объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-219

А.Н.Квинихидзе, В.А.Матвеев, А.М.Хведелидзе

КОВАРИАНТНЫЙ ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ В СОСТАВНЫХ МОДЕЛЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика" и на Межд.семинар "Кварки-86", Тбилиси.

1986

В квантовой теории поля исходят из представления о взаимодействии, в котором развитие системы во времени описывается волновым вектором $\Phi(t)$, удовлетворяющим уравнению Шредингера

$$i\,\frac{d\Phi(t)}{dt} = H\Phi(t), \tag{1}$$

где полный гамильтониан H представляется в виде суммы гамильтониана свободного движения H_0 и гамильтониана взаимодействия H_I. Формальное решение уравнения (I) имеет вид

$$\Phi(t) = e^{-iHt}\Phi(0). \tag{2}$$

На самом деле точное решение удается получить лишь в ряде простых моделей, поэтому обычно используют метод теории возмущений, позволяющий воспроизвести оператор эволюции во времени

$$U(t_1,t_2) = e^{iH_0t_1}\,e^{-iH(t_1-t_2)}\,e^{-iH_0t_2} \tag{3}$$

в любом порядке по степеням малости взаимодействия

$$U(t_1,t_2) = T\exp i\int_{t_1}^{t_2} dt'\, H_I(t'). \tag{4}$$

Рассмотрение оператора эволюции (3) необходимо для выделения из e^{-iHt} конечного операторного множителя в пределе $t\to\infty$, что важно для введения в теорию S-матрицы.

Перейдем к более общим преобразованиям группы Пуанкаре, с точки зрения которой трансляции во времени (2) не должны быть выделены в смысле определения эволюции квантовой системы.

§ I. Преобразование буста и ковариантный оператор эволюции

Сущность инвариантности Пуанкаре сводится к тому, что в пространстве векторов состояний существует унитарное преобразование $U(a,\Lambda)$, связанное с переходами между двумя различными системами отсчета

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}x^\nu + a_\mu, \tag{5}$$

$$U(a,\Lambda) = \exp\left(ia_\mu\hat{P}^\mu\right)\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu}\right), \tag{6}$$

где $\hat{P}^{\mu}$, $\hat{M}^{\mu\nu}$ – генераторы неоднородной группы Лоренца, построенные согласно теореме Нетер через заданный лагранжиан $\mathcal{L}$. Вектор состояния $|P\rangle$, соответствующий системе с 4- импульсом P, преобразуются следующим образом (при $a_\mu = 0$):

$$U(\Lambda)|P\rangle = |\Lambda P\rangle \tag{7}$$

(для простоты спиновые степени свободы не рассматриваются). Рассмотрим преобразование буста Λ^{λ}, $\Lambda^{\lambda}\lambda = (1,\vec{0})$, где $\lambda^2 = 1$, $\lambda^0 > 0$,

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1+2\lambda^0}{1+\lambda^0}\delta^0_\mu \lambda_\nu - \frac{1}{1+\lambda^0}\left(\lambda_\mu\lambda_\nu + \delta^0_\mu\delta^0_\nu + \lambda_\mu\delta^0_\nu\right),$$

которому соответствуют параметры

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\operatorname{arcsh}|\vec{\lambda}|}{|\vec{\lambda}|}\left(\lambda_\mu\delta^0_\nu - \lambda_\nu\delta^0_\mu\right). \tag{8}$$

Тогда согласно (6)

$$U(\Lambda^{\lambda}) \equiv U_\lambda = \exp\left(i\,\frac{\operatorname{arcsh}|\vec{\lambda}|}{|\vec{\lambda}|}\,\lambda_i \hat{M}^{io}\right). \tag{9}$$

Аналогично (3) введем в рассмотрение оператор

$$A(\lambda) = \overset{\circ}{U}{}^{+}_{\lambda} U_\lambda\,, \tag{10}$$

где $\overset{\circ}{U}_\lambda$ – унитарный оператор преобразований Лоренца в отсутствие взаимодействия.

Как и в случае вычисления S -матрицы либо оператора эволюции (3), необходимо обратиться к теории возмущений по константе связи. Согласно определению (10), (9)

$$A(\lambda) \equiv A(\omega) = \exp\left(-i\omega n_j \overset{\circ}{\hat{M}}{}^{jo}\right)\exp\left(i\omega n_j \hat{M}^{jo}\right), \tag{11}$$

где $\omega = \operatorname{arcsh}|\vec{\lambda}|$, $\vec{n} = \vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$,

$\overset{\circ}{\hat{M}}{}^{\mu\nu}$ – генераторы группы Лоренца без учета взаимодействия. Из теоремы Нетер и начальных условий, накладываемых на поля $\Psi_\alpha(x)$ и канонические импульсы $\pi_\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\left(\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x^0}\right)$, в представлении Гейзенберга (при $t = 0$ $\Psi_\alpha(x)$ и $\pi_\alpha(x)$ совпадают со свободными, с точностью до перенормировочных множителей) имеем

$$\hat{M}^{io} = \overset{\circ}{\hat{M}}{}^{io} - \int x^i \mathcal{H}_I(x)\, d^4x\, \delta(x^0),$$

$$\hat{M}^{ij} = \overset{\circ}{\hat{M}}{}^{ij}, \qquad i,j = 1,2,3\,, \tag{12}$$

где $\mathcal{H}_I(x)$ – плотность гамильтониана взаимодействия. Следовательно, из всех генераторов группы Пуанкаре лишь оператор энергии и три оператора лоренц-вращений зависят от вида взаимодействия. С оператором энергии связан хорошо известный оператор эволюции состояния во времени (3). Роль оставшихся трех выясняется в результате изучения выражения (6). В полной аналогии с построением теории возмущений для S -матрицы исходим из дифференциального уравнения

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = i\,B(\omega)A(\omega) \tag{13}$$

с начальным условием $A(0) = I$, где

$$B(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\int \theta(\lambda\cdot x)\mathcal{H}_I(x)\, d^4x\,. \tag{14}$$

Перепишем (13) в виде неоднородного интегрального уравнения

$$A(\omega) = I + i\int_0^\omega d\omega' B(\omega')A(\omega')\,, \tag{15}$$

где условие $A(0) = I$ учтено автоматически. Решая уравнение (15), с помощью итераций получим искомое разложение оператора $A(\lambda)$ по степеням константы связи

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad A_0 = I\,,$$

$$A_n = i^n \int_0^\infty \theta(\omega-\omega_1)\theta(\omega_1-\omega_2)\dots\theta(\omega_{n-1}-\omega_n)B(\omega_1)B(\omega_2)\dots B(\omega_n)\,d\omega_1\dots d\omega_n\,. \tag{16}$$

Форма (16) уже пригодна для практических расчетов, однако с точки зрения физической интерпретации представляют интерес другие представления.

