сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-86-207

Н.А.Черников

КОНСПЕКТ ТЕОРИИ АФИННОЙ СВЯЗНОСТИ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОНИСТОВ

1986

Предлагаемый вниманию гравитационистов конспект теории аффинной связности написан по книге [1] в связи с дискуссией об энергии гравитационного поля /см. [2] и цитированную там литературу/. При этом получились результаты, имеющие прямое отношение к столь трудному понятию. Вместе с конспектом публикуем и эти результаты.

Все геометрические объекты в данной работе отнесены к координатному базису $d^a = dx^a$ и дуальному базису $\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial x^a}$.

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Тензорным полем T типа $\binom{A}{B}$ называем тензорное поле с компонентами $T^{a_1 \dots a_A}_{b_1 \dots b_B}$.

Аффинная связность Γ вводится на многообразии с таким расчетом, чтобы ковариантная производная ∇T любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ являлась тензорным полем типа $\binom{A}{B+1}$.

Для векторного поля полагают

$$\nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma^a_{mn} T_a . \qquad /1/$$

Отсюда следует, что компоненты Γ^a_{mn} связности при переходе от координатной карты K к карте $\tilde{K}$ преобразуются по правилу

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{mn} = \left(\Gamma^{i}_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \tilde{x}^m} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^n}\right) \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x} . \qquad /2/$$

Из /2/ следует, что для любого векторного поля T комбинации

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma^a_{mn} T^n \qquad /3/$$

являются компонентами тензорного поля ∇T типа $\binom{1}{1}$.

Ковариантная производная любого тензорного поля T типа $\binom{A}{B}$ составляется по правилу дифференцирования произведения, например:

$$\nabla_k T_{mn} = \partial_k T_{mn} - \Gamma^s_{km} T_{sn} - \Gamma^s_{kn} T_{ms} ,$$

$$\nabla_k T^a_m = \partial_k T^a_m - \Gamma^s_{km} T^a_s + \Gamma^a_{ks} T^s_m ,$$

$$\nabla_k T^{ab} = \partial_k T^{ab} + \Gamma^a_{ks} T^{sb} + \Gamma^b_{ks} T^{as},$$

$$\nabla_k T^a_{mn} = \partial_k T^a_{mn} - \Gamma^s_{km} T^a_{sn} - \Gamma^s_{kn} T^a_{ms} + \Gamma^a_{ks} T^s_{mn}. \qquad /4/$$

Для скалярной функции T полагают $\nabla_k T = \partial_k T$.

Как это следует из /2/, разность

$$S^a_{mn} = \Gamma^a_{mn} - \Gamma^a_{nm} \qquad /5/$$

является тензором. Его называют тензором кручения. Иногда тензором кручения называют половину разности /5/.

Рассмотрим оператор

$$\nabla_{kl} = \nabla_k \nabla_l - \nabla_k \nabla_l + S^p_{kl} \nabla_p . \qquad /6/$$

В применении к скалярной функции T он дает нуль ($\nabla_{kl} T = 0$), а в применении к ковекторному полю T_n - следующий результат:

$$\nabla_{kl} T_n = -R^a_{kln} T_a , \qquad /7/$$

где

$$R^a_{kln} = \partial_k \Gamma^a_{ln} - \partial_l \Gamma^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (\Gamma^a_{ks} \Gamma^s_{ln} - \Gamma^a_{ls} \Gamma^s_{kn}) . \qquad /8/$$

Из /7/ следует, что комбинация /8/ является тензором. Он называется тензором кривизны или тензором Римана - Кристоффеля. Свертка

$$R_{ln} = R^a_{aln} \qquad /9/$$

называется тензором Риччи. Заметим очевидное тождество

$$R^a_{kln} + R^a_{lkn} = 0. \qquad /10/$$

В применении к векторному полю T^a оператор /6/ дает

$$\nabla_{kl} T^a = R^a_{kln} T^a . \qquad /11/$$

Легко просматривается аналогия между формулами /1/, /3/ и формулами /7/, /11/. Она распространяется на все тензорные поля. Например,

$$\nabla_{kl} T_{mn} = -R^s_{klm} T_{sn} - R^s_{kln} T_{ms},$$

$$\nabla_{kl} T^a_m = - R^s_{klm} T^a_s + R^a_{kls} T^s_m, \qquad /12/$$

$$\nabla_{kl} T^{ab} = R^a_{kls} T^{sb} + R^b_{kls} T^{as},$$

$$\nabla_{kl} T^a_{mn} = - R^s_{klm} T^a_{sn} - R^s_{kln} T^a_{ms} + R^a_{kls} T^s_{mn}.$$

