сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-202

В.К.Мельников

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1986

За последние два десятилетия в теории интегрирования нелинейных эволюционных уравнений достигнут существенный прогресс. В значительной мере он был обусловлен использованием идей и методов теории обратных задач рассеяния, основы которой были заложены в работах /1-4/. За это время определился интересный с математической точки зрения и важный в прикладном отношении класс нелинейных эволюционных уравнений, обладающих операторным представлением специального вида /5-19/. Это представление имеет форму операторного соотношения, которое констатирует тот факт, что некоторая пара линейных операторов обладает следующим свойством: ядро одного из этих операторов является инвариантным подпространством для другого. Впервые такие операторы были, как известно, использованы в заметке /5/ для интегрирования уравнения Кортевега - де Вриза и с тех пор являются основным рабочим инструментом в обширном потоке статей, написанных на эту тему.

Для уравнений указанного выше класса проблема нахождения их решений сводится к несравненно более простой задаче нахождения решений линейных интегральных уравнений с ядрами весьма специального вида. И хотя в настоящее время известно несколько способов для получения ядер этих уравнений, все они имеют ограниченную область применения. В частности, это утверждение справедливо и по отношению к работам /17-19/, сыгравшим важную роль в изучении ряда нелинейных эволюционных уравнений. Практически для каждого нового класса линейных операторов, используемого для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений, задача нахождения соответствующей линейной системы интегральных уравнений решается заново.

В настоящей работе названная выше проблема решена для нелинейных эволюционных уравнений, перечисленных в заметке /15/. Более точно, в работе указана система линейных интегральных уравнений, с помощью которой получены явные выражения для решений ряда нелинейных эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие волн на плоскости x, y. Как оказалось, решения этих уравнений обладают рядом замечательных свойств, не встречавшихся ранее у других уравнений этого класса.

§ 1. СИСТЕМА /1.1/, /1.2/ И ЕЕ СВОЙСТВА

Основой всех последующих рассмотрений является система линейных интегральных уравнений

$$X_0(s) + \oint_c B(s, s') X_0(s') ds' + J_0 \lambda(s) = 0, \qquad /1.1/$$

$$X_r(s) + \oint_c B(s,s')X_r(s')ds' = J_r\lambda(s), \; r = 1,\ldots,r_0, \qquad /1.2/$$

где $B = B(s,s')$ - квадратная матрица порядка $2r_0 + 1$ с элементами $B_{\mu,\nu}, \mu,\nu = 0,1,\ldots, 2r_0 \; (r_0 > 0)$, далее, $J_0, J_1, \ldots, J_{r_0}$ - постоянные диагональные матрицы того же порядка, наконец, $X_0(s)$, $X_1(s),\ldots, X_{r_0}(s)$ и $\lambda(s)$ - векторы-столбцы с $2r_0 + 1$ компонентами. При этом мы будем предполагать, что отличные от нуля элементы матрицы B имеют вид

$$B_{\mu,\nu}(s,s') = \begin{cases} \dfrac{f_0(s)\exp[(\omega_0(s) - \sigma_\nu(s'))x + \tau_0(s)y]}{\omega_0(s) - \sigma_\nu(s')}, & \mu = 0, 0 \le \nu \le r_0, \\ \dfrac{f_\mu(s)\delta_{\mu,\nu-r_0}}{\sigma_\mu^{k_0+2}(s) - \omega_\nu^{k_0+2}(s')}, & 1 \le \mu \le r_0 < \nu \le 2r_0, \\ \dfrac{f_\mu(s)\exp[(\omega_\mu(s) - \sigma_\nu(s'))x]}{\omega_\mu(s) - \sigma_\nu(s')}, & 0 \le \nu \le r_0 < \mu \le 2r_0. \end{cases} \qquad /1.3/$$

Все остальные элементы матрицы B считаются равными нулю, т.е.

$$B_{\mu,\nu} = 0, \text{ если } \begin{cases} 1)\; \mu = 0, \; r_0 < \nu \le 2r_0, \\ 2)\; 1 \le \mu \le r_0, \; 0 \le \nu \le r_0, \\ 3)\; r_0 < \mu, \nu \le 2r_0. \end{cases} \qquad /1.4/$$