Используя (14) для взятия интегралов по ω_i в (16), получим

$$A_n = i^n \int \theta\left(\operatorname{th}\omega - \frac{x_1^0}{\tilde{x}_1}\right)\theta\left(\frac{x_1^0}{\tilde{x}_1} - \frac{x_2^0}{\tilde{x}_2}\right)\dots\theta\left(\frac{x_{n-1}^0}{\tilde{x}_{n-1}} - \frac{x_n^0}{\tilde{x}_n}\right)\theta\left(\frac{x_n^0}{\tilde{x}_n}\right)\times$$

$$\times\, \varepsilon(x_1^0)\dots\varepsilon(x_n^0)\,\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\dots\mathcal{H}_I(x_n)\, d^4x_1\dots d^4x_n\,, \tag{17}$$

где $\tilde{x}_i = \vec{x}_i\cdot\vec{n}$.

Поэтому оператору $A(\lambda)$ можно придать вид экспоненциальной функции с упорядочением T_x по переменной [I)] $x^0/\underset{\sim}{x}$:

$$A(\lambda)=T_x \exp i\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(x^0)\,\theta\Big(\operatorname{th}\omega-\frac{x^0}{\underset{\sim}{x}}\Big)\,\theta\Big(\frac{x^0}{\underset{\sim}{x}}\Big)\mathcal{H}_I(x)\,d^4x$$

$$A(\lambda)=T_x \exp i\int_{\Omega}\varepsilon(x^0)\mathcal{H}_I(x)\,d^4x\,, \tag{I8}$$

где область Ω заштрихована на рис. I.

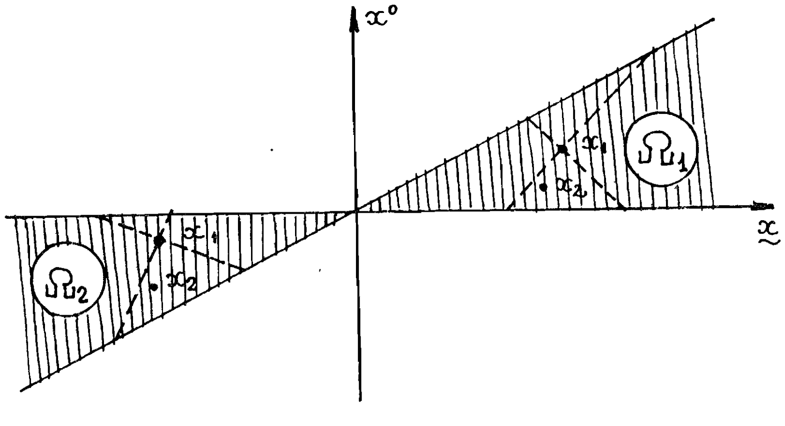

Рис. I

Исследуя указанные на рисунке I области Ω_1 и Ω_2 в представлении (I8) и используя условие причинности, можно перейти к обычному хронологическому упорядочению (Приложение А):

$$A(\lambda)=\Big\{T\exp i\int_{\Omega_1}d^4x_1\mathcal{H}_I(x_1)\Big\}\Big\{T\exp i\int_{\Omega_2}d^4x\,\mathcal{H}_I(x)\Big\}^{+}. \tag{I9}$$

Форма записи (I9) указывает на то, что $A(\lambda)$ есть оператор эволюции от поверхности $x_0=0$ к поверхности $\lambda\cdot x=0$:

I) T_x-упорядочение определяется следующим образом :

$$T_x\big(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)\big)\equiv\theta\Big(\frac{x_1^0}{\underset{\sim}{x_1}}-\frac{x_2^0}{\underset{\sim}{x_2}}\Big)\mathcal{H}_I(x_1)\cdot\mathcal{H}_I(x_2)\;+\;(1\leftrightarrow 2).$$

$$A(\lambda)=U(\lambda\cdot x=0\,,\,x_0=0). \tag{20}$$

Пользуясь (I9), нетрудно проверить, что $A(\lambda)$ удовлетворяет уравнению, предложенному Н.Н. Боголюбовым [I,2] :

$$\frac{\partial A(\lambda)}{\partial\vec{\lambda}}=-i\Big[\int\frac{\partial\theta(\lambda\cdot x)}{\partial\vec{\lambda}}\mathcal{H}_I(x)\,d^4x\Big]A(\lambda). \tag{21}$$

В работе [I] было отмечено, что в ковариантной формулировке основных уравнений теории поля достаточно исходить из представления, в котором волновой вектор Φ рассматривается как функция параметров λ,τ ; $\lambda^2=1$, $\lambda^0>0$, задающих произвольную пространственно-подобную гиперплоскость

$$\lambda\cdot x=\tau\,. \tag{22}$$

§ 2. Релятивистский формфактор в терминах волновых функций покоящихся составных систем

Предложенные в предыдущем параграфе представления (I6), (I8), (I9) могут быть использованы в теории взаимодействия релятивистских составных систем.