Формулы /12/ получаются из формул /4 / заменой $\nabla_k - \partial_k$ на ∇_{kl} и Γ^a_{km} на R^a_{klm}.

СВЕРНУТАЯ СВЯЗНОСТЬ

Свернутой /аффинной/ связностью называем свертку

$$\Gamma_m = \Gamma^a_{ma} . \qquad /13/$$

Согласно /2/, ее компоненты преобразуются следующим образом:

$$\tilde\Gamma_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde x^m} \Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde x^m} . \qquad /14/$$

Эту формулу можно привести к виду

$$\tilde\Gamma_m = \frac{\partial x^p}{\partial \tilde x^m} \left(\Gamma_p + \frac{\partial}{\partial x^p} \ln J\right), \qquad /14'/$$

где J - якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x^1, \dots, x^N)}{\partial(\tilde x^1, \dots, \tilde x^N)} , \qquad /15/$$

так как дифференциал определителя ϕ любой матрицы (ϕ^i_k) равен $d\phi = \bar\phi^k_i d\phi^i_k$, где $\bar\phi^k_i$ - алгебраическое дополнение элемента ϕ^i_k .

Ковариантная производная тензора типа $\binom{0}{N}$ равна

$$\nabla_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} = \partial_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} - \Gamma^a_{mk_1} \epsilon_{ak_2 \dots k_N} - \dots - \Gamma^a_{mk_N} \epsilon_{k_1 \dots k_{N-1} a} . \qquad /16/$$

Если этот тензор антисимметричен по любой паре значков $k_1 \dots k_N$, то комбинация

$$\Gamma^b_{ma} \epsilon_{k_1 \dots k_N} - \Gamma^b_{mk_1} \epsilon_{ak_2 \dots k_N} - \dots - \Gamma^b_{mk_N} \epsilon_{k_1 \dots k_{N-1} a} \qquad /16'/$$

антисимметрична по любой паре значков $a, k_1, \dots , k_N$. Следовательно, она равна нулю и

$$\nabla_m \epsilon_{k_1 \dots k_N} = (\partial_m - \Gamma_m) \epsilon_{k_1 \dots k_N} . \qquad /16''/$$

Аналогично доказывается, что

$$\nabla_{mn} \epsilon_{k_1 \dots k_N} = - R^a_{mna} \epsilon_{k_1 \dots k_N} \qquad /17/$$

Из /8/ находим, что другая свертка тензора кривизны равна

$$\Omega_{mn} = R^{a}_{mna} = \partial_m \Gamma_n - \partial_n \Gamma_m . \qquad /18/$$

Этот тензор называем кривизной свернутой связности.

На ориентируемом многообразии существует нигде не обращающаяся в нуль N-форма. Выбирая такой атлас, для которого все якобианы /15/ больше нуля, можем положить $\epsilon = \epsilon_{1...N} > 0$ для всех карт, составляющих атлас. Действительно, если $\epsilon > 0$, то и $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_{1...N} = J\epsilon > 0$. Полагая, что ковариантная производная тензора $\epsilon_{k_1 ... k_N}$ равна нулю, из /16''/ находим

$$\Gamma_m = \partial_m \ln \epsilon . \qquad /19/$$

В таком случае

$$\Omega_{mn} = 0 . \qquad /20/$$

По сути здесь мы имели дело с "продолженным" дифференцированием и "длинной" производной.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЯЗНОСТИ

Пусть теперь на многообразии заданы две связности, Γ и $\check{\Gamma}$ с коэффициентами Γ^a_{mn} и $\check{\Gamma}^a_{mn}$ соответственно. Переход от одной из них к другой называется преобразованием связности [1]. Из /2/ следует, что разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \qquad /21/$$

