сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-317

В.И.Иноземцев

АСИМПТОТИКА МАССЫ СОЛИТОНА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ СКИРМА

1986

Успехи, достигнутые при описании статических свойств барионов в модели Скирма [1], весьма значительны: в работе [2], возродившей к ней интерес, было найдено, что расхождения предсказаний модели с экспериментом находятся на уровне ~30%. Дальнейшее развитие показало, однако, что в модели существуют определенные трудности; в частности, расщепление масс $N-\Delta$ является слишком малым [3]. Тем не менее были предприняты значительные усилия по исследованию решений модели с барионным зарядом $N = 2$ с целью описания нуклон-нуклонных взаимодействий при низких энергиях [4], а также включению в модель эффектов взаимодействия с векторными мезонами [5,6]. Так, лагранжиан обобщенной модели Скирма, предложенной в [6], содержит члены шестого порядка по производным от пионного поля:

$$L = \frac{1}{8} f_\pi^2 \operatorname{tr}(\partial_\mu u \partial^\mu u^+) + \frac{1}{32 e^2} \operatorname{tr}\{[\partial_\mu u u^+, \partial_\nu u u^+]^2\} - \frac{\beta^2}{m_\omega^2} B_\mu B^\mu, \qquad /1/$$

где

$$B^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{tr}(u^+ \partial_\nu u u^+ \partial_\rho u u^+ \partial_\sigma u) \; — \qquad /2/$$

плотность "барионного тока". Интеграл от нулевой компоненты B^μ по трехмерному пространству равен топологическому заряду солитона N, если матрица $U = \exp(\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi} \vec{\tau}\vec{\pi})$ стремится к постоянному значению при $|\vec{r}| \to \infty$.

Сферически-симметричные солитоны соответствуют матрицам U вида

$$U = \exp(i F(r) \vec{n}\vec{\tau}), \quad n = \frac{\vec{r}}{r} . \qquad /3/$$

Для анзаца /3/, очевидно, отлична от нуля лишь компонента B^0 тока /2/, причем члены, нелинейные по производным $F'(r)$, выпадают из B^0. Масса солитона определяется интегралом от плотности лагранжиана /1/ и при учете /2/, /3/ приобретает вид

$$M = C_0 \int_0^\infty dx \, [F'^2 (\frac{x^2}{4} + 2\epsilon \sin^2 F + \Omega \frac{\sin^4 F}{x^2}) + \sin^2 F (\frac{1}{2} + \frac{\epsilon \sin^2 F}{x^2})], \qquad /4/$$

где $C_0 = \frac{2^{5/2} \pi f_\pi}{|e|}$, $x = \sqrt{2}\, |e| f_\pi \mu$, $\Omega = \frac{\beta^2}{m^2 \pi^4} (e^2 f_\pi)^2$, $\epsilon = \operatorname{sign}(e^2)$.

Функция $F(x)$ для солитона с топологическим зарядом N должна удовлетворять граничным условиям

$$F(0) = N\pi, \quad F(\infty) = 0 \qquad /5/$$

и уравнению Лагранжа - Эйлера, вытекающему из требования минимизации функционала /4/. Обычная модель Скирма, для которой асимптотика массы солитона при $N \to \infty$ была найдена в работе [7] методом адиабатического инварианта, соответствует нулевому значению параметра Ω.

В данной работе мы вычислим ведущий член асимптотики $M_N(\Omega)$ при $N \to \infty$ и покажем, что он может быть представлен в форме

$$M_N(\Omega) \simeq C_0\, C_1(\Omega) N^2 . \qquad /6/$$

Функция $C_1(\Omega)$ определяется в виде интеграла, значение которого может быть легко найдено с помощью ЭВМ.