Если S -матрица рассеяния элементарных частиц (в моделях теории поля, в которых физическим частицам сопоставляются локальные полевые операторы) задается лишь асимптотикой оператора эволюции (3) $t_1\to\infty$ $t_2\to-\infty$, то для описания процессов рассеяния в составных моделях необходимо учесть всю область изменения переменной времени t_1 , t_2 . Именно изучение полюсной структуры коэффициентов Фурье разложения матричных элементов оператора (3) по переменным, сопряженным t_1 , t_2, позволяет выявить всю необходимую информацию об S -матрице рассеяния составных частиц. В результате можно получить представление, в котором явно вычисляется (в любом порядке теории возмущений) лишь часть, соответствующая рассеянию высвобожденных из связанного состояния составляющих. В полном выражении для S--матрицы эта часть интегрируется в произведении с волновыми функциями связанного состояния [3], задача определения которых , как известно, выходит за рамки теории возмущений. Ясно, что такого рода функции, описывающие переход физической частицы в составляющие, необходимы в любом из формализмов составных частиц. Задачу построения S--матрицы рассеяния составных систем можно значительно упростить, если свести ее не теоретико-возмущенческую часть к изучению лишь волновых функций связанного состояния в системе покоя. Другими словами, необходим метод, позволяющий учитывать импульс составной системы. Ясно, что речь идет о релятивистских импульсах, поскольку в нерелятивистской квантовой механике, благодаря галилеевской инвариантности, такой проблемы не существует. В случае же квантовой теории поля не только относительное движение составляющих, но и движение составной системы как целого определяется динамикой взаимодействия. Ниже мы покажем, что эти две проблемы можно разделить, причем для изучения движения составной системы как целого на основе результатов предыдущего параграфа развивается теория возмущений по константе взаимодействия. Предлагается ковариантный подход к описанию взаимодействия составных частиц и построению соответствующей S -матрицы рассеяния. Определяющую роль в построении нашего формализма играет ковариантное уравнение Шредингера и следующий из него инвариантный оператор Пуанкаре эволюции состояния между двумя произвольными пространственно-подобными гиперплоскостями (22). С его помощью осуществляется связь между волновыми векторами состояний, заданными в различных системах отсчетов. Отметим в этой связи работы /4,5/, посвященные рассмотрению аналогичной проблемы квазипотенциальной теории релятивистских формфакторов с помощью лоренц-инвариантного приравнивания времен в волновых функциях Бете – Солпитера. Кроме того, существует целое направление исследований, основанных на формулировке квазипотенциального подхода на нуль-плоскости, в которых изучаются процессы столкновения составных частиц при высоких энергиях с большими передачами импульсов. Здесь проблема учета импульсов составных частиц, участвующих во взаимодействии, обходится за счет удачного выбора системы отсчета $P_z \to \infty$ /6,7,8/.

Вопросом построения S -матрицы рассеяния составных частиц из оператора (3) в общем случае мы займемся в другом месте. Принцип решения вышеизложенной проблемы можно продемонстрировать на более простом примере рассмотрения релятивистского формфактора связанного состояния

$$F_\mu(P',P) = \langle P' | J_\mu(0) | P \rangle , \tag{23}$$

$|P\rangle$, $|P'\rangle$ – собственные векторы состояний полного гамильтониана H, соответствующие составным частицам с 4-импульсами P и P', нормированные условием $\langle P|P'\rangle = (2\pi)^3 2P^0 \delta(\vec{P}-\vec{P}')$ [2)].

[2)] Ниже для обозначения импульсов собственных векторов полного и свободного гамильтонианов будем использовать заглавные и прописные буквы соответственно.

Для того, чтобы от символической записи (23) перейти к c – числовым функциям, обычно используют полный набор собственных состояний свободного гамильтониана $|p_1, p_2, \dots p_n\rangle$, описывающих n – невзаимодействующих составляющих с импульсами p_i

$$F_\mu(P',P) = \sum_{n,i} (2\pi)^{3(n-1)} \int (d\vec{q})\, \delta(\Sigma\vec{q}-\vec{P}')\, \overline{\Psi}^{(n)}_{P'}(\vec{q}) \langle q_i | J_\mu(0) | p_i \rangle \Psi^{(n)}_{P}(\vec{p}) (d\vec{p})\, \delta(\Sigma\vec{p}-\vec{P}) \prod_{e\neq i}^{n} 2p_e^0 \delta(\vec{p}-\vec{q}) , \tag{24}$$

$$(2\pi)^{3n}(d\vec{p}) = \prod_{e=1}^{n} \frac{d\vec{p}_e}{2p_e^0} \;; \qquad \vec{p} \equiv (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots \vec{p}_n),$$

$\Psi_P(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots \vec{p}_n)$ – волновая функция связанного состояния в импульсном пространстве n -составляющих

$$\langle p_1, p_2, \dots p_n | P \rangle = \delta^{(3)}\Big(\vec{P} - \sum_{l=1}^{n} \vec{p}_e\Big) \Psi_P(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots \vec{p}_n) . \tag{25}$$

Используя теорию возмущений и технику выделения неприводимых диаграмм, интеграл (24) можно выразить через проекции связанного состояния только на валентные составляющие (т.е. избавиться от суммирования по n), при этом вместо простой точечной вершины $\langle q_i | J_\mu(0) | p_i \rangle$ появится вершинная функция Γ_μ, заданная в виде разложения по степеням константы взаимодействия. Таким образом, формфактор определяется видом волновой функции (25).

Главный недостаток описанного в (24) подхода заключается в наличии явной зависимости волновых функций (25) от импульса составной системы. Ясно, что эта зависимость существенно осложняет анализ выражения для формфактора (24). Поскольку в определении (25) бра и кет состояния являются собственными по отношению к различным операторам H_0 и H, волновые функции в разных системах отсчета не могут быть связаны между собой с помощью преобразований аргументов. Естественна попытка преодолеть эту трудность с помощью выбора системы отсчета. В системе $P_z \to \infty$ квазипотенциальные волновые функции зависят лишь от фракций продольных относительно оси z проекций импульсов составляющих $x_i = \lim\limits_{P_z\to\infty} p_i^z / P_z$ и от $\vec{p}_{\perp i} - x_i \vec{P}_\perp$ – комбинаций поперечных проекций.