является тензором. Этот тензор называют тензором аффинной деформации. Подставляя взятое отсюда выражение для $\check{\Gamma}^a_{mn}$ в формулу /8/, получаем закон изменения тензора кривизны при преобразовании связности:

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + S^m_{kl} P^a_{mn} + \nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}) . \qquad /22/$$

Разность

$$P_m = \check{\Gamma}_m - \Gamma_m = P^a_{ma} \qquad /23/$$

есть ковектор аффинной деформации. Из /18/ получаем закон изменения тензора кривизны свернутой связности:

$$\check{\Omega}_{kl} = \Omega_{kl} + \partial_k P_l - \partial_l P_k , \qquad /24/$$

что согласуется с /22/.

СИММЕТРИЧНАЯ СВЯЗНОСТЬ. ЭКВИАФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ

Дальше будем рассматривать только симметричные связности, т.е. будем полагать

$$\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{nm} , \qquad /25/$$

так что тензор кручения будет равняться нулю.

В этом случае

$$R^a_{kln} + R^a_{nkl} + R^a_{lnk} = 0 . \qquad /26/$$

В результате свертки отсюда получаем

$$\Omega_{kl} + R_{kl} - R_{lk} = 0 . \qquad /27/$$

Симметричная связность, свертка которой равна /19/, называется эквиаффинной. В этом случае тензор Риччи симметричен:

$$R_{kl} = R_{lk} . \qquad /28/$$

Наряду с алгебраическими тождествами /10/ и /26/ существует еще одно весьма важное дифференциальное тождество, а именно:

$$\nabla_i R^a_{kln} + \nabla_l R^a_{ikn} + \nabla_k R^a_{lin} = 0, \qquad /29/$$

называемое тождеством Бианки-Падова [1].

Для симметричных связностей тензор аффинной деформации также симметричен, т.е.

$$P^a_{mn} = P^a_{nm} . \qquad /30/$$

Для симметричных связностей закон /22/ запишем в двух эквивалентных видах

$$\check{R}^a_{kln} = R^a_{kln} + \nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}) , \qquad /31/$$

$$R^a_{kln} = \check{R}^a_{kln} + \check{\nabla}_l P^a_{kn} - \check{\nabla}_k P^a_{ln} + \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}) . \qquad /32/$$

Для эквиаффинных связностей получаем следствие

$$\check{R}_{ln} = R_{ln} + \nabla_a P^a_{ln} - \nabla_l P_n + P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an} , \qquad /33/$$

$$R_{ln} = \check{R}_{ln} + \check{\nabla}_l P_n - \check{\nabla}_a P^a_{ln} + P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an} , \qquad /34/$$

где

$$P_n = \partial_n \ln \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon} . \qquad /35/$$

СВЯЗНОСТЬ КРИСТОФФЕЛЯ

Зададим на многообразии невырожденный симметричный тензор g_{mn} и потребуем, чтобы его ковариантная производная по симметричной связности Γ^a_{mn} равнялась нулю, т.е. положим

$$g = \det(g_{mn}) = 0, \quad g_{mn} = g_{nm} , \qquad /36/$$

$$S^a_{mn} = 0, \quad \nabla_a g_{mn} = 0 .$$

Нетрудно убедиться, что в таком случае связность Γ^a_{mn} равна скобке Кристоффеля

$$\left\{ {a \atop mn} \right\} = \frac{1}{2} g^{ak} (\partial_m g_{kn} + \partial_n g_{km} - \partial_k g_{mn}), \qquad /37/$$

где $g^{ma} g_{an} = \delta^m_n$.

Из равенства $\nabla_a g_{mn} = 0$ следует $\nabla_a g^{mn} = 0$, а значит, операция опускания и поднятия тензорных индексов с помощью g_{mn} и g^{mn} коммутативна с операцией ковариантного дифференцирования по связности Кристоффеля /37/.

Свертка связности /37/ равна

$$\left\{ {a \atop ma} \right\} = \frac{1}{2} g^{ab} \partial_m g_{ab} = \frac{1}{2g} \partial_m g , \qquad /38/$$

т.е. представляется в виде /19/, где

$$\epsilon = \sqrt{|g|} . \qquad /39/$$

Следовательно, связность Кристоффеля /37/ эквиаффинна.

