сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-32

Г.М.Десимиров

О КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ СПИНОР-СПИНОРНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

1986

I. Применение кулоновской калибровки в квантовой электродинамике для построения квазипотенциала для спинор-спинорного взаимодействия представляет существенный интерес. В этой связи можно указать на работы Фаустова [1,2], где в задачах о нахождении энергетических уровней водородного атома применена кулоновская калибровка. Многие работы по применению квазипотенциального подхода в квантовой теории поля Логунова и Тавхелидзе делались, однако, с применением калибровки Фейнмана. Как известно, в последние годы во многих работах применяется кулоновская калибровка, выявился ряд ее достоинств. В этой связи интересно применение этой калибровки в рамках первого варианта квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе. С этой задачей и связана настоящая работа.

Как известно, в случае взаимодействующих спинорных полей встретились некоторые особенности в развитии квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе, что вызвало ряд исследований в этой связи. Настоящая работа тесно связана с циклом работ [3-7] и других, в которых дано последовательное и эффективное для применений исследование и изложение подхода Логунова и Тавхелидзе для спинор-спинорного случая. За подробностями мы отсылаем читателя к этим работам. Ввиду методических целей работы, ограничимся случаем одинаковых масс взаимодействующих спинорных частиц.

Будут рассматриваться диаграммы прямого и обменного взаимодействия во втором порядке теории возмущений. В случае обменного взаимодействия встречаются некоторые затруднения в процедуре введения системы центра масс, поэтому впервые все рассмотрения проводятся в любой лоренцевской системе, а система центра масс вводится потом. Необходимые вычисления довольно громоздки.

2. Квазипотенциальная диаграмма второго порядка для прямого взаимодействия дана на рис.I. Подход использует двухвременную функцию Грина, и нам требуется свободная двухвременная функция Грина $\tilde{\mathcal{G}}_0$, переопределенная в пространстве $\Phi^{(+)}$ волновых функций с одинаковыми знаками энергии у обоих взаимодействующих спинорных частиц. Из

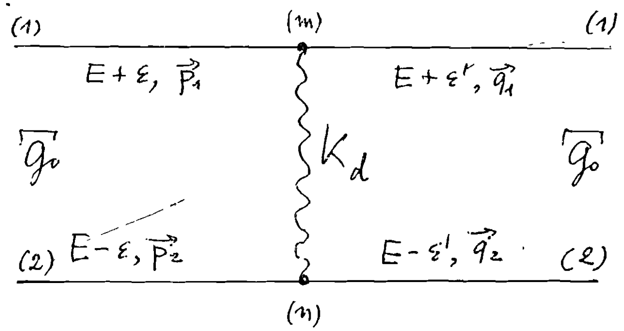

Рис.I. Прямое взаимодействие двух спинорных частиц.

работ[3,6] найти g^0 нетрудно, и мы получаем для необходимого обратного оператора следующую формулу:

$$[g_0]^{-1} = \frac{i}{2\pi}\Big\{(2E-P_1-P_2)\Lambda_1^{(+)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec{p}_2) - (2E+P_1+P_2)\Lambda_1^{(-)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(-)}(\vec{p}_2)\Big\}\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{q}_1-\vec{q}_2), \quad (I)$$

где $P_1=\sqrt{(\vec{p}_1)^2+m^2}$, $P_2=\sqrt{(\vec{p}_2)^2+m^2}$; $2E$ -полная энергия системы, которая является параметром квантования в основном квазипотенциальном уравнении, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ -начальные, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ - конечные импульсы взаимодействующих частиц, $\vec{k}$ -передача импульса $\vec{k}=\vec{p}_1-\vec{q}_1=-(\vec{p}_2-\vec{q}_2)$; $\Lambda^{(\pm)}(\vec{p})$ - обычные операторы Казимира, выделяющие состояния с соответствующим знаком энергии. На рис.I через ε и ε' обозначены переменные, по которым необходимо провести интегрирование для выполнения двухвременной операции над функцией Грина взаимодействующих частиц.