Мы, используя формулы предыдущего раздела, получим представление для формфактора (23) в терминах волновых функций связанного состояния в системе покоя. Пользуясь соотношением (7), запишем матричный элемент (23) в виде

$$F_\mu(P',P) = \langle \Lambda^{\lambda_2} P' | U_{\lambda_2} J_\mu(0) U^+_{\lambda_1} | \Lambda^{\lambda_1} P \rangle . \tag{26}$$

Выбирая $\lambda_1 = P/M$, $\lambda_2 = P'/M$ $(P'^2=P^2=M^2)$, имеем

$$F_\mu(P',P) = \langle \vec{0} | U_{\lambda_2} J_\mu(0) U^+_{\lambda_1} |\vec{0}\rangle = \Lambda^{\lambda_1}_{\mu\nu} \langle \vec{0} | U_{\lambda_2} U^+_{\lambda_1} J^\nu(0) |\vec{0}\rangle ,$$

где $|\vec{0}\rangle$ - вектор состояния покоящейся составной частицы. Учтем теперь, что

$$U_{\lambda_2}U^+_{\lambda_1} = U^+(R(\Lambda^{\lambda_1}\lambda_2,\lambda_2))\,U_{\Lambda^{\lambda_1}\lambda_2} .$$

Следовательно, произведение $U_{\lambda_2}U^+_{\lambda_1}$ сводится к оператору буста U_λ с $\lambda=\Lambda^{\lambda_1}\lambda_2$, $U^+(R(\Lambda^{\lambda_1}\lambda_2,\lambda_2))$ - соответствует трехмерным, так называемым вигнеровым, вращениям, и поэтому согласно теореме Нетер не зависит от взаимодействия.

$$U(R)=\overset{\circ}{U}(R)$$

$$F_\mu(P',P) = \Lambda^{\lambda_1}_{\mu\nu}\langle\vec{0}|\overset{\circ}{U}{}^+(R)\, U_\lambda J^\nu(0)|\vec{0}\rangle = \Lambda^{\lambda_1}_{\mu\nu}\langle \vec{0}|\overset{\circ}{U}{}^+(R)\,\overset{\circ}{U}_\lambda \overset{\circ}{U}{}^+_\lambda U_\lambda J^\nu(0)|\vec{0}\rangle = \Lambda^{\lambda_1}_{\mu\nu}\langle\vec{0}|\overset{\circ}{U}_{\lambda_2}\overset{\circ}{U}{}^+_{\lambda_1} A(\lambda) J^\nu(0)|\vec{0}\rangle . \qquad (27)$$

Обратим внимание на то, что в (27) вся зависимость от внешних импульсов P и P' переведена в оператор $A(\lambda)$, рассмотренный в предыдущем параграфе. Благодаря соотношению (27) задача сводится к изучению волновых функций покоящейся составной системы и к построению матричных элементов оператора $A(\lambda)$ между векторами состояний свободных составляющих.

Для применения предложенного ковариантного подхода к более общему случаю, чем формфактор, необходимо рассмотреть отдельно волновую функцию связанного состояния, через которую выражаются матричные элементы S -матрицы, соответствующие всевозможным процессам с учетом составных частиц. Используя соотношения (7), (10), для простейшего случая двух составляющих имеем

$$\langle p_1,p_2|P\rangle = \langle p_1,p_2|\overset{\circ}{U}{}^+_\lambda A^+_\lambda|\vec{0}\rangle , \quad \lambda=P/M . \qquad (28)$$

Формула (28) позволяет выразить двухчастичную волновую функцию составной системы, движущейся с импульсом P, через n - частичные волновые функции той же составной системы в состоянии покоя :

$$\langle p_1 p_2|P\rangle = \sum_{n}^{\infty}\int \langle p_1,p_2|\overset{\circ}{U}{}^+_\lambda A^+_\lambda|q_1\ldots q_n\rangle (d\vec{q})\langle q_1\ldots q_n|\vec{0}\rangle . \qquad (29)$$

Наличие в (29) знака суммирования по n отражает тот простой факт, что в квантовой теории поля число составляющих в составной системе не является лоренц-инвариантом, т.е. зависит от системы отсчета. Однако, пользуясь известным понятием неприводимости диаграмм в "старой теории возмущений", можно получить связь между двухчастичными волновыми функциями в различных системах отсчета.

Пользуясь уравнением

$$|\vec{0}\rangle = [M-H_0]^{-1}H_I|\vec{0}\rangle ,$$

состояние полного гамильтониана $|\vec{0}\rangle$ можно выразить только через двухчастичные проекции $\langle p_1 p_2|\vec{0}\rangle$:

$$|\vec{0}\rangle = [M-H_0-H_I(I-\hat{\mathcal{P}}_2)]^{-1}H_I\hat{\mathcal{P}}_2|\vec{0}\rangle , \qquad (30)$$

где $\hat{\mathcal{P}}_2$ - проекционный оператор на состояния двух свободных составляющих. Используя (30) в (29), получим связь между двухчастичными волновыми функциями в различных системах отсчета :

$$\langle p_1 p_2|P\rangle = \int\langle p_1,p_2|\overset{\circ}{U}{}^+_\lambda A^+_\lambda[M-H_0-H_I(I-\hat{\mathcal{P}}_2)]^{-1}H_I|q_1 q_2\rangle(d\vec{q})\langle q_1 q_2|\vec{0}\rangle . \qquad (31)$$

Здесь стоит отметить, что использование равенства типа (30) в выражении (27) для формфактора позволяет записать его в терминах волновых функций только валентных составляющих.

§ 3. Асимптотическое поведение электромагнитного формфактора в КХД

В качестве проверки эффективности развитого выше подхода рассмотрим формфактор составной системы при большой передаче импульса в КХД. Этот пример удобен тем, что благодаря свойству асимптотической свободы можно воспользоваться теорией возмущений. Любая из форм (16),(18),(19) пригодна для разложения в ряд по степеням константы взаимодействия. Пользуясь (27), начнем с нулевого приближения для $A(\lambda)$:

$$F_\mu(P,\vec{0}) = \langle\vec{0}|\overset{\circ}{U}_\lambda J_\mu(0)|\vec{0}\rangle . \qquad (32)$$

Переходя к волновым функциям связанного состояния, имеем

$$F_\mu(P,\vec{0}) = (2\pi)^{-3} \sum_{n,i} \int (d\vec{p})\,\delta(\Sigma\vec{p})\,\Psi_{\vec{0}}(\overrightarrow{\Lambda^\lambda p})\,(2p_i^{0\prime})\langle p_i'|J_\mu(0)|p_i\rangle\,\Psi_{\vec{0}}(\vec{p}) \ ,$$

$$\overrightarrow{\Lambda^\lambda p_i'} + \sum_{\ell\neq i} \overrightarrow{\Lambda^\lambda p_e} = 0 \quad , \quad \overrightarrow{\Lambda^\lambda p} = (\overrightarrow{\Lambda^\lambda p_1}, \ldots \overrightarrow{\Lambda^\lambda p_{i-1}}, \overrightarrow{\Lambda^\lambda p_{i+1}} \ldots \overrightarrow{\Lambda^\lambda p_n}). \qquad (33)$$

Такая запись соответствует простейшему учету движения составной системы и в нашем подходе отвечает нулевому приближению по константе связи. Поведение интеграла перекрытия (33) при $|\vec{\lambda}| \to \infty$ определяется асимптотикой волновой функции, когда импульсы всех составляющих велики. Анализ этой асимптотики на основе уравнений для связанных состояний в КХД (см. Приложение Б) дает более сильное падение для формфакторов, чем это предсказывается правилами кваркового счета [9]. Оказывается, что ведущий в асимптотике член содержится в последующих порядках разложения $A(\lambda)$ по константе связи.