Полагая в первой из формул /12/ $T_{mn} = g_{mn}$, находим, что в случае связности Кристоффеля

$$R^s_{klm} g_{sn} + R^s_{kln} g_{sm} = 0. \qquad /40/$$

Согласно /10/, /40/ и /26/, тензор

$$R_{klmn} = R^a_{klm} g_{an} \qquad /41/$$

таков, что

$$R_{klmn} + R_{lkmn} = 0, \quad R_{klmn} + R_{klmn} = 0, \qquad /42/$$

$$R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0. \qquad /43/$$

Докажем, что из тождеств /42/ и /43/ следует тождество

$$R_{klmn} = R_{mnkl} . \qquad /44/$$

Для этого сделаем в /43/ все циклические перестановки индексов:

$$R_{klmn} + R_{mkln} + R_{lmkn} = 0, \quad R_{mnkl} + R_{kmnl} + R_{nkml} = 0,$$

$$R_{nklm} + R_{lnkm} + R_{klnm} = 0, \quad R_{lmnk} + R_{nlmk} + R_{mnlk} = 0.$$

Вычитая из верхних равенств нижние, получаем

$$R_{klmn} - R_{klnm} = R_{nklm} + R_{lnkm} - R_{mkln} - R_{lmkn}$$

$$R_{mnkl} - R_{mnlk} = R_{lmnk} + R_{nlmk} - R_{kmnl} - R_{nkml} .$$

Отсюда и из /42/ следует /44/.

В случае связности Кристоффеля наряду с тензором Риччи /9/ рассматриваем скаляр кривизны

$$R = g^{mn} R_{mn} \qquad /45/$$

и тензор Эйнштейна

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} . \qquad /46/$$

Свертывая тождества Бианки - Падова /69/ с тензором $\delta^k_a g^{in}$, находим

$$2 \nabla^n R_{nl} = \nabla_l R. \qquad /47/$$

Следовательно, ковариантная дивергенция тензора /46/ равна нулю.

КООРДИНАТНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Связность, все компоненты которой в некоторой координатной карте $\tilde{K}$ равны нулю, называем координатной связностью, порожденной картой $\tilde{K}$. Ту же самую связность порождает любая линейно склеенная с $\tilde{K}$ карта. Согласно /2/, в произвольно склеенной с $\tilde{K}$ карте коэффициенты координатной связности равны

$$\Gamma^a_{mn} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} . \qquad /48/$$

Тензор кручения и тензор кривизны координатной связности /48/ равны нулю:

$$S^a_{mn} = 0, \quad R^a_{kln} = 0. \qquad /49/$$

Свертка координатной связности /48/ равна

$$\Gamma_m = \Gamma^a_{ma} = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \frac{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)}, \qquad /50/$$

так что координатную связность можно считать эквиаффинной, положив $\epsilon = \epsilon_0 J^{-1}$, где $\epsilon_0 = \mathrm{const}$, а J равно /15/.

Если в формулах /31/-/34/ считать, что связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ координатная, то они примут вид

$$R^a_{kln} = -\nabla_k P^a_{ln} + \nabla_l P^a_{kn} - \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}) \qquad /51/$$

$$\check{R}^a_{kln} = -\check{\nabla}_k P^a_{ln} + \check{\nabla}_l P^a_{kn} - \sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}) \qquad /52/$$

$$R_{ln} = -\nabla_a P^a_{ln} + \nabla_l P_n - (P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an}) \qquad /53/$$

$$\check{R}_{ln} = -\check{\nabla}_a P^a_{ln} + \check{\nabla}_l P_n - (P_s P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{an}). \qquad /54/$$

Если обе связности координатные, то тензор аффинной деформации удовлетворяет следующему условию, записанному в двух эквивалентных видах:

$$\nabla_k P^a_{ln} - \nabla_l P^a_{kn} = -\sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}),$$
$$\check{\nabla}_k P^a_{ln} - \check{\nabla}_l P^a_{kn} = -\sum_{s=1}^{N} (P^a_{ks} P^s_{ln} - P^a_{ls} P^s_{kn}). \qquad /55/$$

