T 988

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-281

Ю.Н.Тюхтяев*, Р.Н.Фаустов

ПОПРАВКИ К ФЕРМИЕВСКОМУ РАСЩЕПЛЕНИЮ ОСНОВНОГО УРОВНЯ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА ПОРЯДКА $\alpha^2 \ln\alpha$

* Саратовский государственный университет

1986

Измерение сверхтонкого расщепления основного уровня позитрония выполнено в настоящее время с точностью $3{,}6\cdot 10^{-6}$, а мюония – $3{,}6\cdot 10^{-8}$. Для расчетов с подобной точностью соответствующих теоретических значений необходимо вычислить члены порядка α^6 в позитронии и $\alpha^6\cdot(\frac{m_e}{m_\mu})$ – в мюонии / α – постоянная тонкой структуры, m_e, m_μ – массы электрона и мюона соответственно/.

В настоящее время в теоретических исследованиях достигнута точность, позволяющая рассчитывать вклады в сверхтонкое расщепление основного уровня энергии водородоподобного /ВП/ атома порядка $\alpha^6(\frac{m_1}{m_2})\ln\alpha$ [1,2]. Применение для этих целей квазипотенциального метода, начатое работой [3], получило развитие в статьях [4,5].

Основные выводы выполненных исследований по определению уровней энергии ВП атомов сводятся вкратце к следующему. Суммарный логарифмический по α вклад в сверхтонкое расщепление от приводимых диаграмм с одной поперечной и n /$n = 0,1,2...$/ кулоновскими фотонными линиями равен нулю. Двухфотонные обмены поперечными фотонами приводят к поправке известной с точностью до α^5 величины сверхтонкого расщепления основного уровня ВП атома:

$$\Delta E = \frac{9}{2}\,\frac{\mu^2}{m_1 m_2}\cdot E_F\,\alpha^2\ln\alpha^{-1}, \qquad /1/$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса, $E_F = \frac{8}{3}\cdot\frac{\alpha^4\mu^3}{m_1 m_2}$ – величина фермиевского расщепления основного уровня.

Кулоновское взаимодействие, а также трехфотонная диаграмма с двумя поперечными и промежуточной кулоновской фотонными линиями дают суммарный вклад

$$\Delta E_C + \Delta E_{TCT} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\mu^2}{m_1 m_2}\cdot E_F\,\alpha^2\ln\alpha^{-1} \qquad /2/$$

/"C" и "T" символизируют соответственно обмены кулоновским и поперечным фотонами/.

Наконец, пара симметричных двухфотонных перекрестных диаграмм с кулоновской и поперечной фотонными линиями приводит к дополнительному расщеплению основного уровня энергии на величину

$$\Delta E_{CT}+\Delta E_{TC} = -(Q+2)\cdot\frac{\mu^2}{m_1\cdot m_2}\cdot E_F\,\alpha^2\ln\alpha^{-1}, \qquad /3/$$

где $Q=\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_2}{m_1}$.

В работах [4,5] отмечена необходимость релятивистской модификации кулоновской волновой функции

$$\phi_C(\vec p) = 8\pi\alpha\mu\,\phi_C(0)\,\phi_p^2,\quad \phi_p=(p^2+\alpha^2\mu^2)^{-1},\quad |\phi_C(0)|^2=\frac{\mu^3\alpha^3}{\pi}.$$

Однако ни в аналитическом виде, ни численно возникающая в связи с этим поправка к уровням энергии не была определена.

Такую возможность открывает более точное решение квазипотенциального уравнения Логунова - Тавхелидзе, которое для системы двух фермионов имеет вид

$$(F_E^{-1}-V_E)\,\psi_E=0, \qquad /4/$$

где $V_E=F_E^{-1}-(G^+)^{-1}$ - квазипотенциал, а

$$F_E^{-1}=(2\pi)^3\delta(\vec p-\vec q)\,(E-\epsilon_{1p}-\epsilon_{2p}),$$

$$\epsilon_{ip}=\sqrt{\vec p^{\,2}+m_i^2},\qquad [\dots]^+=\overset{*}{u}_1\overset{*}{u}_2\,[\dots]\,\gamma_{10}\gamma_{20}\,u_1u_2,$$

$$G(\vec p,\vec q\,;E)=(2\pi)^{-2}\int G(p_0,q_0\,;\vec p,\vec q\,;E)\,dp_0\,dq_0,$$

u_i - дираковский биспинор i-й частицы.

