{1,2} \geq 0. \qquad /29/$$

Последнее уравнение /16/ имеет асимптотический вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{5w+6m}{Cwr^2}\right)\chi_{0,(+1)}(r;w) = 0.$$

При подстановке /19/ в это уравнение получаем корень характеристического уравнения

$$t = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{5w+6m}{Cw}}, \qquad /30/$$

который может удовлетворять неравенству /20/, если

$$w \geq \frac{6}{2C-5} m. \qquad /31/$$

Отметим, что анализ условий /23/, /29/ и /31/, накладываемых на степенные показатели t /22/, /28/ и /30/, затруднен тем, что эти условия зависят явно от неизвестного w. Приближенную оценку выполнимости неравенств /23/, /29/, /31/ можно сделать, исходя из того, что для самых низших состояний $q\bar{q}$ -систем $w \approx 2m$. При этом условии неравенства /22/ и /29/ соблюдаются при значении регуляризатора $C = 1$. Условие /31/ может выполняться при $w \geq 2m$, если $C \geq 4$. Таким образом, установлена нижняя оценка для регуляризатора C, гарантирующая ограниченность решений одновременно всех уравнений спиновой системы /12/, /13/, /15/ и /16/.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ $c\bar{c}$- И $b\bar{b}$ -СИСТЕМ

Приближенные решения $\tilde{w}, \tilde{\Phi}_{SJ}(r;\tilde{w})$ уравнений /12/, /13/, /15/ и /16/ найдены с помощью метода стержневых сплайнов [10]. Компоненты $\chi_{(L=J\pm1)}$ полной волновой функции Φ_{SJ} /14/ ищутся

Таблица 1

Результаты решения прямой задачи для $c\bar{c}$ –системы в модели с "конвенциональным" потенциалом /экспериментальные данные взяты из работ/13/ /

			Результаты настоящей работы при C = 16					
№	$n^{2S+1}L_J$	$w_{эксп.}$ /ГэВ/	$\tilde{w}$ /ГэВ/	Число нулей функции $\chi_{(J+1)}$	$\chi_{(J-1)}$	$\tilde{\Theta}$	r_b /фм/	Уравнение
1	1^1S_0	2,9810	3,0773	0	–	–	10,0	/12/
2	2^1S_0	3,5920	3,5949	1	–	–	10,0	
3	1^3P_1	3,5100	3,4517	0	–	–	10,0	/13/
4			(2,7515)	0	–	–	10,0	/16/
5	1^3P_0	3,4150	3,4496	1	–	–	10,5	
6	1^3P_2	3,5558	3,4777	0	0	−0,0090	3,4	
7	1^3S_1	3,0969	3,0850	0	0	−0,0160	3,0	
8	2^3S_1	3,6860	3,6003	1	1	−0,0150	3,4	
9	1^3D_1	3,7700	3,7165	0	1	+69,5	11,0	/15/
10	3^3S_1	4,0300	4,0121	2	2	−0,0140	9,0	
11	2^3D_1	4,1590	4,1026	1	2	+72,8	12,0	
12	4^3S_1	4,4150	4,3775	3	3	−0,0130	9,0	

в виде

$$\tilde{\chi}_{(L)}(r;w) = \chi_{0,(L)}(r;w)\,S_2(r)\,\chi_\infty(r;w), \qquad /32/$$

где $\chi_{0,(L)}$ и χ_∞ определены формулами /18'/, /18''/, /19/, /25/; $S_2(r)$ – параболический интерполяционный сплайн дефекта 1 /см./10,11/ /. При решении системы /15/ для каждого значения $\tilde{w}$ получается и весовой коэффициент $\tilde{\Theta}$, с которым компонента $\chi_{(J+1)}$ входит в функцию /14/; весовой коэффициент компоненты $\chi_{(J-1)}$ равен единице.

Таблица 2

Результаты решения прямой задачи для $b\bar{b}$ –системы в модели с "конвенциональным" потенциалом /экспериментальные данные взяты из работ/13/ /