Координатную связность /48/ при желании можно представить в виде скобки Кристоффеля /37/ и даже неоднозначно. Действительно, возьмем любую неособенную симметричную матрицу (M_{ab}), где M_{ab} - числа, а не функции, и положим в карте K

$$g_{ab} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} M_{pq} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^a} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^b}. \qquad /56/$$

Для такого метрического тензора

$$\left\{ {a \atop mn} \right\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} \qquad /57/$$

в чем нетрудно убедиться. Вообще, для любой - не обязательно неособенной - симметричной матрицы чисел (M_{ab}) ковариантная производная от тензора /56/ по связности /48/ равна нулю.

ЧАСТНЫЙ ВИД ТЕНЗОРА АФФИННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Имеем

$$\check{\nabla}_k g^{ab} = \partial_k g^{ab} + \check{\Gamma}^a_{ks} g^{sb} + \check{\Gamma}^b_{ks} g^{as},$$
$$\partial_k g^{ab} = -\left\{ {a \atop ks} \right\} g^{sb} - \left\{ {b \atop ks} \right\} g^{as}. \qquad /58/$$

Следовательно, если в разности /21/ вычитаемое равно /37/, то

$$\check{\nabla}_k g^{ab} = P^a_{ks} g^{sb} + P^b_{ks} g^{as}. \qquad /59/$$

Аналогично, имеем

$$\check{\nabla}_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \check{\Gamma}^s_{km} g_{sn} - \check{\Gamma}^s_{kn} g_{ms}$$
$$\partial_k g_{mn} = \left\{ {s \atop km} \right\} g_{sn} + \left\{ {s \atop kn} \right\} g_{ms}. \qquad /60/$$

Следовательно,

$$\check{\nabla}_k g_{mn} = -P^s_{km} g_{sn} - P^s_{kn} g_{ms}. \qquad /61/$$

Поскольку мы условились рассматривать только симметричные связности, то

$$P^a_{mn} = -\frac{1}{2} g^{ak} (\check{\nabla}_m g_{kn} + \check{\nabla}_n g_{km} - \check{\nabla}_k g_{mn}). \qquad /62/$$

Обозначим Φ^a вектор

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn}. \qquad /63/$$

Из /59/ получаем

$$\Phi^a = (\check{\nabla}_b - P_b) g^{ab}. \qquad /64/$$

Если связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ эквиаффинна, то

$$\Phi^a = \frac{\check{\epsilon}}{\epsilon} \nabla_b \left(\frac{\epsilon}{\check{\epsilon}} g^{ab} \right). \qquad /65/$$

Дальше будем считать, что связность Γ^a_{mn} равна /37/, а связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$ равна /48/. Выражение $\check{\epsilon}^{-1} = J$ будем считать равным /15/.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СКАЛЯРА КРИВИЗНЫ

Из формулы /53/ следует, что

$$R = g^{mn}(P^a_{mb} P^b_{an} - P_s P^s_{mn}) + \nabla_a \Omega^a, \qquad /66/$$

где

$$\Omega^a = P_m g^{ma} - P^a_{mn} g^{mn}. \qquad /67/$$

ФУНКЦИОНАЛ ГИЛЬБЕРТА И ЕГО ВАРИАЦИЯ

Функционал Гильберта от метрического тензора g^{mn} равен

$$H = \int R\epsilon\, dx^1 \dots dx^N. \qquad /68/$$

Закон /33/ изменения тензора Риччи сразу дает вариацию δH. Действительно, свертывая /33/ с тензором $\breve{g}^{ln} = g^{ln} + \delta g^{ln}$ и пренебрегая квадратичными поправками, находим

$$\delta R = R_{ab}\, \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a. \qquad /69/$$

где вектор ω^a аналогичен вектору /67/:

$$\omega^a = g^{ma}\, \delta \Gamma^n_{mn} - g^{mn}\, \delta \Gamma^a_{mn}. \qquad /70/$$