Покажем это, предварительно перестроив ряд теории возмущений таким образом, чтоб нулевой член разложения уже обладал ведущей асимптотикой. Очевидно, что таким образом построенная теория возмущений более удобна для изучения процессов рассеяния при больших передачах. Перепишем выражение для формфактора в следующей симметричной форме:

$$\langle P_1|J_\mu(0)|P_2\rangle = \langle\vec{0}|\overset{0}{U}_{\lambda_1} A_{\lambda_1} J_\mu(0)\left\{[P_2^0 - H_0]^{-1} H_I\right\}^{2(n-1)} A^+_{\lambda_2} \overset{0}{U}{}^+_{\lambda_2}|\vec{0}\rangle \ , \qquad (34)$$

где n – число валентных кварков в состояниях $|P_1\rangle$, $|P_2\rangle$ (минимальное число составляющих, если это экзотическая система). Здесь мы воспользовались уравнением на связанные состояния

$$|P_2\rangle = \left\{[P_2^0 - H_0]^{-1} H_I\right\}^{2(n-1)} |P_2\rangle \ . \qquad (35)$$

Тогда в низшем порядке по константе связи $A_{\lambda_1} = A_{\lambda_2} = I$ имеем

$$\langle P_1|J_\mu|P_2\rangle = \sum_n \int (d\vec{p})\,\delta(\Sigma\vec{p})\,\Psi_{\vec{0}}(\vec{p})\,\langle\Lambda^{-1}_{\lambda_1} p|J_\mu(0)\left\{[P_2^0 - H_0]^{-1} H_I\right\}^{2(n-1)}|\Lambda^{-1}_{\lambda_2} q\rangle\,\Psi_{\vec{0}}(\vec{q})\,\delta(\Sigma\vec{q})(d\vec{q}), \qquad (36)$$

где $\Lambda^{-1}_\lambda \Lambda^\lambda = I$.

---

3) Для того чтобы не загромождать выкладки, мы не выписали не имеющие значения для определения асимптотик $\mathcal{D}$- функции, учитывающие вращение спинов кварков.

Для получения асимптотического поведения формфактора наглядным образом, без привлечения деталей расчета, удобно воспользоваться системой отсчета $|\vec{P}_1|, |\vec{P}_2| \gg M$. В частности это может быть система Брейта $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$. В такой системе асимптотика связной части матричного элемента

$$M_\mu = \langle\Lambda^{-1}_{\lambda_1} p_1, \ldots \Lambda^{-1}_{\lambda_1} p_n|J_\mu(0)\left\{[P_2^0 - H_0]^{-1} H_I\right\}^{2(n-1)}|\Lambda^{-1}_{\lambda_2} q_1, \ldots, \Lambda^{-1}_{\lambda_2} q_n\rangle$$

определяется из простых размерных соображений. Действительно, при $|\overrightarrow{\Lambda^{-1}_{\lambda_1} p_e}|$, $|\overrightarrow{\Lambda^{-1}_{\lambda_2} q_e}| \gg m$ зависимость от масс в M_μ исчезает, а поскольку размерность $[M_\mu] = m^{-2n+3}$, то

$$M_\mu \sim \frac{\bar{U}(P_1)\gamma_\mu U(P_2)}{(P_1 - P_2)^{2(n-1)}} \ .$$

В итоге для формфактора имеем

$$F(t) \sim t^{-(n-1)} , \qquad (37)$$

что соответствует правилу кваркового счета. Более детальный анализ представления (36) позволяет найти логарифмические поправки к степенному поведению (37). Покажем это на примере двухчастичного связанного состояния кварка и антикварка. Для того чтобы ведущая логарифмическая поправка содержалась в первом члене разложения выражения для формфактора, перепишем его в виде, в котором вершинный оператор M_μ содержит в себе все собственно-энергетические и вершинные поправки соответственно рисунку 2:

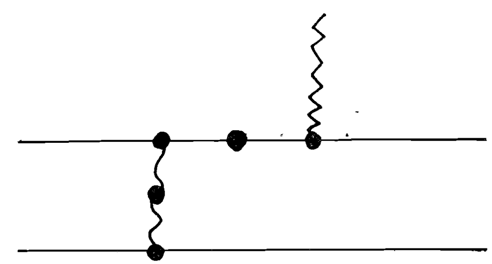

Рис. 2

$$M_\mu \sim \frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2}\left(\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac{2\gamma_F}{\beta}} \bar U(P_1)\gamma_\mu U(P_2)\,; \quad Q^2=-t\,, \tag{38}$$

где γ_F – аномальная размерность собственно-энергетической диаграммы, $\alpha_s(Q^2)\approx(4\pi/\beta)(\ln Q^2/\Lambda^2)^{-1}$ – бегущая константа связи КХД. Выражение (36) в асимптотическом пределе $Q^2\to\infty$ принимает вид

$$\langle P_1|J_\mu|P_2\rangle \approx \frac{\alpha_s(Q^2)}{Q^2}\Big\{\sum_{i,j,k}^{2} \overset{+}{\Phi}{}_i^k(Q^2)\,\bar U_i(P_1)\gamma_\mu U^j(P_2)\,\Phi_j^k(Q^2) + \overset{+}{\Phi}{}_k^i(Q^2)\,\bar U_i(P_2)\gamma_\mu U^j(P_1)\,\Phi_k^j(Q^2)\,, \tag{39}$$