Отметим, что использование простейшей пробной функции [1,8]

$$F(x) = \begin{cases} N\pi\left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right), & x \le \lambda, \\ 0, & x > \lambda, \end{cases} \qquad /7/$$

не дает асимптотики вида /6/, в отличие от модели Скирма. Минимизация функционала /4/ по параметру λ, входящему в /7/, приводит к результату

$$M_N(\Omega) < C_0 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2} \Omega^{1/4} N^{9/4} . \qquad /8/$$

Оценка /8/ для больших N значительно превышает /6/, однако это превышение - не что иное, как следствие неудачного выбора $F(x)$. Действительно, модификация /7/ вида

$$F(x) = \begin{cases} N\pi\left(1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2}\right), & x \le \lambda, \\ 0, & x > \lambda, \end{cases}$$

приводит в ведущем порядке по N к следующему выражению для массы солитона:

$$M_N(\Omega) \simeq C_0 N^2 \pi^2 \left(\frac{\lambda}{5} + \frac{4\epsilon}{3\lambda} + \frac{3\Omega}{2\lambda^3}\right) + O(N). \qquad /9/$$

Минимизация /9/ по λ приводит к оценке

$$M_N(\Omega) < C_0 \tilde{C}(\Omega) N^2 , \qquad /10/$$

где

$$\tilde{C}(\Omega) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} \left(10 + \sqrt{100 + \frac{405\Omega}{2}}\right)^{-3/2} \left\{40 + 27\Omega + \sqrt{100 + \frac{405\Omega}{2}}\right\}, \quad \epsilon = +1. \qquad /11/$$

Разумеется, оценка /10/, /11/ является весьма грубой и дает лишь качественный результат для асимптотики массы солитона. Тем не менее она позволяет установить, что, как и в обычной модели Скирма, основной вклад в $M_N(\Omega)$ дает член, пропорциональный квадрату большой производной быстро меняющейся функции $F(x)$. Этот факт, в свою очередь, указывает на возможность построения более точной, чем /8/, пробной функции для вычисления коэффициента $C_1(\Omega)$.

Сделаем предварительно, как и в [7], замену переменной $x = \mathrm{ctg}\, t$ в интеграле /4/, оставив в нем лишь слагаемое, пропорциональное F'^2:

$$M_N(\Omega) \simeq \frac{C_0}{4} \int_0^{\pi/2} dt F'^2(t) \left(\cos^2 t + 8\epsilon \sin^2 t \sin^2 F + 4\Omega \frac{\sin^4 t}{\cos^2 t} \times \sin^4 F\right). \qquad /12/$$

Граничные условия приобретают вид $\{F(0) = 0,\ F(\frac{\pi}{2}) = N\pi\}$.

Так как $F(t)$ быстро возрастает в интервале $[0, \pi/2]$, предположим, что можно пренебречь изменением t, когда $F(t)$ изменяется от $k\pi$ до $(k+1)\pi$, k - целое число, не превосходящее $N-1$. Следуя [7], определим функцию $t(k)$ соотношением

$$F(t(k)) = k\pi . \qquad /13/$$

При этом, очевидно, $t(0) = 0$, $t(N) = \pi/2$. Интеграл /12/ согласно сказанному выше можно представить в виде

$$M_N(\Omega) = \frac{C_0}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t(k)}^{t(k+1)} dt\, F'^2(t) A(t(k), F), \qquad /14/$$

где

$$A(t(k), F) = \cos^2 t + 8\epsilon \sin^2 t \sin^2 F + \frac{4\Omega \sin^4 t}{\cos^2 t} \sin^4 F . \qquad /15/$$

Находя минимальное значение каждого из членов суммы /14/ с учетом граничных условий /13/, получаем

$$M_N(\Omega) = \frac{C_0}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\chi^2(t(k))}{t(k+1) - t(k)}, \qquad /16/$$

где

$$\chi(t(k)) = \int_0^{\pi} dF\,[A(t(k),F)]^{1/2} . \qquad /17/$$

Далее, необходимо минимизировать /16/ по совокупности точек $\{t(k)\}$.