Из /39/ и /38/ следует

$$\delta\epsilon = -\frac{1}{2}\epsilon\, g_{ab}\, \delta g^{ab}. \qquad /71/$$

Таким образом,

$$\delta H = \int (G_{ab}\, \delta g^{ab} - \nabla_a \omega^a)\, \epsilon\, dx^1 \dots dx^N. \qquad /72/$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим тензор

$$U^{ambn} = (\epsilon J)^2 (g^{ab} g^{mn} - g^{an} g^{mb}), \qquad /73/$$

где ϵ равно /39/, а $J = \breve{\epsilon}^{-1}$ равно /15/. Имеем

$$U^{ajkb} R_{jk} = (\epsilon J)^2 (R^{ab} - R g^{ab}),$$

$$U^{akij} R^b_{ijk} = 2(\epsilon J)^2 R^{ab}. \qquad /74/$$

С помощью этих формул и формул /52/ и /54/ преобразуем тензор /46/ следующим образом:

$$2(\epsilon J)^2 G^{ab} = U^{akij} (\breve{\nabla}_j P^b_{ik} + P^b_{is} P^s_{jk}) +$$

$$+ U^{ajkb} (\breve{\nabla}_j P_k - \breve{\nabla}_l P^l_{jk} + P_s P^s_{jk} - P^l_{js} P^s_{lk}). \qquad /75/$$

С другой стороны, на основании /35/ и /59/ находим

$$(\breve{\nabla}_s + 2P_s)\, U^{ambn} = P^a_{sk} U^{kmbn} + P^m_{sk} U^{akbn} +$$

$$+ P^b_{sk} U^{amkn} + P^n_{sk} U^{ambk}. \qquad /76/$$

Дальше обозначаем

$$U^{abn} = \breve{\nabla}_m U^{ambn}, \quad U^{ab} = \tilde{\nabla}_n U^{abn}. \qquad /77/$$

Из /76/ следует

$$U^{abn} = P^b_{mk} U^{amkn} + P^n_{mk} U^{ambk} - P_m U^{ambn}. \qquad /78/$$

Теперь находим

$$2(\epsilon J)^2 G^{ab} = U^{ab} + V^{ab}, \qquad /79/$$

где

$$V^{ab} = U^{akij} P^b_{is} P^s_{jk} + U^{ajkb} (P_s P^s_{jk} - P^l_{js} P^s_{lk}) -$$

$$- P^b_{mk} \breve{\nabla}_n U^{amkn} - P^n_{mk} \breve{\nabla}_n U^{ambk} + P_m \breve{\nabla}_n U^{ambn}. \qquad /80/$$

В последней формуле с помощью /76/ можно избавиться от производных $\breve{\nabla}_n$. В результате получается

$$V^{ab} = P^a_{km} P^b_{ln} U^{klmn} + A_{mn} U^{ambn} +$$

$$+ B^a_{kmn} U^{bkmn} + B^b_{kmn} U^{akmn}, \qquad /81/$$

где

$$A_{mn} = 2P_s P^s_{mn} - P^l_{mk} P^k_{ln} - P_m P_n,$$

$$B^a_{kmn} = P^a_{km} P_n + P^s_{km} P^a_{sn}. \qquad /82/$$

Полагая здесь $\breve{\Gamma}^a_{mn} = 0$, получаем формулы Синга [3].

ПСЕВДОТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как и тензорное поле аффинной деформации

$$P^a_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right), \qquad /83/$$

тензорное поле

$$t^{ab} = -\frac{c^4}{16\pi\gamma} (\epsilon J)^{-2} V^{ab}, \qquad /84/$$

где c - скорость света, γ - постоянная Ньютона, является функционалом карты $\tilde{K}$, в которой компоненты связности $\breve{\Gamma}^a_{mn}$ равны нулю. Этот функционал называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Отметим, что значение таких функционалов не меняется при замене в их аргументах карты $\tilde{K}$ на любую линейно склеенную с $\tilde{K}$ карту $\tilde{\tilde{K}}$.