Прежде всего выберем фотонный пропагатор $D^c_{\mu\nu}(k)$, соответствующий кулоновской калибровке. Как известно, он отвечает в электродинамике калибровке векторного потенциала по условию

$$div\, A(\vec{r},t)=0. \quad (2)$$

Как известно, он задается следующим образом:

$$D^c_{00}(k) = -i\frac{e^2}{(\vec{k})^2}$$

$$D^c_{\mu 0}(k) = D^c_{0\nu}(k) = 0, \quad \mu=1,2,3;\ \nu=1,2,3 \quad (3)$$

$$D^c_{is}(k) = -ie^2\left(\delta_{is}-\frac{k_i k_s}{(\vec{k})^2}\right)\frac{1}{k^2+i0}, \quad i=1,2,3;\ s=1,2,3.$$

Такому виду фотонного пропагатора отвечает вклад в бете-солпитеровское ядро взаимодействия:

$$K_d = -ie^2\left\{\frac{I_1 I_2}{(\vec{k})^2} + \frac{(\vec{\alpha}_1\times\vec{k})\cdot(\vec{\alpha}_2\times\vec{k})}{(\vec{k})^2\left[(\varepsilon-\varepsilon')^2-(\vec{k})^2+i0\right]}\right\}. \quad (4)$$

Соответствующий квазипотенциал V_d^c состоит из двух частей, отвечающих двум слагаемым в[4]:

$$V_d^c = V_I^c + V_{II}^c. \quad (5)$$

Для V_I^c легко записать

$$V_I^c = -ie^2\left(\Lambda_1^{(+)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec{p}_2)+\Lambda_1^{(-)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(-)}(\vec{p}_2)\right)\frac{1}{(\vec{k})^2}\times \left(\Lambda_1^{(+)}(\vec{q}_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec{q}_2)+\Lambda_1^{(-)}(\vec{q}_1)\Lambda_2^{(-)}(\vec{q}_2)\right). \quad (6)$$

Для второго слагаемого V_{II}^c имеем представление

$$V_{II}^c = V_{II}^{c(+,+)} + V_{II}^{c(+,-)} + V_{II}^{c(-,+)} + V_{II}^{c(-,-)}, \quad (7)$$

где расчет показывает, что выполняются условия симметрии

$$V_{II}^{c(-,-)}(\dots|E) = V_{II}^{c(+,+)}(\dots|-E);\ V_{II}^{c(+,-)} = V_{II}^{c(-,+)}. \quad (8)$$

В таком случае достаточно записать члены со знаками проекционных операторов (+,+) и (+,-). Член (+,+) со всеми положительными знаками у проекционных операторов выступает в роли главного члена, так как многими авторами показано, что он дает основной вклад в энергетические поправки и в сечения рассеяния. Впервые эта роль члена (+,+) подробно обосновывается в основной работе Солпитера/8/. Следовательно, достаточно записать:

$$V_{\text{II}}^{C(+,+)} = -ie^2\Lambda_1^{(+)}(\vec p_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec p_2)\cdot \frac{(\vec\alpha_1\times\vec k)\cdot(\vec\alpha_2\times\vec k)\left[4E-P_1-P_2-Q_1-Q_2-2|\vec k|\right]}{2\left[2E-Q_1-P_2-|\vec k|\right]\left[2E-Q_2-P_1-|\vec k|\right]|\vec k|^3}\times \Lambda_1^{(+)}(\vec q_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec q_2), \qquad (9)$$

$$V_{\text{II}}^{C(+,-)} = ie^2\Lambda_1^{(+)}(\vec p_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec p_2)\cdot \frac{(\vec\alpha_1\times\vec k)\cdot(\vec\alpha_2\times\vec k)\left[P_1+P_2+Q_1+Q_2+2|\vec k|\right]}{2(P_1+Q_2+|\vec k|)(P_2+Q_1+|\vec k|)|\vec k|^3}, \qquad (10)$$

где $Q_1=\sqrt{(\vec q_1)^2+m^2}$, $Q_2=\sqrt{(\vec q_2)^2+m^2}$.