С этой целью учтем, что $t(k)$ - медленно изменяющаяся функция k, и заменим суммирование по k в /16/ интегрированием, а разность $t(k+1)-t(k)$ - производной $t'(k)$. Возникающая при этом погрешность имеет порядок $0(N)$, что будет подтверждено ниже. Таким образом, остается минимизировать функционал

$$M_N(\Omega) = \frac{C_0}{4}\int_0^N dk\,\frac{\chi^2(t(k))}{t'(k)} \qquad /18/$$

с граничными условиями $t(0) = 0$, $t(N) = \pi/2$. Соответствующее уравнение Лагранжа - Эйлера можно записать в виде

$$-\frac{d}{dk}\left(\frac{\chi^2(t)}{t'^2(k)}\right) = 2\chi(t)\frac{d\chi}{dt}(t'(k))^{-1}. \qquad /19/$$

Представляя /19/ в форме, допускающей интегрирование по **k**:

$$\frac{d^2t}{dk^2}\left(\frac{dt}{dk}\right)^{-1} - 2\frac{d\chi}{dt}\,\frac{dt}{dk}(\chi(t))^{-1} = 0,$$

найдем решение этого уравнения:

$$\frac{dt}{dk} = \mathrm{const}\cdot\chi^2(t). \qquad /20/$$

Постоянная в /20/ может быть определена из граничных условий. Умножая обе части /20/ на $\frac{dk}{\chi^2(t)}$ и интегрируя от 0 до N, найдем $\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\chi^2(t)} = \mathrm{const}\cdot N$

или

$$\mathrm{const} = N^{-1}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\chi^2(t)} . \qquad /21/$$

После подстановки /20/, /21/ в /18/ интеграл вычисляется тривиально, и мы приходим к следующему результату, по форме совпадающему с /6/:

$$M_N(\Omega) = \frac{C_0}{4}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\chi^2(t)}\right]^{-1} N^2. \qquad /22/$$

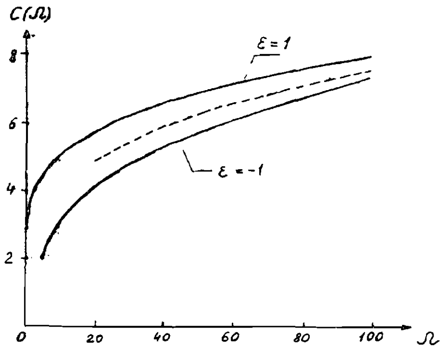

Рис.1. Зависимость коэффициента C_1 от параметра Ω: сплошная кривая - точный расчет по формуле /22/, штриховая - асимптотика C_1 при больших Ω, определяемая согласно /23/.

Дальнейшее вычисление коэффициента $C_1(\Omega)$ сводится к интегрированию в /17/ и /22/. Для $\Omega = 4$, $\epsilon = 1$ оно может быть выполнено аналитически и дает результат $C_1(4) = \pi\sqrt{2}$; для остальных значений Ω оно должно производиться численно. Результаты показаны на рис.1 сплошной линией. При $\Omega = 0$ коэффициент $C_1(0)$ совпадает с найденным в /7/; вначале он резко увеличивается с ростом Ω, затем медленно стремится к асимптотическому выражению

$$C_1(\Omega) \simeq C_1\,\Omega^{1/4}, \qquad /23/$$

где величина постоянной C_1 также может быть найдена путем численного интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{dt\cdot\cos^2 t}{\chi_0^2(t)}\right]^{-1},\quad \chi_0(t) = \int_0^{\pi} dF\,(\cos^4 t + 4\sin^4 t\,\sin^4 F)^{1/2}.$$

В заключение обсудим степень погрешности, возникающей при переходах от /12/ к /14/ и от /16/ к /18/. Интегрирование уравнения /20/ с учетом /21/ позволяет в неявной форме найти функцию $t(k)$:

$$\int_0^{t(k)}\frac{dt}{\chi^2(t)} = \frac{k}{N}\int_0^{\pi/2}\frac{d\tau}{\chi^2(\tau)}. \qquad /24/$$

Из /24/ легко получить оценку разности $t(k+1)-t(k)$: для $k \ll N$ она имеет порядок $0(N^{-1})$, а для $\frac{N-k}{N} - 1 - 0(N^{-1/3})$. При $N\to\infty$ эта разность стремится к 0 для всех значений k в интервале $[0, N-1]$. Поэтому переход от /12/ к /14/ не влияет на ведущий член асимптотики $M_N(\Omega)$.