Матрицы $J_0, J_1, \ldots, J_{r_0}$ являются проекторами в $(2r_0+1)$-мерном векторном пространстве, причем матрица J_0 проектирует на подпространство, образуемое векторами, у которых равны нулю все компоненты с номерами $r = 1,\ldots, r_0$, а матрица J_r при $r = 1,\ldots, r_0$ проектирует на одномерное подпространство, образуемое векторами, у которых отлична от нуля только r-я компонента. При этом ми, у которых отлична от нуля только r-я компонента. При этом нумерация компонент у векторов начинается с нуля. Более точно, справедливы равенства

$$J_0 = \mathrm{diag}(1, \underbrace{0,\ldots,0}_{r_0}, \underbrace{1,\ldots,1}_{r_0}),$$
$$J_r = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\ldots,0}_{r}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{2r_0-r}), \; r = 1,\ldots,r_0. \qquad /1.5/$$

Компоненты $\lambda_\mu, \mu = 0,1,\ldots, 2r_0$, вектора λ имеют вид

$$\lambda_\mu = \begin{cases} f_0(s)\exp[\omega_0(s)x + \tau_0(s)y], & \text{если } \mu = 0, \\ f_\mu(s), & \text{если } 1 \le \mu \le r_0, \\ f_\mu(s)\exp[\omega_\mu(s)x], & \text{если } r_0 < \mu \le 2r_0. \end{cases} \qquad /1.6/$$

Интегрирование в уравнениях /1.1/, /1.2/ производится по контуру c, лежащему в комплексной плоскости и состоящему из конечного числа компонент связности c_α, каждая из которых гомеоморфна

либо окружности, либо отрезку. Всюду в дальнейшем будем считать контур c спрямляемым и имеющим конечную длину. При этом величины

$$f_0, f_1, \ldots, f_{2r_0}, \omega_0, \omega_{r_0+1}, \ldots, \omega_{2r_0}, \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r_0}, \tau_0$$

считаются заданными функциями параметра $s \in c$ и удовлетворяют следующим условиям: 1/ они непрерывны по s и от координат x, y не зависят; 2/ если на компоненте связности c_α контура c функция f_0 не равна тождественно нулю, то на прямом произведении $c_\alpha \times c_\alpha$ разность $\omega_0(s) - \sigma_0(s')$ не обращается в нуль; 3/ если на компоненте связности c_α контура c функция f_0 не равна тождественно нулю, а на компоненте c_β функция f_ν при $1 \le \nu \le r_0$ не равна тождественно нулю, то на прямом произведении $c_\alpha \times c_\beta$ разность $\omega_0(s) - \sigma_\nu(s')$ не обращается в нуль; 4/ если на компоненте связности c_α контура c функция f_μ при $r_0 < \mu \le 2r_0$ не равна тождественно нулю, а на компоненте c_β функция f_0 не равна тождественно нулю, то на прямом произведении $c_\alpha \times c_\beta$ разность $\omega_\mu(s) - \sigma_0(s')$ не обращается в нуль; 5/ если на компоненте связности c_α контура c функция f_μ при $r_0 < \mu \le 2r_0$ не равна тождественно нулю, а на компоненте c_β функция f_ν при $1 \le \nu \le r_0$ не равна тождественно нулю, то на прямом произведении $c_\alpha \times c_\beta$ разность $\omega_\mu(s) - \sigma_\nu(s')$ не обращается в нуль; 6/ если на компоненте связности c_α контура c функция f_μ при $1 \le \mu \le r_0$ не равна тождественно нулю, а на компоненте c_β функция $f_{\mu+r_0}$ не равна тождественно нулю, то на прямом произведении $c_\alpha \times c_\beta$ разность $\sigma_\mu^{k_0+2}(s) - \omega_{\mu+r_0}^{k_0+2}(s')$ не обращается в нуль; 7/ функции $\omega_0(s)$, $\sigma_0(s)$ и $\tau_0(s)$ при любом $s \in c$ удовлетворяют условию

$$\omega_0^{k_0+2}(s) - \sigma_0^{k_0+2}(s) = \kappa\tau_0(s), \qquad /1.7/$$

где κ - параметр, не зависящий от точки $s \in c$.

Векторы $X_0(s), X_1(s),\ldots, X_{r_0}(s)$ соответственно с компонентами

$$X_{0,0}(s), X_{0,1}(s),\ldots, X_{0,2r_0}(s), X_{1,0}(s), X_{1,1}(s),\ldots$$
$$\ldots, X_{1,2r_0}(s),\ldots, X_{r_0,0}(s), X_{r_0,1}(s),\ldots, X_{r_0,2r_0}(s),$$

т.е.

$$X_0(s) = \{X_{0,0}(s), X_{0,1}(s),\ldots, X_{0,2r_0}(s)\},$$
$$X_1(s) = \{X_{1,0}(s), X_{1,1}(s),\ldots, X_{1,2r_0}(s)\}, \qquad /1.8/$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{r_0}(s) = \{X_{r_0,0}(s), X_{r_0,1}(s),\ldots, X_{r_0,2r_0}(s)\}$$

являются неизвестными и подлежат определению с помощью решения системы /1.1/, /1.2/. Именно они играют главную роль в нахождении решений указанных выше нелинейных эволюционных уравнений.