где
$$\Phi_i^j(Q^2) = \left(\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac{\gamma_F}{\beta}} \int_0^{Q^2}\frac{d\vec q}{16\pi^3\sqrt{q_1^0 q_2^0}}\,\Psi_{\vec 0\, i}^{\,j}(\vec q) \tag{40}$$

– аналог функции распределения $\Phi_{Q^2}(x)$, фигурирующей в формализме $P_2\to\infty$. Далее задача сводится к определению зависимости этих функций от Q^2 с помощью уравнения на связанное состояние в системе покоя (Б.5). Асимптотическое поведение $\Psi_{\vec 0}\to|\vec q|^{-2}$, следующее из этого уравнения, указывает на чувствительность интеграла (40) к верхнему пределу. Для определения зависимости от Q^2 построим аналог уравнения эволюции /8/, дифференцируя обе стороны определения (40):

$$\frac{d\Phi_i^j(Q^2)}{dQ^2} = \frac12\left(\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac{\gamma_F}{\beta}}\int\frac{d\Omega_{\vec q}}{16\pi^3}\,\Psi_{\vec 0\, i}^{\,j}(\vec q) - \frac{\gamma_F}{\beta}\,\frac{\Phi_i^j(Q^2)}{Q^2\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\,,$$

где $\vec q^{\,2}=Q^2 \quad d\vec q = \frac12|\vec q|\,d\vec q^{\,2}\,d\Omega_{\vec q}$.

Далее воспользуемся уравнением (Б.5) для $\Psi_{\vec 0\, i}^{\,j}(\vec q)$, $|\vec q|\to\infty$

$$\Psi_{\vec 0\, i}^{\,j}(\vec q)\approx \frac{4\pi C_F\alpha_s(\vec q^{\,2})}{8\vec q^{\,2}}\,\frac{\bar U_i(\vec q)\gamma^\mu U^k(0)\,\bar U_e(0)\gamma_\mu U^j(-\vec q)}{\sqrt{q_1^0}\,\sqrt{m_1}\,\sqrt{m_2}\,\sqrt{q_2^0}}\int\frac{d\vec p}{16\pi^3\sqrt{p_1^0p_2^0}}\,\Psi_{\vec 0\, k}^{\,e}(\vec p)\,,$$

явное вычисление матричной структуры дает

$$\Psi_{\vec 0\, i}^{\,j}(\vec q) = \frac{16\pi C_F\alpha_s(\vec q^{\,2})}{8\vec q^{\,2}}\left[\delta_i^k\delta_e^j + \frac12\vec\sigma_i^k\vec\sigma_e^j - \frac12(\vec\sigma_i^k\cdot\vec n_q)(\vec\sigma_e^j\cdot\vec n_q)\right]\int^{Q^2}\frac{d\vec p}{16\pi^3\sqrt{p_1^0p_2^0}}\,\Psi_{\vec 0\, k}^{\,e}(\vec p)\,,$$

и уравнение эволюции принимает вид

$$\frac{d\Phi_i^j(Q^2)}{d\xi} = -\frac{C_F}{\beta}\left[\delta_i^k\delta_e^j - \frac13\vec\sigma_i^k\vec\sigma_e^j\right]\Phi_k^e(Q^2)\,,$$

где
$$\xi=\ln\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\,.$$

Ограничиваясь состоянием с орбитальным моментом $\vec\ell=0$, имеем две возможности:

а) псевдоскалярный мезон $\quad \Phi_i^j(Q^2)=\delta_i^j\,\Phi_S(Q^2)$,

б) векторный мезон с поляризацией $\vec\chi \quad \Phi_i^j(Q^2)=(\vec\chi\cdot\vec\sigma_i^j)\,\Phi_V(Q^2)$.

Для каждой из этих функций имеем уравнения

$$\frac{d\Phi_S}{d\xi}=0\,, \qquad \frac{d\Phi_V}{d\xi}=-\frac43\frac{C_F}{\beta}\,\Phi_V\,,$$

решение которых не представляет труда:

$$\Phi_S=\Phi_S(Q_0^2)$$
$$\Phi_V=\Phi_V(Q_0^2)\left(\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{-\frac43\frac{C_F}{\beta}}\,. \tag{41}$$

Авторы глубоко благодарны А.Н. Тавхелидзе за постоянное внимание к работе и ценные замечания, Г.П. Джорджадзе, В.Г. Кадышевскому, Б.А. Маградзе, В.А. Рубакову, А.Н. Сисакяну за полезные обсуждения.

Приложение А

Ясно, что точки областей Ω_1 и Ω_2 разделены временноподобным интервалом и поэтому в силу условия причинности

$$T_x\left\{\exp i\int\limits_{\Omega}\varepsilon(x^0)\mathcal{H}_I(x)d^4x\right\} = T_x\left\{\exp i\int\limits_{\Omega_1}\varepsilon(x^0)\mathcal{H}_I(x)d^4x\right\}T_x\left\{\exp i\int\limits_{\Omega_2}\varepsilon(x^0)\mathcal{H}_I(x)d^4x\right\}.$$

Теперь остается показать, что T_x-упорядочение в области Ω_1 эквивалентно обычному хронологическому, а в области Ω_2 -антихронологическому упорядочению.

Действительно, рассмотрим $T_x(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2))$ в области Ω_1. На рис. I зафиксируем точку x_1 и связанный с ней световой конус. Очевидно, что операция упорядочения операторов имеет смысл лишь для точек внутри данного конуса. Тогда, как видно из рис. I, если точка x_2 лежит в верхней (нижней) половине конуса, то для нее одновременно выполняются соотношения $x_2^0 > x_1^0$ $(x_2^0 < x_1^0)$ и $\frac{x_2^0}{x_2} > \frac{x_1^0}{x_1}$ $\left(\frac{x_2^0}{x_2} < \frac{x_1^0}{x_1}\right)$, т.е. $T_x(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)) = T(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2))$, где T - обычное хронологическое упорядочение. Аналогичное рассуждение справедливо и для области Ω_2, с той разницей, что для точки x_2, лежащей в верхней (нижней) половине конуса имеют место соотношения

$x_2^0 > x_1^0$ $(x_2^0 < x_1^0)$ и $\frac{x_2^0}{x_2} < \frac{x_1^0}{x_1}$ $\left(\frac{x_2^0}{x_2} > \frac{x_1^0}{x_1}\right)$, т.е. в области

$$\Omega_2: \qquad T_x(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)) = \overset{+}{T}(\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)),$$

где $\overset{+}{T}$ - антихронологическое упорядочение.