			Результаты настоящей работы при C= 16					
№	$n^{2S+1}L_J$	$w_{эксп.}$ /ГэВ/	$\tilde{w}$ /ГэВ/	Число нулей функции $\chi_{(J+1)}$	$\chi_{(J-1)}$	$\tilde{\Theta}$	r_b /фм/	Уравнение
1	1^3P_1	9,8945	9,8929	0	–	–	6,0	/13/
2	2^3P_1	10,2537	10,2386	1	–	–	7,0	
3			(8,9912)	0	–	–	6,0	
4	1^3P_0	9,8729	9,8561	1	–	–	7,0	/16/
5	2^3P_0	10,2270	10,2362	2	–	–	7,5	
6	1^3P_2	9,9146	9,9088	0	0	−0,0100	3,00	
7	2^3P_2	10,2710	10,2547	1	1	−0,0098	3,5	
8	1^3S_1	9,4600	9,4493	0	0	−0,0166	2,8	
9	2^3S_1	10,0234	9,9790	1	1	−0,0161	3,5	
10	(1^3D_1)	–	(10,13)	0	0	+58,3	4,2	
11	3^3S_1	10,3555	10,3171	2	2	−0,0158	5,0	/15/
12	(2^3D_1)	–	(10,43)	1	1	+64,2	7,0	
13	4^3S_1	10,5730	10,5964	3	3	−0,0156	6,0	
14	(3^3D_1)	–	(10,69)	2	2	+69,1	7,0	
15	5^3S_1	10,8660	10,8442	4	4	−0,0154	7,0	
16	(4^3D_1)	–	(10,92)	3	3	+71,8	7,0	
17	6^3S_1	11,0800	11,0859	5	5	−0,0152	7,5	

Задача решалась на конечном интервале $[r_a, r_b] \subset [0, \infty)$ с шагом сетки сплайна $h = 0{,}03$. Индивидуальные значения r_b для каждого состояния указаны в табл.1 и 2; $r_a = 10^{-6}$.

Результаты по энергиям и волновым функциям $c\bar{c}$- и $b\bar{b}$ -систем со спиновым расщеплением, полученным на основе потенциала /4''/ /модель i = 1/, приведены в табл.1 и 2. Значения параметров потенциала (α_s, κ) и m найдены путем решения обратной задачи в бесспиновом случае /уравнение /5/ с $V_{LS} = V_{SS} = V_T = 0$ / при C = 4:

$$\alpha_s(c\bar{c}) = 0{,}3558, \qquad \alpha_s(b\bar{b}) = 0{,}4237,$$
$$m(c\bar{c}) = 1{,}4129 \text{ /ГэВ/}, \qquad m(b\bar{b}) = 4{,}8094 \text{ /ГэВ/}, \qquad /33/$$
$$\kappa(c\bar{c}) = 0{,}1525 \text{ /ГэВ/}^2, \qquad \kappa(b\bar{b}) = 0{,}1729 \text{ /ГэВ/}^2.$$

При решении полной спиновой задачи /12/, /13/, /15/, /16/ исследована роль регуляризатора C. Из бесспиновой обратной задачи вытекает, что C оказывает пренебрежимо малое воздействие на положение энергий $q\bar{q}$ -систем при $1 \le C \le 100$. Этот результат остается в силе и для полной спиновой системы, за исключением случая уравнения /16/. Например, для $b\bar{b}$ -системы /при значениях α_s, κ и m из /33// зависимость отдельных энергий $\tilde{w}$ от C показана в следующей таблице.

Таблица 3

Состояние	Уравнение	$\tilde{w}$ /ГэВ/				
		C = 4	C = 14	C = 24	C = 44	C=104
1^3P_1	/13/	9,8887	9,8925	9,8941	9,8956	9,8961
1^3P_0	/16/	9,3878	9,8134	9,8959	9,9408	9,9512
1^3S_0	/15/	9,4436	9,4493	9,4494	9,4493	9,4492

Определение значения регуляризатора C, в принципе, возможно путем решения полной обратной задачи с учетом спина.

4. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Спиновое расщепление состояний кваркония воспроизводится предложенной моделью количественно правильно.

2. Полученные волновые функции, в случае системы /15/, соответствуют существующей классификации экспериментальных данных. По значениям весового коэффициента Θ состояния системы /15/ надлежащим образом соответствуют состояниям типа $^3S_1$ и $^3D_1$.

Отметим, что состояния $^3S_1$ имеют асимптотику /25/ с $t = t_1$ из /28/, а состояния $^3D_1$ - асимптотику с $t = t_2$.

3. В $b\bar{b}$ -системе экспериментально не обнаружено состояний типа n^3D_1, но наши расчеты дают серию таких состояний, которые мы приводим в табл.2 как предсказания.

4. По сравнению с данными эксперимента /табл.1,2/ уравнение /16/ дает меньшую по величине энергию для состояния с волновой функцией без нулей /в частности, $\tilde{w}(c\bar{c}) = 2{,}7515$ ГэВ, $\tilde{w}(b\bar{b}) = 8{,}9912$ ГэВ/. Возможны два объяснения этого явления: а/ указанные основные состояния пропущены в существующем эксперименте; б/представленное в данной работе математическое моделирование приводит к нефизическим основным состояниям для уравнения /16/. На данном этапе для решения обратной спиновой задачи для кваркония мы предлагаем использовать соответствие между экспериментальными и модельными состояниями, приведенными в табл.1 и 2.

