объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-234

В.К.Мельников

ГАШЕНИЕ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в журнал "Письма в ЖЭТФ"

1986

В известном приближении взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу, описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial x}|v|^2 = 0, \quad i\frac{\partial v}{\partial t} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (\mathrm{I})$$

где u -амплитуда длинной волны, v -комплексная огибающая пакета коротких волн, t - время, x, y - координаты на плоскости, параметр κ удовлетворяет условию $\kappa^2 = 1$.

Система (I) обладает двумя типами решений, описывающих уединенные волны. Волны первого типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1 x + 2\mu_1\nu_1(y+t)]}, \quad v = 0,$$

где параметры μ_1, ν_1 принимают любые вещественные значения. Волны второго типа имеют вид

$$u = \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x+2\nu_2 t)]}, \quad v = c_0 \frac{\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t)]}{ch[\mu_2(x+2\nu_2 t)]} \exp[-i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где вещественные параметры μ_2, ν_2 и комплексная величина c_0 удовлетворяют соотношению $|c_0|^2 + 2\kappa\mu_2^2\nu_2 = 0$ и, следовательно, для существования волн этого типа необходимо выполнение условия $\kappa\nu_2 < 0$.

С помощью метода обратной задачи рассеяния /I,2/ может быть найдено точное решение системы (I), описывающее взаимодействие волны первого типа с волной второго типа. С этой целью возьмем функции D и V вида

$$D = 1 + \alpha_0\exp[2\mu_1 x + 4\mu_1\nu_1(y+t)] + \beta_0\exp[2\mu_2(x+2\nu_2 t)] +$$
$$+ \gamma_0\exp[2\mu_1 x + 4\mu_1\nu_1(y+t) + 2\mu_2(x+2\nu_2 t)],$$

$$V = -\left\{1 + \alpha_0\frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 + \bar{\omega}_1}\exp[2\mu_1 x + 4\mu_1\nu_1(y+t)]\right\} \times$$
$$\times 2c_0\exp[\mu_2(x+2\nu_2 t)]\exp[i\nu_2(x+2\nu_2 t) - i(\mu_2^2+\nu_2^2)t],$$

где $\alpha_c > 0$, $\beta_c = -\frac{\kappa |c_c|^2}{2\mu_2^2 \nu_2}$, $\gamma_c = \alpha_c \beta_c \left| \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 + \bar{\omega}_1} \right|^2$, $\omega_1 = \mu_1 + i\nu_1$, $\omega_3 = \mu_2 + i\nu_2$ и $\bar{\omega}_1 + \omega_3 \neq 0$. Согласно результатам работы /2/ функции $u = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D$, $v = \frac{V}{D}$ являются решением системы (I). Очевидно, что если $\kappa \nu_2 < 0$, то найденное решение не имеет особенностей при любых вещественных x, y, t.

Выясним теперь поведение полученного выше решения. Рассмотрим сначала случай $\omega_1 \neq \omega_3$. С помощью несложных вычислений находим, что если $\mu_1 \nu_1 > 0$, то при $y \to \infty$ наше решение имеет асимптотику

$$u \sim \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\nu_2 t + x_c^+)]},$$

$$v \sim c_c^+ \frac{\exp[i\nu_2(x + 2\nu_2 t)]}{ch[\mu_2(x + 2\nu_2 t + x_c^+)]} \exp[-i(\mu_2^2 + \nu_2^2)t], \tag{2}$$

где $x_c^+ = \frac{1}{2\mu_2}(\ln \gamma_c - \ln \alpha_c)$, $c_c^+ = -c_c \exp(-\mu_2 x_c^+) \frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_3 + \bar{\omega}_1}$, а при $y \to -\infty$ имеет асимптотику

$$u \sim \frac{2\mu_2^2}{ch^2[\mu_2(x + 2\nu_2 t + x_c^-)]}, \tag{3}$$

$$v \sim c_c^- \frac{\exp[i\nu_2(x + 2\nu_2 t)]}{ch[\mu_2(x + 2\nu_2 t + x_c^-)]} \exp[-i(\mu_2^2 + \nu_2^2)t],$$

где $x_c^- = \frac{1}{2\mu_2} \ln \beta_c$, $c_c^- = -c_c \exp(-\mu_2 x_c^-)$. Согласно определению величин x_c^+, x_c^-, c_c^+ и c_c^- имеем

$$x_c = x_c^+ - x_c^- = \frac{1}{\mu_2} \ln \left| \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 + \bar{\omega}_3} \right|, \quad |c_c^+| = |c_c^-|.$$

Заметим, что если $\mu_1 \nu_1 < 0$, то асимптотика (2) имеет место при $y \to -\infty$, а при $y \to \infty$ справедлива асимптотика (3).

Посмотрим теперь, как ведут себя функции u, v в окрестности прямой $y = ax$ при $a \in (-\infty, \infty)$. Нетрудно убедиться, что при удалении в бесконечность вдоль прямой $y = ax$ функция $u \to 0$ при любом значении $a \neq -\frac{1}{2\nu_1}$. Наоборот, при $a = -\frac{1}{2\nu_1}$ функция u имеет ненулевую асимптотику. Пусть для определенности $\mu_2 > 0$.