Приложение Б

При получении уравнения для волновой функции связанного состояния n -частиц (25) исходим из матричного элемента резольвенты оператора H между состояниями n свободных частиц

$$G^{(n)}(z;\vec{p},\vec{q}) \equiv \langle p_1 \dots p_n | [z-H]^{-1} | q_1 \dots q_n \rangle . \tag{Б.I}$$

Теория возмущений для такой функции Грина (так называемая "старая" теория возмущений) строится на основе уравнения

$$[z-H]^{-1} = [z-H_0]^{-1} + [z-H_0]^{-1}H_I[z-H]^{-1}.$$

Такое уравнение связывает между собой матричные элементы резольвенты с различным числом частиц. Однако, пользуясь определением n -частично неприводимых диаграмм, которым соответствует ядро $K^{(n)}(z;\vec{p},\vec{k})$, можно получить уравнение только для n -частичной функции Грина

$$G^{(n)}(z;\vec{p},\vec{q}) = G_0^{(n)}(z,\vec{p},\vec{q}) + \int(d\vec{\ell})\,G_0^{(n)}(z,\vec{p},\vec{\ell})\,K^{(n)}(z;\vec{\ell},\vec{k})\,G^{(n)}(z;\vec{k},\vec{q})\,d, \tag{Б.2}$$

где

$$G_0^{(n)}(z;\vec{p},\vec{q}) \equiv \langle p_1 \dots p_n | [z-H_0]^{-1} | q_1 \dots q_n \rangle = (2\pi)^{3n}\prod_{\ell=1}^{n}\frac{2p_\ell^0\,\delta(\vec{p}_\ell-\vec{q}_\ell)}{z-\sum\limits_{\ell=1}^{n}q_\ell^0}.$$

Нетрудно показать, что в приближении парных взаимодействий

$$K^{(n)}(z;\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i>j}K_{ij}^{(2)}\Big(z-\sum_{\ell\neq i,j}p_\ell^0;\ \vec{p}_i\vec{p}_j,\vec{q}_i\vec{q}_j\Big)\prod_{\ell\neq i,j}^{n}(2\pi)^{3n-2}\,2p_\ell^0\,\delta^{(3)}(\vec{p}_\ell-\vec{q}_\ell), \tag{Б.3}$$

где $K_{ij}^{(2)}(z-\sum p_\ell^0,\vec{p}_i\vec{p}_j,\vec{q}_i\vec{q}_j)$ - ядро двухчастично-неприводимых диаграмм, определяющее с помощью уравнения (Б.2) двухчастичную функцию Грина. Если в системе из n -частиц возможно образование связанного состояния, то соответствующая функция Грина $G^{(n)}(z;\vec{p},\vec{q})$ имеет полюс по z в точке $z=\sqrt{\vec{P}^2+M^2}$ (M - масса связанного состояния)

$$G^{(n)}(z,\vec{p},\vec{q}) \underset{z\to\sqrt{\vec{P}^2+M^2}}{\approx} \frac{\langle p_1\dots p_n|P\rangle\langle P|q_1\dots q_n\rangle}{z-\sqrt{\vec{P}^2+M^2}}.$$

Выделяя этот полюсный вклад в обеих частях уравнения (Б.2), получим однородное уравнение для волновой функции связанного состояния

$$\Psi_{\vec{0}}(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_n) = \Big[M-\sum_1^n p_\ell^0\Big]^{-1}\int(d\vec{k})\,\delta\Big(\sum_1^n\vec{k}\Big)V^{(n)}(\vec{p},\vec{k})\,\Psi_{\vec{0}}(\vec{k}_1\dots\vec{k}_n), \tag{Б.4}$$

где

$$K^{(n)}(M,\vec{p},\vec{k}) \equiv \delta^{(3)}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\vec{p}_\ell-\sum_{\ell=1}^{n}\vec{k}_\ell\Big)V^{(n)}(\vec{p},\vec{k}).$$

При $n=2$ в приближении одноглюонного обмена уравнение (Б.4) имеет следующий вид :

$$\Psi_{\vec{0}\,i}^{j}(\vec{q}) = \frac{g^2}{4\pi}\,\frac{4\pi C_F}{M-q_1^0-q_2^0}\int\frac{d\vec{p}}{16\pi^3p_1^0p_2^0}\,V_{i\ell}^{jk}(\vec{q},\vec{p})\,\Psi_{\vec{0}\,k}^{\ell}(\vec{p}), \tag{Б.5}$$

где

$$V^{jk}_{ie}(\vec{q},\vec{p}) = -\frac{\overline{U}_i(q_1)\gamma^\mu U^k(p_1)\overline{V}_e(p_2)\gamma_\mu V^j(q_2)}{4|\vec{q}-\vec{p}|}\left\{\frac{1}{M-q_2^0-|\vec{q}-\vec{p}|-p_1^0}+\frac{1}{M-q_1^0-|\vec{q}-\vec{p}|-p_2^0}\right\},$$

$$C_F = \frac{n_c^2-1}{2n_c}.$$

Анализ уравнения (Б.5) в асимптотической области $|\vec{q}| \to \infty$ дает следующее степенное поведение:

$$\Psi^j_{\bar{0}_i}(\vec{q}) \underset{|\vec{q}|\to\infty}{\simeq} \frac{1}{|\vec{q}|^2}. \qquad (Б.6)$$

Ядро уравнения (Б.4) в случае $n \geq 3$ содержит слагаемые, соответствующие несвязным диаграммам, и в таком виде оно непригодно для изучения асимптотики волновой функции. Используя известный способ перестройки таких уравнений /10,11/, можно получить систему уравнений, ядра которых уже не содержат несвязных диаграмм. Волновая функция представляется в виде суммы компонент Ψ_α, удовлетворяющих системе уравнений:

$$\Psi^{(n)}_\alpha = G_0^{(n)} \sum_\beta W_{\alpha\beta}\Psi^{(n)}_\beta. \qquad (Б.7)$$