Далее, проанализируем погрешность, вносимую заменой $t(k+1)-t(k)\to t'(k)$ и суммирования в /16/ интегрированием. Заметим, что из /19/ можно найти вторую производную d^2t/dk^2:

$$\frac{d^2t}{dk^2} = 2\frac{d}{dt}(\ln\chi(t))\left(\frac{dt}{dk}\right)^2 \sim \frac{d\chi}{dt}\chi^3 N^{-2}. \qquad /25/$$

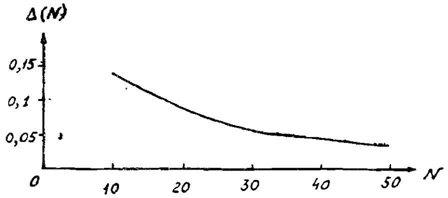

Рис.2. Отношение $\Delta(N) = \dfrac{M_N^{(i)}(\Omega) - M_N^{(s)}(\Omega)}{M_N^{(s)}(\Omega)}$ при $\Omega = 10$; $M_N^{(s)}$ и $M_N^{(i)}$ вычислены по формулам /16/ и /18/ для функции $t(k)$ /24/.

Поскольку $t'(k)\to 0$ при $N\to\infty$, то согласно /25/ в разложении $t(k+1)-t(k)\simeq t'(k)+\frac{1}{2}\frac{d^2t}{dk^2}+\ldots$ можно пренебречь членами более высокого порядка малости по сравнению с $t'(k)$. Наконец, для функции $t(k)$ вида /24/ подынтегральное выражение в /18/ сводится к постоянной, что оправдывает замену суммирования в /16/ интегрированием. На рис.2 показана относительная погрешность массы $M_N(\Omega)$, возникающая при переходе от /16/ к /18/ и рассчитанная для функции $t(k)$ /24/; видно, что с ростом N она быстро убывает. Это подтверждает сделанное выше заключение о том, что найденный по формуле /22/ коэффициент $C_1(\Omega)$ правильно определяет ведущий член асимптотики массы солитона в модели с лагранжианом /1/ при $N\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skyrme T.H.R. Proc.Roy. Soc., 1961, A260, p.127; Nucl. Phys., 1962, 31, p.556.
2. Adkins G.S., Nappi C.R., Witten E. Nucl.Phys., 1983, B228, p.552.
3. Braaten E., Ralston J.P. Phys.Rev., 1985, D31, p.598; Bander M., Hayot F. Phys.Rev., 1984, D30, p.1837.
4. Jackson A. et al. Nucl.Phys., 1985, A432, p.567; Sorace E., Tarlini M. Phys.Rev., 1985, D33, p.253.
5. Adkins G.S. Phys.Rev., 1986, D33, p.193.
6. Jackson A. et al. Phys.Lett., 1985, 154B, p.101; Mashaal M. et al. Phys.Rev.Lett., 1986, 56, p.436.
7. Богомольный Е.Б., Фатеев В.А. ЯФ, 1983, 37, с.228.
8. Gipson J.M., Tze H.C. Nucl.Phys., 1981, B183, p.524.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 мая 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Иноземцев В.И. Р2-86-317

Асимптотика массы солитона в модифицированной модели Скирма

Рассматривается ведущий член асимптотики массы сферически-симметричного солитона в обобщенной модели Скирма для больших значений топологического заряда, отождествляемого с барионным числом N. Показано, что асимптотика массы имеет вид $C \cdot N^2$. Исследована зависимость множителя C от параметров модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Inozemtsev V.I. P2-86-317

The Asymptotics of Soliton Mass in the Modified Skyrme Model

The leading term in the asymptotics of spherically symmetric soliton mass in the modified Skyrme model for large values of topological charge identified with baryon number N_2 is considered . It is shown that this term has the form C·N. The dependence of the coefficient C on the parameters of the model is investigated.

The investigation has been preformed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986