Выделим в этом уравнении взаимодействие с кулоновским ядром K_c^+ и обозначим через ΔE поправку к основному уровню энергии E_c нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом:

$$(F_{E_c}^{-1}+\Delta E-K_C^+-\tilde V_E)\,\psi_E=0;\qquad \Delta E=E-E_C;$$

$$\tilde V_E=V_E-K_C^+;\qquad K_C(\vec p,\vec q)=e_1e_2\gamma_{10}\gamma_{20}\cdot(\vec p-\vec q)^{-2}. \qquad /5/$$

Пусть E' - собственное значение энергии, соответствующее уравнению с ядром K_C^+,

$$(F_{E'}^{-1}-K_C^+)\,\psi_{E'}=0. \qquad /6/$$

Полный сдвиг искомого значения энергии E двухчастичной системы

относительно кулоновского представим суммой

$$\Delta E=\Delta E'+\Delta E_C,\quad \Delta E'=E-E',\quad \Delta E_C=E'-E_C. \qquad /7/$$

Тогда для применения теории возмущений исходное уравнение удобно записать в форме

$$(F_{E'}^{-1}-K_C^++\Delta E'-\tilde V_E)\,\psi_E=0. \qquad /8/$$

Учитывая, что ядро K_C^+ от энергии не зависит и для функции выполняются обычные условия нормировки и ортогональности, во втором порядке теории возмущений получим

$$\Delta E'\cong\langle\psi_{E'}|\tilde V_{E'}(1+\Delta F\cdot\tilde V_{E'})|\psi_{E'}\rangle,\qquad \Delta F=F(1+K_C^+F). \qquad /9/$$

Необходимую для вычисления этого сдвига собственную функцию найдем, решая уравнение /6/. Вспомогательная функция

$$\Phi_{E'}(\vec q)=8\mu E'(E'+\epsilon_{1q}+\epsilon_{2q})[2E'\cdot\epsilon_{1q}+E'^2+m_1^2-m_2^2]\times[2E'\epsilon_{2q}+E'^2+m_2^2-m_1^2]\,\psi_{E'}, \qquad /10/$$

удовлетворяет нерелятивистскому уравнению типа уравнения Шредингера:

$$\left(\frac{\vec p^{\,2}}{2\mu}+v_C-W_C+\Delta\epsilon+\delta K_C\right)\Phi_{E'}=0,\qquad \Delta\epsilon\cong-\Delta E_C,$$

$$\delta K_C\cong K_C^+(E'-\epsilon_{1q}-\epsilon_{2q})^{-1}f^{-1}(\vec q)-v_C, \qquad /11/$$

v_C - кулоновский потенциал, $W_C=E_C-m_1-m_2$, $f^{-1}(\vec q)=W_C-\frac{\vec q^{\,2}}{2\mu}$.

Решая это уравнение по теории возмущений, находим

$$\Delta E_C\cong\langle\phi_C|\delta K_C|\phi_C\rangle, \qquad /12/$$

$$\psi_{E'}(\vec p)\cong R_p[\phi_C(\vec p)+f\delta K_C\phi_C(\vec q)];\quad R_p=\frac{(\epsilon_{1p}+m_1)(\epsilon_{2p}+m_2)-p^2}{4m_1m_2}. \qquad /13/$$

В простейшем случае ядро взаимодействия двух частиц описывает обмен одним кулоновским или поперечным фотоном:

$$\delta K_C=K_C^+-v_C,\qquad V_E=F^{-1}\,\overline{G_0K_TG_0^+}\,F^{-1},$$

$$K_T=-\frac{e_1e_2}{k^2}\Big(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\vec k^{\,2}}\Big)\gamma_1^i\gamma_2^j;\quad \vec k=\vec p-\vec q;\quad i,j=0,1,2,3.$$

Выражение для соответствующей величины сверхтонкого расщепления имеет вид

$$\Delta E = \langle \phi_C | \delta K_C | \phi_C \rangle + \langle \phi'_C | (K_T)^+_{0F} | \phi'_C \rangle + \langle \phi'_C | (K_C G_0 K_T + K_T G_0 K_C)^+_{0F} | \phi'_C \rangle - \langle \phi'_C | (K_T)^+_{0F} \cdot F v_C | \phi_C \rangle - \langle \phi_C | v_C F (K_T)^+_{0F} | \phi'_C \rangle ; \qquad /14/$$

$$[\ldots]^+_{0F} = F^{-1} \overline{G_0 [\ldots] G_0^+} F^{-1} ,$$

где $\phi'_C(\vec p) = R_p \phi_C(\vec p)$, а R_p - фактор, возникающий из-за релятивистского характера квазипотенциального уравнения /4/.