УСЛОВИЕ ГАРМОНИЧНОСТИ

Условием гармоничности, накладываемым на тензор аффинной деформации /83/, называем

$$\Phi^a = g^{mn} P^a_{mn} = 0, \quad a \in \{1,\dots,N\}. \qquad /85/$$

Для формулировки этого условия достаточно знать связность /48/ и, ввиду равенства /57/, можно не прибегать к метрике типа /56/. Согласно /65/, это условие записывается в виде

$$\Phi^a = \frac{1}{\epsilon J} \tilde{\nabla}_b (\epsilon J g^{ab}) = 0, \quad a \in \{1,\dots,N\}. \qquad /86/$$

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

По отношению к тензорному полю g_{ab} координаты называются гармоническими, если выполняются равенства

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{-g}\, g^{ab}) = 0, \quad a \in \{1,\dots,N\}. \qquad /87/$$

Составленную из таких координат карту будем называть гармонической.

Согласно /86/, если выполняется условие гармоничности /85/, то то карта $\tilde{K}$, в которой компоненты связности $\tilde{\Gamma}^a_{mn}$ равны нулю, является гармонической картой. Если карта $\tilde{K}$ гармоническая, то, очевидно, и любая линейно склеенная с ней карта K является гармонической. Но карта K будет гармонической и в том случае, когда

$$g^{mn} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^m \partial x^n} = 0, \quad i \in \{1,\dots,N\}. \qquad /88/$$

Это следует из /83/ и равенства

$$g^{mn} \left\{ {a \atop mn} \right\} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^b} (\sqrt{-g}\, g^{ab}). \qquad /89/$$

Пример

В случае метрики Шварцшильда

$$g_{ab}\, dx^a dx^b = c^2 V^2 dt^2 - V^{-2} d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \qquad /90/$$

где

$$V^2 = 1 - \frac{2\alpha}{\rho}, \quad \alpha = \frac{\gamma M}{c^2}, \quad \rho > 2\alpha, \qquad /91/$$

гармоническими являются координаты

$$\tilde{x} = (\rho - \alpha)\sin\theta\cos\phi, \quad \tilde{y} = (\rho - \alpha)\sin\theta\sin\phi,$$

$$\tilde{z} = (\rho - \alpha)\cos\theta, \quad \tilde{t} = t. \qquad /92/$$

По их поводу читаем: "Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$? Нам представляется единственно правильным второе определение"[4]. В связи с этим мнением в работе [2] наряду с метрикой Шварцшильда /90/ была введена метрика Минковского

$$\breve{g}_{ab}\, dx^a dx^b = c^2 dt^2 - d\rho^2 - (\rho - \alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \qquad /93/$$

Однако, учитывая, что понятие прямой имеет не метрическую, а аффинную природу, мы с равным успехом могли бы вместо метрики /93/ ввести только аффинную связность по формуле /48/, положив $\tilde{x}^a$ равными /92/, а x^a равными $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$. В таком случае метрика Шварцшильда рассматривалась бы не на фоне Минковского, а на фоне четырехмерного аффинного пространства. Это устраняет трудности, возникающие с интерпретацией пары световых конусов с вершиной в каждой мировой точке, задаваемых метриками /90/ и /93/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. "Наука", М., 1976.
2. Черников Н.А. О трудностях в релятивистской теории гравитации. В кн.: Труды VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.382.
3. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963, с.220.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955, с.273.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 апреля 1986 года.

Черников Н.А. Р2-86-207
Конспект теории аффинной связности
для гравитационистов

Предназначенный для гравитационистов конспект теории аффинной связности написан в связи с дискуссией об энергии гравитационного поля. Псевдотензор энергии-импульса квадратично выражен через тензор аффинной деформации. Через него же линейно выражено условие, выделяющее гармонические координаты. Рассмотрена метрика Шварцшильда на фоне четырехмерного аффинного пространства, аффинные координаты которого для этой метрики являются гармоническими.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Chernikov N.A. P2-86-207
A Review of the Affine Connection Theory
for Gravitationalists

A review for gravitationalists is made of the theory of affine connection in view of the discussion of the energy of the gravitation field. The energy-momentum pseudotensor is given as a quadratic function of the affine-deformation tensor. A linear expression of it provides also the condition for separating the harmonic coordinates. The Schwarzshild metric is considered on the background of four-dimensional affine space whose affine coordinates for the metric are harmonic.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986