Авторы благодарят И.Тодорова за поддержку и постоянный интерес к работе, выражают благодарность также Д.Бакалову, С.Герасимову и А.Матвеенко за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, 1963, 29, p.280.
2. Kadyshevsky V.G. Nucl.Phys., 1968, B6, p.125.
3. Todorov I.T. Phys.Rev., 1971, D3, p.2351; Properties of Fundamental Interactions (ed. by A.Zichichi). Editrice Compositori, Bologna, 1973, vol.9C, p.951; Ризов В.А., Тодоров И.Т. ЭЧАЯ, 1975, 6, с.669.
4. Jhung K.S. et al. Phys.Rev., 1975, D12, p.1999; Crater H.W., Van Alstine P. Tennessee Preprint, 1980; Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. ЭЧАЯ, 1978, 9, с.5; Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Р2-80-45, Дубна, 1980; Голоскоков С.В. и др. ОИЯИ, Р2-12978, Дубна, 1980; Амирханов И.В. и др. ЭЧАЯ, 1981, 12, с.651.
5. Aleksandrov L. et al. J.Compt.Phys., 1982, 45, p.291.
6. Aleksandrov L. et al. J.Phys., 1984, G10, p.1003.
7. Richardson L. Phys.Lett., 1979, 82B, p.272.
8. Eichten E. et al. Phys.Rev., 1980, D21, p.203.
9. Морозов П.Т. ОИЯИ, Р2-85-401, Дубна, 1985.
10. Александров Л., Караджов Д. ЖВМ и МФ, 1980, 20, с.923.
11. Александров Л., Дренска М., Караджов Д. ЖВМ и МФ, 1982, 22, с.375.

12. Александров Л. и др. ОИЯИ, Р11-80-752, Дубна, 1980.
13. Particle Data Group. Rev.Mod.Phys., 1984, vol.56, No.2, part 2; Moxhay P., Rosner J.L. Phys.Rev., 1983, D28, p.1132; Silverman A. XII Int.Conf. on High En.Phys., Session A11, Leipzig, DDR, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июня 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,
если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна. 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XП Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Александров Л., Караджов Д., Морозов П. P2-86-349

Моделирование спин-зависимых связанных кварк-антикварковых состояний в квазипотенциальном подходе

Поставлена прямая задача для описания спинорных кварк-антикварковых связанных состояний в квазипотенциальном подходе Логунова - Тавхелидзе - Тодорова. Приведен полный набор уравнений, отвечающих всем возможным значениям полного спина S и полного момента J. Регуляризованные квазипотенциалы, несингулярные в окрестности нуля, построены из двух модельных производящих потенциалов: потенциала Ричардсона и конвенционального потенциала /содержащего кулоновский и линейный члены/. Получены асимптотические решения полной системы при $r\to 0$ и $r\to\infty$. Ее численные решения в случае чармония и боттомония найдены в работе методом стержневых сплайнов. Численные результаты для конвенционной модели показывают, что предложенная спинорная система количественно правильно описывает спиновые расщепления состояний кваркония. Спиновое уравнение в случае $S = 1$, $J = 0$ приводит к значениям энергий основных состояний $w(c\bar{c}) = 2{,}752$ ГэВ, $w(b\bar{b}) = 8{,}991$ ГэВ, которые заметно ниже экспериментально установленных в настоящее время энергий для 1^3P_0-состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Aleksandrov L., Karadjov D., Morozov P. P2-86-349

Modelling of Spin-Dependent Quark-Antiquark Bound States in Quasipotential Approach

The direct problem for description of spin-dependent quark-antiquark bound states is formulated in the Logunov - Tavkhelidze - Todorov quasipotential approach. A complete set of equations corresponding to all possible values of the total spin S and total momentum J is given. The regularized quasipotentials nonsingular in the vicinity of zero are constructed from the two model generating potentials: the Richardson potential and the conventional (including Coulomb and linear terms) potential. Asymptotic solutions (as $r\to 0$ and $r\to\infty$) of the total system are obtained. The numerical solution of the spin-system for "charmonium" and "bottomium" are found by the core splines method. Numerical results for the conventional model exhibit a quantitatively correct spin-splitting of quarkonium states. The spin-equation in the case $S = 1$, $J = 0$ gives ground-state energies $w(c\bar{c}) = 2.752$ GeV, $w(b\bar{b}) = 8.991$ GeV which are quite lower as compared with up-to-date experimental energies of 1^3P_0-states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986