Тогда при $x \to \infty$ имеем

$$u \sim \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1 x + 2\mu_1\nu_1(y + t) + \delta_+]}, \quad \text{где} \quad \delta_+ = \frac{1}{2}(\ln \gamma_c - \ln \beta_c), \tag{4}$$

а при $x \to -\infty$ справедлива асимптотика

$$u \sim \frac{2\mu_1^2}{ch^2[\mu_1 x + 2\mu_1\nu_1(y + t) + \delta_-]}, \quad \text{где} \quad \delta_- = \frac{1}{2} \ln \alpha_c. \tag{5}$$

Заметим, что если $\mu_2 < 0$, то асимптотика (4) имеет место при $x \to -\infty$, а при $x \to \infty$ справедлива асимптотика (5). Далее, легко проверить, что при удалении в бесконечность вдоль прямой $y = ax$ при любом $a \in (-\infty, \infty)$ имеем $v \to 0$.

Таким образом, при $\omega_1 \neq \omega_3$ рассматриваемое нами решение действительно описывает взаимодействие волны первого типа с волной второго типа. Нелинейный характер взаимодействия приводит к сильному искажению этих волн в окрестности точки $x + 2\nu_2 t + \frac{1}{2}(x_c^+ + x_c^-) = 0$, $x + 2\nu_1(y + t) + \frac{1}{2\mu_1}(\delta_+ + \delta_-) = 0$. Однако при удалении в бесконечность вдоль гребня любой из взаимодействующих волн профиль этих волн приобретает указанный ранее характер. Вдали от области взаимодействия результат взаимодействия выражается в фазовом сдвиге обеих волн.

Ситуация меняется коренным образом, если $\omega_1 = \omega_3$, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В этом случае при $\mu\nu > 0$ и $y \to \infty$ имеем $u \to 0$, $v \to 0$, а при $y \to -\infty$ справедлива асимптотика

$$u \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu(x + 2\nu t + x_c^-)]}, \tag{6}$$

$$v \sim c_c^- \frac{\exp[i\nu(x + 2\nu t)]}{ch[\mu(x + 2\nu t + x_c^-)]} \exp[-i(\mu^2 + \nu^2)t],$$

где $x_c^- = \frac{1}{2\mu} \ln \beta_c$, $c_c^- = -c_c \exp(-\mu x_c^-)$. Наоборот, при $\mu\nu < 0$ и $y \to -\infty$ имеем $u \to 0$, $v \to 0$, а при $y \to \infty$ справедлива асимптотика (6). Далее, при удалении в бесконечность вдоль прямой $y = ax$ имеем $u \to 0$, $v \to 0$ при любом значении $a \neq -\frac{1}{2\nu}$. При $a = -\frac{1}{2\nu}$ и $\mu > 0$ имеем $u \to 0$, $v \to 0$, если $x \to \infty$, а при $x \to -\infty$ справедлива асимптотика

$$u \sim \frac{2\mu^2}{ch^2[\mu x + 2\mu\nu(y+t) + \delta_-]}, \quad v \to 0, \quad \delta_- = \frac{1}{2}\ln\alpha_0. \tag{7}$$

Наоборот, при $a = -1/2\nu$ и $\mu < 0$ имеем $u \to 0$, $v \to 0$, если $x \to -\infty$, а при $x \to \infty$ справедлива асимптотика (7).

Таким образом, в случае $\omega_1 = \omega_3$ асимптотика нашего решения сходна с найденной ранее для случая $\omega_1 \neq \omega_3$ асимптотикой только с одной стороны от области взаимодействия. С другой стороны от области взаимодействия мы получили нулевую асимптотику, т.е. при $\omega_1 = \omega_3$ две волны разных типов гасят друг друга в результате взаимодействия. Это явление носит существенно нелинейный характер и невозможно в линейной системе. Оно тесно связано с определенными свойствами предложенного в заметке /I/ для интегрирования системы (I) линейного оператора.

В заключение отметим, что аналогичное явление имеет место и для других систем, перечисленных в заметке /I/.

Литература:

I. Mel'nikov V.K. Lett. Math. Phys., I983, v.7, No 2, p. I29–I36.
2. Мельников В.К. Препринт ОИЯИ Р2-85-958, Дубна: ОИЯИ, I985.

Рукопись поступила в издательский отдел
I4 апреля I986 года.

Мельников В.К. Р2-86-234

Гашение волн в нелинейной интегрируемой системе

Найдены условия, при которых две уединенные волны, распространяющиеся на плоскости x,y под углом друг к другу, гасят друг друга. Это явление носит существенно нелинейный характер и в нелинейной интегрируемой системе обнаружено впервые.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой.

Mel'nikov V.K. P2-86-234

Wave Cancelation in the Nonlinear Integrable System

The conditions are found under which two solitary waves propagating on the x,y plane at an angle to each other cancel out. This phenomenon is essentially of a nonlinear nature and is found in the nonlinear integrable system for the first time.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986