Формулы (9) и (10) дают нам в четырехкомпонентной дираковской форме квазипотенциал прямого взаимодействия.

Введение системы центра масс в этих формулах не представляет никаких затруднений. Нужно положить

$$\vec p_1+\vec p_2=\vec q_1+\vec q_2=\vec k_0\to 0,$$

а потом $\vec p_1=\vec p$, $\vec p_2=-\vec p$ -импульсы частиц в начальном состоянии; $\vec q_1=\vec q$, $\vec q_2=-\vec q$ -импульсы частиц в конечном состоянии. Передача импульса будет $\vec k=\vec p-\vec q$, кроме того, имеем $P_1=P_2=P$, $Q_1=Q_2=Q$, и формулы (9) и (10) принимают простой вид

$$V_{\text{II}}^{C(+,+)} = ie^2\Lambda_1^{(+)}(\vec p)\Lambda_2^{(+)}(-\vec p)\frac{(\vec\alpha_1\times\vec k)\cdot(\vec\alpha_2\times\vec k)}{|\vec k|^3(P+Q+|\vec k|-2E)}\times\Lambda_1^{(+)}(q)\Lambda_2^{(+)}(-\vec q), \qquad (11)$$

$$V_{\text{II}}^{C(+,-)} = ie^2\Lambda_1^{(+)}(\vec p)\Lambda_2^{(+)}(-\vec p)\times \frac{(\vec\alpha_1\times\vec k)\cdot(\vec\alpha_2\times\vec k)}{|\vec k|^3(P+Q+|\vec k|)}\Lambda_1^{(-)}(\vec q)\Lambda_2^{(-)}(-\vec q). \qquad (12)$$

3. Квазипотенциальная диаграмма обменного взаимодействия дана на рис.2. Для построения ядра взаимодействия прежде всего нужно ввести

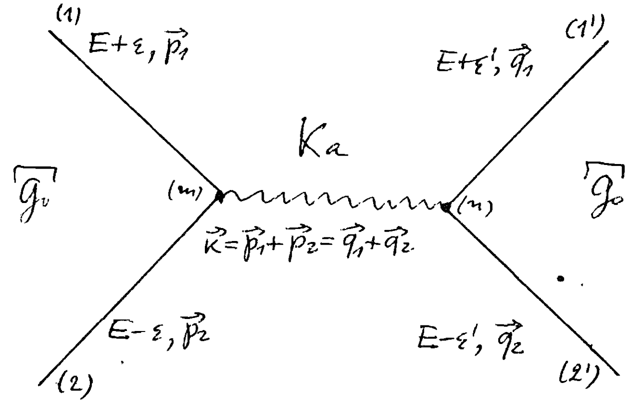

Рис.2. Обменное взаимодействие двух спинорных частиц.

матричные четырехмерные векторы:

$$\delta^m=(\delta^0,\vec\delta),\quad \theta^n=(\theta^0,\vec\theta),$$

где $\delta^0=C\gamma^0$, $\vec\delta=\vec\gamma C$ (C -матрица зарядового сопряжения)

$$\theta^0=C^{-1}\gamma^0,\quad \vec\theta=C^{-1}\vec\gamma.$$

Можно показать, что все матрицы δ^m и θ^n -симметричные. Четырехмерная передача импульса равна

$$K=(2E,\ \vec p_1+\vec p_2),\qquad (\vec p_1+\vec p_2=\vec q_1+\vec q_2),$$

и поэтому невозможно с самого начала ввести систему центра масс, для чего требуется положить

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{k}_0 \to 0 .$$

Из (3) для ядра обменного взаимодействия получаем

$$K_a = -ie^2 \left[\frac{\delta^0_{12}\,\theta^0_{1'2'}}{(\vec{k})^2} + \frac{(\vec{\delta}_{12}\cdot\vec{\theta}_{1'2'})(\vec{k})^2 - (\vec{\delta}_{12}\cdot\vec{k})(\vec{\theta}_{1'2'}\cdot\vec{k})}{(\vec{k})^2\,[4E^2 - (\vec{k})^2 + i0]} \right]. \tag{13}$$