Логарифмическую поправку порядка $\alpha^6 \ln\alpha$ к известному с точностью до α^5 значению сверхтонкого расщепления основного уровня ВП атома всегда обеспечивает стандартный интеграл

$$I_{CT} = (8\pi^2)^{-1} \int \frac{d\vec p}{\epsilon_{1p}\epsilon_{2p}} \phi_p \int \frac{d\vec q}{(\vec p - \vec q)^2} \phi_q \cong \frac{\pi^2 \ln\alpha^{-1}}{2 m_1 m_2} . \qquad /15/$$

Дополнительные степени p или q в числителе и факторы $p^2 + \alpha^2\mu^2$ или $q^2 + \alpha^2\mu^2$ в знаменателях выражений /14/ приводят к вкладам порядка α^6 или α^4, α^5 соответственно.

Величина вклада в сверхтонкое расщепление основного уровня ВП атома от обмена одним поперечным фотоном после интегрирования по энергетическим компонентам с помощью теории вычетов, перемножения матриц и учета симметрии подынтегрального выражения может быть представлена интегралом

$$\Delta_T E = \langle \phi'_C | F^{-1} \overline{G_0 K_T G_0^+} F^{-1} | \phi'_C \rangle =$$
$$= \frac{2\alpha^3 |\phi_C(0)|^2 \langle \vec\sigma_1 \cdot \vec\sigma_2 \rangle}{3 m_1 m_2 (2\pi)^3} \int \frac{d\vec p\, d\vec q}{\epsilon_{1p}\epsilon_{2p}} R_p R_q \phi_p \phi_q \left[1 + \frac{2(\epsilon_{1p} - m_1)(\epsilon_{2p} - m_2)}{(\vec p - \vec q)^2} \right] \times \qquad /16/$$
$$\times \left\{ \frac{\vec p^2 \vec q^2}{(\vec p - \vec q)^2} \left(\frac{\epsilon_{1p} + \epsilon_{1q} + 2m_1}{\epsilon_{2p} + \epsilon_{2q}} + \frac{\epsilon_{2p} + \epsilon_{2q} + 2m_2}{\epsilon_{1p} + \epsilon_{1q}} \right) + 2(\epsilon_{1p} + m_1)(\epsilon_{2p} + m_2) \right\}$$

Сравнение этого выражения со стандартным интегралом позволяет заключить, что первое слагаемое в фигурных скобках вносит вклады начиная с членов порядка $\alpha^6 \ln\alpha$, при этом факторы R_p и R_q можно положить равными единице. Наибольший вклад второго слагаемого - порядка α^4, однако отсутствие кулоновского фактора в выражениях, обеспечивающих такой вклад, не позволяет свести интеграл к стандартному.

Таким образом, при вычислении вклада $\alpha^6 \ln\alpha$ от диаграммы обмена одним поперечным фотоном в качестве волновой функции двухчастичной системы можно выбрать решение нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом.

С помощью этого же уравнения можно показать, что поправка к основному уровню энергии принимает вид

$$\langle \phi'_C | (K_T)^+_{0F} \cdot F v_C | \phi_C \rangle \cong \langle \phi_C | (K_T)^+_{0F} | \phi_C \rangle , \qquad /17/$$

то есть сводится к анализу однофотонного взаимодействия.

При исследовании вклада $\Delta_{CT}E$ в сверхтонкое расщепление от последовательного обмена кулоновским и поперечным фотонами /14/ остановимся более подробно на рассмотрении выражений, в которых точный учет факторов R_p и R_q необходим. Соответствующую часть вклада можно представить в виде интеграла

$$\Delta^R_{CT} E = \frac{2\alpha^4 \mu^2}{3\pi^5} |\phi_C(0)|^2 \langle \vec\sigma_1 \cdot \vec\sigma_2 \rangle \times \qquad /18/$$
$$\times \int d\vec p\, d\vec q\, d\vec k\, [\epsilon_{1k}\epsilon_{2k} \vec k_p^2]^{-1} \phi_p^2 \phi_q^2 \phi_k R_p A(\vec p, \vec q) R_q ; \qquad \vec k_p = \vec k - \vec p .$$