Ядро $W_{\alpha\beta}$ может быть записано в виде $(n-1)$ итераций ядер парных взаимодействий, так что ни одна пара не повторяется. Для вычисления асимптотического поведения n – частичной волновой функции $\Psi_{\bar{0}}(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n)$ в области $|\vec{p}_1|\sim|\vec{p}_2|\sim\ldots\sim|\vec{p}_n|\sim|\vec{p}|\to\infty$ представим уравнение (Б.7) графически (рис. 3). Каждому сечению между вершинами соответствует энергетический знаменатель:

$$D_e = \left[M - \sum\sqrt{k_e^2+m_e^2}\right]^{-1},$$

где $\vec{k}_e$ -импульс, приписанный пересеченной пунктиром линии. Поскольку таких замечаний $2(n-1)$ и в каждом сечении найдется хоть одна внутренняя линия с импульсом порядка $|\vec{p}|$, то все D_e вносят вклад в степенное падение $|\vec{p}|^{-2(n-1)}$. Каждой глюонной линии с импульсом $\vec{q}_e$ соответствует знаменатель $|\vec{q}_e|^{-1}$. В асимптотическом режиме все они порядка $|\vec{p}|$ и вносят дополнительное падение $|\vec{p}|^{-(n-1)}$. Внешним спинорным линиям соответствуют спиноры $\overline{U}(p_i)$, которые, наоборот, ослабляют падение, поскольку $U(p)\underset{|\vec{p}|\to\infty}{\to}\sqrt{|\vec{p}|}$, и все вместе дают положительную степень $|\vec{p}|^{n/2}$. Внутренние спинорные линии не меняют степень падения, так как соответствующая им γ -матричная структура $(\hat{k}+m)/k^0 \sim const$. В итоге получаем следующее асимптотическое поведение волновой функции:

$$\Psi_{\bar{0}}(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_n) \approx |\vec{p}|^{-3(n-1)+\frac{n}{2}},$$
$$|\vec{p}_1|\sim|\vec{p}_2|\sim\ldots|\vec{p}_n|\sim|\vec{p}|\to\infty.$$

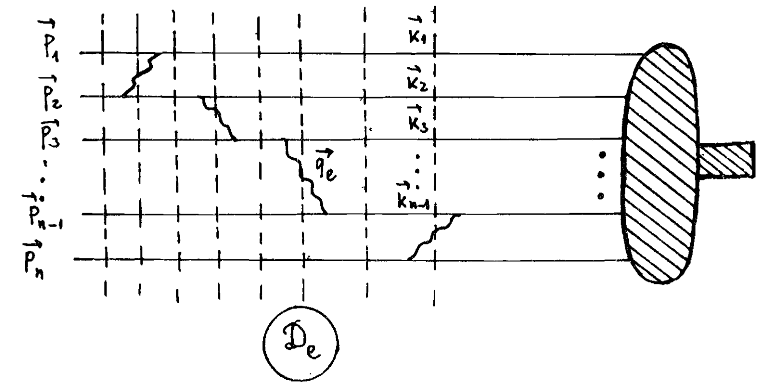

Рис. 3

Литература

1. Боголюбов Н.Н. Доклады АН СССР, т. 81, № 5, 757-760, 1951.
2. Боголюбов Н.Н. Доклады АН СССР, т. 81, № 6, 1015- 1018, 1951.
3. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Nuovo Cimento, v. 29, No 2, 380-400, 1963.
4. Matveev V.A., Muradyan R.M. Tavkhelidze A.N. Relativistically covariant equations for two particles in quantum field theory. JINR, E2-3498, Dubna, 1967.

   Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. Релятивистски-ковариантные волновые уравнения для N -частиц в квантовой теории поля. Препринт Р2-3900, Дубна, ОИЯИ, 1968.
5. Faustov R.N. Annals of Physics, v. 78, No 1, 176-189, 1973.
6. Kogut J., Susskind L., Phys. Reports, 8C, No", 75-172, 1973.
7. Квинихидзе А.Н., Сисакян А.Н., Слепченко Л.А., Тавхелидзе А.Н. ЭЧАЯ, т. 8, в. 3, 478-543, 1977.

8. Lepage C.P., Brodsky S.J., Huang T., Mackenzie P. Particle and Filds- 2, proceedings of the Banff Summer Institute, Banff, Canada, 1981, ebited by A.Z. Capri and Komal (Plenum, New York, 1983).
9. Matveev V.A., Muradyan R.M. and Tavkhelidze A.N. Lett.Nuovo Cimento 7, 719-723 (1973).
Brodsky S.J. and Farar G.R. Phys. Rev. Lett., 31, 1153-1156, (1973).
10. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., "Наука", 1985.
11. Квинихидзе А.Н., Стоянов Д.Щ. ТМФ, 1972, т. II, 23-36.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1986 года

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Квинихидзе А.Н., Матвеев В.А., Хведелидзе А.М. P2-86-219
Ковариантный оператор эволюции в составных моделях квантовой теории поля

Предлагается подход к описанию взаимодействия составных частиц, определяющую роль в котором играет ковариантное уравнение Шредингера и следующий из него оператор эволюции состояния между двумя произвольными пространственно-подобными поверхностями. Для оператора преобразования импульса состояния получено представление, удобное для развития метода теории возмущений. На примере формфактора показано, как можно выразить амплитуду рассеяния составных частиц через волновые функции связанного состояния в системе покоя. Простота предложенного ковариантного подхода в приложениях продемонстрирована при вычислении асимптотического поведения формфактора с учетом логарифмических поправок.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод авторов

Kvinikhidze A.N., Matveev V.A., Khvedelidze A.M. P2-86-219
Covariant Evolution Operator in Composite Models of Quantum Field Theory

The approach for describing the interaction of composites is proposed, in which the key role is played by the covariant Schrodinger equation and the state evolution operator between two arbitrary space-like surfaces following from it. A representation appropriate for developing perturbation theory method is found for the operator of the state momentum transformation. The form-factor is used to show how the scattering amplitude of composites can be expressed through the wave functions of a bound state at rest. The simplicity of the proposed covariant approach in applications is demonstrated by calculating the asymptotic behaviour of the form-factor taking into account logarithmic corrections.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986