Ввиду того, что ядро K_a состоит из двух слагаемых, подобное представление имеет и обменный квазипотенциал

$$V_a = V_0 + \overline{V}. \tag{14}$$

Пользуясь свойствами матрицы зарядового сопряжения, получаем

$$V^0 = -ie^2 \left[\left(\Lambda^{(+)}(\vec{p}_1)\Lambda^{(-)}(-\vec{p}_2) + \Lambda^{(-)}(\vec{p}_1)\Lambda^{(+)}(-\vec{p}_2) \right)(C\gamma^0) \right]_{12} \times$$
$$\times \frac{1}{(\vec{k})^2} \left[(C^{-1}\gamma^0)\left(\Lambda^{(-)}(-\vec{q}_2)\Lambda^{(+)}(\vec{q}_1) + \Lambda^{(+)}(-\vec{q}_2)\Lambda^{(-)}(\vec{q}_1) \right) \right]_{1'2'}. \tag{15}$$

Здесь матрицы $\Lambda^{(+)}$ и $\Lambda^{(-)}$ умножаются обычным образом, а спинорные индексы обозначены цифрами: 1,2; 1',2'. Для $\overline{V}$ получаем

$$\overline{V} = -ie^2 \left[\Lambda_1^{(+)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(+)}(\vec{p}_2) + \Lambda_1^{(-)}(\vec{p}_1)\Lambda_2^{(-)}(\vec{p}_2) \right] \cdot$$
$$\cdot \frac{(\vec{\delta}_{12}\cdot\vec{\theta}_{1'2'})(\vec{k})^2 - (\vec{\delta}_{12}\cdot\vec{k})(\vec{\theta}_{1'2'}\cdot\vec{k})}{(\vec{k})^2\,[4E^2 - |\vec{k}|^2 + i0]} \times \tag{16}$$
$$\times \left[\Lambda_{1'}^{(+)}(\vec{q}_1)\Lambda_{2'}^{(+)}(\vec{q}_2) + \Lambda_{1'}^{(-)}(\vec{q}_1)\Lambda_{2'}^{(-)}(\vec{q}_2) \right].$$

Везде $\quad \vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 .$

Очевидно, что переход к системе центра масс $\vec{k} \to 0$ затруднителен, так как получаются неопределенные выражения. Вместо того, чтобы совершать предельный переход $\vec{k} \to 0$, что, конечно, можно сделать, удобнее и проще использовать метод введения "остаточной массы фотона" λ [9]. Сделаем двойной предельный переход в три этапа:

а) Везде, где встречается $(\vec{k})^2$, вводим "остаточную массу фотона" λ, т.е. делаем замещение $(\vec{k})^2 \to (\vec{k})^2 + \lambda^2$.

б) Общий трехмерный импульс $\vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$ устремляем к нулю: $\vec{k} \to 0$. Таким образом, вводим систему центра масс и в связи с этим полагаем:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}; \qquad \vec{q}_1 = \vec{q}, \quad \vec{q}_2 = -\vec{q},$$

$\vec{p}$ и $\vec{q}$ -начальный и конечный импульсы рассматриваемых спинорных частиц. После введения системы центра масс из-за свойств проекционных операторов потенциал V^0 исчезает, т.е. $V^0 \to 0$.

в) В конце вычисления устремляются к нулю фейнмановская поправка к массе, а потом и $\lambda^2 \to 0$.