Через $A(\vec p, \vec q)$ обозначены нормировочные множители дираковских биспиноров в стандартном представлении. Нетрудно показать, что, вычисляя интеграл /18/ с точностью до $\alpha^6 \ln\alpha$, можно воспользоваться приближениями

$$R_p \cong 1 + (Q - 1) \cdot \frac{\vec p^2}{4 m_1 m_2} , \qquad /19/$$
$$R_p A(\vec p, \vec q) R_q = 1 + (Q - 2) \frac{\vec p^2 + \vec q^2}{8 m_1 m_2} .$$

При этом пропорциональный $\vec p^2$, $\vec q^2$ член этого разложения обеспечивает вклад

$$\Delta^R_{CT} E(\alpha^6 \ln\alpha) = \frac{8\alpha^4 (Q - 2)}{3 m_1 m_2 (2\pi)^5} \cdot |\phi_C(0)|^2 \langle \vec\sigma_1 \cdot \vec\sigma_2 \rangle \times \qquad /20/$$
$$\times \int p^2 \phi_p^2 d\vec p \int \phi_q^2 d\vec q \int (\epsilon_{1k}\epsilon_{2k} \vec k_p^2)^{-1} \phi_k d\vec k .$$

Интегрирование по переменной $\vec q$ приводит к стандартному интегралу, так что с учетом вклада симметричной диаграммы находим

$$2\Delta^R_{CT} E(\alpha^6 \ln\alpha) = (Q - 2) \cdot \frac{\mu^2}{m_1 m_2} E_F \alpha^2 \ln\alpha^{-1} . \qquad /21/$$

Если положить в выражении /18/ факторы R_p, $A(\vec{p},\vec{q})$ равными единице, то интеграл окажется пропорциональным α^4.

Это обстоятельство показывает, что релятивистские поправки могут приводить к членам порядка $\alpha^6 \ln\alpha$ лишь в выражениях, основной вклад которых пропорционален α^4.

Формула /14/ полностью содержит все подобные взаимодействия. Поэтому поправка /21/, полученная за счет релятивистской модификации кулоновской функции, является единственной и не может быть скомпенсирована другими вкладами в сверхтонкое расщепление, учитывающими релятивистский характер взаимодействия частиц в начальном и конечном состояниях.

Суммируя выражения /1/-/3/, /21/, получаем полный логарифмический по константе тонкой структуры α вклад в сверхтонкое расщепление основного уровня энергии ВП атома:

$$\Delta E = \frac{2\alpha^2\mu^2}{m_1 m_2} E_F \ln\alpha^{-1} . \qquad /22/$$

С учетом этой поправки теоретическая величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии в мюонии и позитронии составляет соответственно

$$\nu^{th}_{\mu e} = 4463304{,}7\ /1{,}9/\ \text{кГц}, \qquad /23/$$

$$\nu^{th}_{ee} = 203390\ /11/\ \text{МГц}, \qquad /24/$$

эти значения согласуются с последними теоретическими и экспериментальными данными [1,2,6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lepage G.P. Phys.Rev., 1977, vol.A16, No.3, p.863.
2. Bodwin G.T., Yennie D.R. Phys.Rep., 1978, vol.C43, No.6, p.267.
3. Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н. ТМФ, 1972, т.12, № 1, с.56.
4. Бойкова Н.А., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. ИФВЭ, Протвино, 1983, т.1, с.116.
5. Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля. ИФВЭ, Протвино, 1983, т.1, с.104.
6. Kinoshita T., Sapirstein J. In: Atomic Physics 9 (Ed. by R.S.Van Dyck, Jr., E.N.Forston). World Scientific P.Co., Singapore, 1984, p.38.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 мая 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н. P2-86-281

Поправки к фермиевскому расщеплению основного уровня энергии водородоподобного атома порядка $\alpha^2\ln\alpha$

С помощью квазипотенциального уравнения Логунова - Тавхелидзе определена релятивистская поправка к кулоновской волновой функции, рассчитана величина сверхтонкого расщепления основного уровня энергии водородоподобного атома.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Tyukhtyaev Yu.N., Faustov R.N. P2-86-281

The Correction of the Order of $\alpha^2\ln\alpha$ to the Fermi Splitting of the Hydrogen-Like Atom Ground State

On the basis of the Logunov - Tavkhelidze quasipotential equation the relativistic correction to the Coulomb wave function is found. A value of the hyperfine splitting of the ground state of hydrogen atom is calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986