объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-276

В.К.Мельников

ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в журнал "Physics Letters"

1986

В настоящей заметке речь идет о новом явлении в теории нелинейных интегрируемых систем. Суть его состоит в следующем. У рассматриваемой ниже нелинейной интегрируемой системы обнаружены решения, имеющие различные асимптотики при $t \to -\infty$ и при $t \to \infty$. Эти асимптотики описывают различные состояния, характеризующиеся появлением или исчезновением новой дополнительной волны. Поскольку эта дополнительная волна имеет отличную от основной волны природу, то описываемые названными выше решениями процессы естественно назвать излучением (или рождением) волны и поглощением (или уничтожением) волны.

Итак, рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\kappa|v|^2\right)\right] = 0, \\
i\frac{\partial v}{\partial y} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},
\end{gathered}
\tag{I}
$$

описывающую (в некотором приближении) взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу. Здесь u – амплитуда длинной волны, v –комплексная огибающая пакета коротких волн, t – время, x, y – координаты на плоскости, параметр κ удовлетворяет условию $\kappa^2 = 1$.

Система (I) обладает двумя типами решений, описывающих уединенные волны. Решения первого типа определяют бегущую волну вида

$$
u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x + 2\nu_1 y - \tau_1 t)]}, \quad v = 0,
$$

где вещественные параметры μ_1, ν_1, τ_1 удовлетворяют условию $\tau_1 = 4(\mu_1^2 - 3\nu_1^2)$. Решения второго типа определяют стационарную волну вида

$$
u = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\nu_2 y)]},
$$

$$
v = c_0 \frac{\exp[i\nu_2(x + 2\nu_2 y)]}{ch[\mu_2(x + 2\nu_2 y)]} \exp[-(\mu_2^2 + \nu_2^2) y],
$$

где вещественные параметры μ_2, ν_2 и комплексная величина c_0 удовлетворяют соотношению $\kappa|c_0|^2 + (\mu_2^2 - 3\nu_2^2)\mu_2^2 = 0$, и, следовательно, для существования волн этого типа необходимо выполнение условия $(\mu_2^2 - 3\nu_2^2)\kappa < 0$.

С помощью метода обратной задачи рассеяния [I,2] может быть найдено точное решение системы (I), описывающее взаимодействие волны первого типа с волной второго типа. С этой целью возьмем функции D и V вида

$$D = 1 + \alpha_0 \exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y - \tau_1 t)] + \beta_0 \exp[2\mu_2(x+2\nu_2 y)] +$$
$$+ \gamma_0 \exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+2\mu_2(x+2\nu_2 y)],$$

$$V = -\left\{1+\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3+\bar\omega_1}\alpha_0\exp[2\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)]\right\}\times$$
$$\times 2c_0\exp[\mu_2(x+2\nu_2 y)]\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y)-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y],$$

где $\alpha_0>0$, $\beta_0 = -\dfrac{\kappa|c_0|^2}{(\mu_2^2-3\nu_2^2)\mu_2^2}$, $\gamma_0=\alpha_0\beta_0\left|\dfrac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1+\bar\omega_3}\right|^2$,

$\tau_1 = 4(\mu_1^2-3\nu_1^2)$, $\omega_1=\mu_1+i\nu_1$, $\omega_3=\mu_2+i\nu_2$ и $\omega_1+\bar\omega_3\neq 0$.

Согласно результатам работы [2] функции

$$u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad v=\frac{V}{D}$$

удовлетворяют системе (I), т.е. являются ее решением. Легко видеть, что если $(\mu_2^2-3\nu_2^2)\kappa<0$, то определенные так функции u, v не имеют особенностей при любых вещественных x, y, t.

Выясним теперь, каково поведение у этого решения. Рассмотрим сначала случай $\omega_1\neq\omega_3$. Предполагая для определенности $\mu_1\tau_1>0$, мы видим, что при $t\to\infty$ наше решение стремится к стационарной волне вида

$$u_+ = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 y+x_0^+)]},$$

$$v_+ = c_0^+\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 y+x_0^+)]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y], \qquad (2)$$

где $x_0^+ = \frac{1}{2\mu_2}\ln\beta_0$, $c_0^+=-c_0\exp(-\mu_2 x_0^+)$, а при $t\to-\infty$ рассматриваемое нами решение стремится к стационарной волне вида

$$u_- = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 y+x_0^-)]},$$

$$v_- = c_0^-\frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 y)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 y+x_0^-)]}\exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)y], \qquad (3)$$

где $x_0^- = \frac{1}{2\mu_2}(\ln\gamma_0-\ln\alpha_0)$, $c_0^- = -c_0\exp(-\mu_2 x_0^-)\dfrac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3+\bar\omega_1}$.

Нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$x_0 = x_0^+-x_0^- = -\frac{1}{\mu_2}\ln\left|\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_1+\bar\omega_3}\right|,\quad |c_0^+|=|c_0^-|.$$

Заметим, что если $\mu_1\tau_1<0$, то интересующее нас решение стремится к волне (2) при $t\to-\infty$, а при $t\to\infty$ оно стремится к волне (3).

Кроме того, в нашем решении содержится бегущая волна, которая при $\mu_2\tau_1>0$ и $t\to\pm\infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\delta_+]},\quad v=0,\quad t\to\infty, \qquad (4)$$

$$u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1(x+2\nu_1 y-\tau_1 t)+\delta_-]},\quad v=0,\quad t\to-\infty, \qquad (5)$$

где $\delta_+ = \frac12(\ln\gamma_0-\ln\beta_0)$, $\delta_-=\frac12\ln\alpha_0$. Заметим, что при $\mu_2\tau_1<0$ асимптотика (4) имеет место при $t\to-\infty$, а при $t\to\infty$ справедлива асимптотика (5).

Таким образом, при $\omega_1\neq\omega_3$ рассматриваемое нами решение действительно описывает процесс взаимодействия волны первого типа с волной второго типа. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению этих волн в окрестности точки $x+2\nu_1 y-\tau_1 t+\frac{1}{2\mu_1}(\delta_++\delta_-)=0$, $x+2\nu_2 y+\frac12(x_0^++x_0^-)=0$, $\nu_1\neq\nu_2$. Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любой из взаимодействующих волн профиль этих волн приобретает указанный ранее вид. Вдали от области взаимодействия результат взаимодействия выражается в фазовом сдвиге обеих волн. При $\nu_1=\nu_2$ искажение взаимодействующих волн достигает максимума в момент времени $t=\frac{1}{\tau_1}\left[\frac{1}{2\mu_1}(\delta_++\delta_-)-\frac12(x_0^++x_0^-)\right]$ и затухает со временем при $t\to\pm\infty$.

Ситуация меняется коренным образом, если $\omega_1 = \omega_3$, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В этом случае при $\mu\tau_1 > 0$ и $t \to \infty$ наше решение стремится к стационарной волне вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y + x_c^+)]},$$
$$v = C_c^+ \frac{\exp[i\nu(x+2\nu y)]}{ch[\mu(x+2\nu y + x_c^+)]} \exp[-i(\mu^2+\nu^2)y], \tag{6}$$

где $x_c^+ = \frac{1}{2\mu}\ln\beta_c$, $C_c^+ = -C_c \exp(-\mu x_c^+)$, а при $t \to -\infty$ рассматриваемое нами решение имеет асимптотику бегущей волны вида

$$u = \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x+2\nu y - \tau_1 t) + \delta_-]}, \quad v = 0, \tag{7}$$

где $\delta_- = \frac{1}{2}\ln\alpha_c$. Наоборот, при $\mu\tau_1 < 0$ интересующее нас решение стремится к стационарной волне вида (6) при $t \to -\infty$, а при $t \to \infty$ имеет асимптотику бегущей волны вида (7).

Таким образом, при $\omega_1 = \omega_3$ наше решение имеет разные асимптотики при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$. Их различие состоит прежде всего в том, что в одном случае мы имеем нулевую асимптотику для v-волны, а в другом случае получаем для v ненулевую асимптотику. Следовательно, при $\omega_1 = \omega_3$ рассматриваемое нами решение описывает переход из одного состояния в другое, т.е. рождение или уничтожение v-волны. При этом бегущая волна тормозится и излучает v-волну в случае $\mu\tau_1 > 0$, и наоборот, при $\mu\tau_1 < 0$ стационарная u-волна поглощает v-волну и приходит в движение. Описанные выше превращения носят существенно нелинейный характер. Они невозможны в линейной системе. Отметим, что существует тесная связь указанного выше явления с определенными свойствами предложенного в заметке /1/ для интегрирования системы (1) линейного оператора.

В заключение отметим, что аналогичные явления имеют место и для других систем, перечисленных в заметке /1/.

Литература

1. Mel'nikov V.K. Lett. Math. Phys., 1983, v. 7, No 2, p. 129-136.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-85-958, Дубна, ОИЯИ, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 апреля 1986 года.

Мельников В.К. Р2-86-276
Излучение и поглощение волн
в нелинейной интегрируемой системе

Показано, что в нелинейной интегрируемой системе при определенных условиях происходит излучение /или рождение/ и поглощение /или уничтожение/ волн. Это явление носит существенно нелинейный характер и в нелинейной интегрируемой системе обнаружено впервые.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Mel'nikov V.K. P2-86-276
Wave Emission and Absorption
in the Nonlinear Integrable System

It is shown that in a nonlinear integrable system under specific conditions there occurs emission (or creation) and absorption (or annihilation) of waves. This phenomenon has essentially a nonlinear nature and in the nonlinear integrable system is observed for the first time.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986