Выполняя эту программу, мы получаем: $V^0 = 0$, $\overline{V} = V_{(a+)}$, где

$$V_{(a+)} = ie^2 \left[\Lambda_1^{(+)}(\vec{p})\Lambda_2^{(+)}(-\vec{p}) + \Lambda_1^{(-)}(\vec{p})\Lambda_2^{(-)}(-\vec{p}) \right] \times$$
$$\times \frac{g^{mn}(\gamma^m C)_{12}(C^{-1}\gamma^n)_{2'1'}}{4E^2} \times \tag{17}$$
$$\times \left[\Lambda_{1'}^{(+)}(\vec{q})\Lambda_{2'}^{(+)}(-\vec{q}) + \Lambda_{1'}^{(-)}(\vec{q})\Lambda_{2'}^{(-)}(-\vec{q}) \right].$$

Результат совпадает в точности с результатом из работы [6]. Таким образом, и в фейнмановской, и в кулоновской калибровках результаты для квазипотенциала обменного взаимодействия совпадают. Для прямого взаимодействия сопоставление показывает, что в четырехкомпонентной дираковской форме по виду квазипотенциалы существенно различаются.

4. Перейдем к двухкомпонентному паулиевскому представлению найденных квазипотенциалов. При этом запишем только результаты для главного члена. Как известно, многими авторами изучалась низкоэнергетическая граница вводимых разными способами потенциалов, и формулы для этого предельного перехода лучше подходят для сравнения с результатами других авторов.

Как показано в [6], переход от четырехкомпонентного дираковского к двухкомпонентному паулиевскому представлению можно сделать по следующей формуле (записана для главного члена, подобные формулы можно записать для всех слагаемых [7] квазипотенциала):

$$U^{(+,+)} = \frac{(P+m)(Q+m)}{4PQ} \left\| \hat{1}, \Gamma(\vec{p}) \right\|_1 \left\| \hat{1}, \Gamma(-\vec{p}) \right\|_2 V_{12;1'2'} \left\| \begin{matrix} \hat{1} \\ \Gamma(\vec{q}) \end{matrix} \right\|_{1'} \left\| \begin{matrix} \hat{1} \\ \Gamma(-\vec{q}) \end{matrix} \right\|_{2'} \tag{18}$$

где $\Gamma(\vec{p})=\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{p+m}$. Сделаем разложение величины $U^{(+,+)}$, чтобы найти низкоэнергетический предел главного члена квазипотенциала. Для этой цели предполагаем, что величины $(\vec{p})^2/m^2$, $(\vec{q})^2/m^2$, $(\vec{k})^2/m^2$, $(E^2-m^2)/m^2$ являются малыми и в степенном разложении[18] сохраняем отрицательные и нулевую степени. Таким образом, получаем

$$U_{I}^{C(+,+)}=-\frac{e^2}{(\vec{k})^2}-\frac{e^2(\vec{p}\cdot\vec{q})}{2m^2(\vec{k})^2}-\frac{e^2 i(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)\cdot(\vec{p}\times\vec{q})}{4m^2(\vec{k})^2}+ \tag{19}$$

$$+\frac{e^2[(\vec{p})^2+(\vec{q})^2]}{4m^2(\vec{k})^2},$$

$$U_{II}^{C(+,+)}=e^2\frac{[(\vec{p})^2-(\vec{q})^2]^2}{4m^2|\vec{k}|^4}-\frac{e^2[\vec{p}+\vec{q}]^2}{4m^2(\vec{k})^2}+ \tag{20}$$

$$+e^2\frac{\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2}{4m^2}-e^2\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{k})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{k})}{4m^2(\vec{k})^2}-i\frac{e^2(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)\cdot(\vec{p}\times\vec{q})}{4m^2(\vec{k})^2}.$$

Складывая (19) и (20), для низкоэнергетического предела главного члена квазипотенциала получаем

$$U_{d}^{C(+,+)}=-e^2\left\{\frac{1}{(\vec{k})^2}+\frac{3i(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)\cdot(\vec{p}\times\vec{q})}{4m^2(\vec{k})^2}+\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{m^2(\vec{k})^2}-\right. \tag{21}$$

$$\left.-\frac{\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2}{4m^2}+\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{k})(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{k})}{4m^2(\vec{k})^2}\right\}+\frac{e^2[(\vec{p})^2-(\vec{q})^2]^2}{4m^2|\vec{k}|^4}.$$

Члены в фигурных скобках получались по обоим вариантам квазипотенциального подхода в работах[6] и [11]. Вместе с последним членом выражение (21) представляет точно известный нелокальный потенциал Брейта[11]. Члены, явно зависящие от энергии, в низкоэнергетическом пределе не возникают, как в случае использования релятивистских калибровок типа Лоренца (Фейнмана, Ландау и др.).

Для обменного взаимодействия не только дираковская форма, но и низкоэнергетический предел будет одинаков с результатом, полученным в [6] с помощью фейнмановской калибровки:

$$U_{an}^{(+,+)}=\frac{e^2}{8m^2}\left(3+\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\right). \tag{22}$$

Эта формула получена многими авторами разными подходами. Ее можно получить также из наших вышеприведенных формул соответствующим предельным переходом.

В заключение автор выражает особую благодарность Р.Н.Фаустову за плодотворное обсуждение результатов, а также А.В.Радюшкину и участникам семинаров ЛТФ ОИЯИ, ИЯИ АН СССР и ИФВЭ ТГУ за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Фаустов Р.Н. Связанная система двух частиц в квантовой электродинамике. ОИЯИ, 8246, Дубна, 1974.
2. Фаустов Р.Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, № 1, стр. 238.
3. Десимиров Г.М. и Стоянов Д.Ц. Препринт ОИЯИ, Р-1658, Дубна, 1964. Известия ФИ с АНЕБ при БАН, 1965, 13 стр. 149.
4. Desimirov G.M., Mateev M.D. Nucl.Phys. 1967, B2, p.218.
5. Десимиров Г.М. Препринт ОИЯИ, Р-2105, Дубна, 1965. Известия ФИ с АНЕБ при БАН, 1968, 17, стр. 155.
6. Desimirov G.M. and Mateev M.D. Nucl.Phys. 1968, B4, p.649.
7. Desimirov G.M. and Mateev M.D. Nuovo Cimento, 1967, 52A, serie X, p. 1366.
8. Salpeter E. Phys.Rev. 1952, 87, No. 2, p. 328.
9. Yennie D.R., Frautschi S.C. and Suura H. Annals of Phys.(N.Y.), 1961, 13, No.3, p. 379.
10. Ахиезер А.И. и Берестецкий Б.В. Квантовая электродинамика. Физматгиз, Москва, 1959, стр. 419.
11. Фаустов Р.Н. Препринт ОИЯИ, Р-1572, Дубна, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 января 1986 года.

Десимиров Г.М. Р2-86-32
О кулоновской калибровке спинор-спинорного квазипотенциала

В случае взаимодействия двух спинорных полей с одинаковыми массами строится квазипотенциал по первому варианту квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе. Учтен второй порядок теории возмущений в случае применения кулоновской калибровки фотонного пропагатора. Найдена дираковская четырехкомпонентная форма для квазипотенциала прямого и обменного взаимодействия. Найдена двухкомпонентная паулиевская форма главного члена квазипотенциала в нерелятивистском приближении. Для прямого взаимодействия получена точная структура потенциала Брейта без дополнительных членов, явно зависящих от энергии. Для обменного взаимодействия результат получался ранее другими способами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Desimirov G.M. P2-86-32
On the Coulomb Gauge for the Spinor-Spinor Quasipotential

In the case of two interacting spinor fields with equal masses the first version of the Logunov-Tavkhelidze quasipotential approach is used to construct the quasipotential. The second-order term in the perturbation theory in Coulomb gauge is computed. A Dirac four-component term for the direct and exchange interaction particles is obtained. A two-component Pauli-form for the leading term of the quasipotential is also worked out in nonrelativistic limit. The direct interaction the exact structure of the Breit potentials is obtained, without additional terms explicitly depending on the energy, is calculated. For the exchange interaction the same results has been obtained previously using different methods.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986