Возьмем теперь матрицы ϵ и J порядка $2r_0+1$, имеющие вид

$$\epsilon = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /1.9/$$

где I - единичная матрица порядка r_0. В силу /1.5/ и /1.9/ имеем

$$J = \epsilon J_0 \epsilon. \qquad /1.10/$$

Возьмем, далее, диагональные матрицы ω, σ, τ порядка $2r_0+1$, имеющие вид

$$\omega = \mathrm{diag}(\omega_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}, \omega_{r_0+1}, \dots, \omega_{2r_0}),$$

$$\sigma = \mathrm{diag}(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}, \omega_{r_0+1}, \dots, \omega_{2r_0}), \qquad /1.11/$$

$$\tau = \mathrm{diag}(\tau_0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0).$$

Согласно /1.7/ справедливо равенство

$$\omega^{k_0+2} - \sigma^{k_0+2} = \kappa\tau. \qquad /1.12/$$

Пусть

$$\hat{\omega} = J_0\omega, \quad \hat{\sigma} = J\sigma. \qquad /1.13/$$

Возьмем, наконец, вектор ℓ с компонентами ℓ_μ, $\mu = 0,1,\dots,2r_0$, вида

$$\ell_\mu = \begin{cases} \exp[-\sigma_\mu(s)x], & \text{если } 0 \le \mu \le r_0, \\ 1, & \text{если } r_0 < \mu \le 2r_0. \end{cases} \qquad /1.14/$$

На основании /1.3/-/1.6/, /1.9/, /1.11/, /1.13/ и /1.14/ получаем

$$\frac{\partial B(s,s')}{\partial x} = \hat{\omega}(s)B(s,s') - B(s,s')\hat{\sigma}(s') = J_0\lambda(s)\tilde{\ell}(s')J,$$

$$\frac{\partial B(s,s')}{\partial y} = \tau(s)B(s,s'), \quad \frac{\partial\lambda(s)}{\partial x} = J_0\omega(s)\lambda(s), \qquad /1.15/$$

$$\frac{\partial\lambda(s)}{\partial y} = \tau(s)\lambda(s), \quad \frac{\partial\ell(s)}{\partial x} = -J\sigma(s)\ell(s),$$

где знак "~" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке, а произведение вектора-столбца $\lambda(s)$ на вектор-строку $\tilde{\ell}(s')$ понимается как произве-

дение матриц и является квадратной матрицей порядка $2r_0+1$ с элементами $\lambda_\mu(s)\ell_\nu(s')$, $\mu,\nu = 0,1,\dots,2r_0$.

Определитель Фредгольма D каждой из систем /1.1/, /1.2/ имеет вид[20]

$$D = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D_n, \qquad /1.16/$$

где $D_0 = 1$, а при $n > 0$ имеем

$$D_n = \sum_{\mu_1=0}^{2r_0}\cdots\sum_{\mu_n=0}^{2r_0}\oint_c\cdots\oint_c \Delta_n\binom{s_1,\dots,s_n}{\mu_1,\dots,\mu_n}ds_1\dots ds_n,$$

$$\Delta_n\binom{s_1,\dots,s_n}{\mu_1,\dots,\mu_n} = \det\begin{vmatrix} B_{\mu_1,\mu_1}(s_1,s_1) & \dots & B_{\mu_1,\mu_n}(s_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{\mu_n,\mu_1}(s_n,s_1) & \dots & B_{\mu_n,\mu_n}(s_n,s_n) \end{vmatrix}. \qquad /1.17/$$

На основании леммы Адамара[21] ряд /1.16/ сходится равномерно по x,y в любой ограниченной области двумерного комплексного пространства C^2. Следовательно, определитель Фредгольма D является целой аналитической функцией двух комплексных переменных x,y во всем двумерном комплексном пространстве C^2. Это значит, что если $D \not\equiv 0$, то на плоскости $\mathrm{Im}\,x = \mathrm{Im}\,y = 0$ множество G_0 нулей определителя Фредгольма D является замкнутым и нигде не плотным. Отсюда следует, что множество $G' = \boldsymbol{R}^2 \setminus G_0$ точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$, в которых определитель Фредгольма D отличен от нуля, в этом случае является открытым и всюду плотным.

Рассмотрим теперь квадратную матрицу $\Gamma(s,s')$ порядка $2r_0+1$ с элементами $\Gamma_{\mu,\nu}(s,s')$, $\mu,\nu = 0,1,\dots,2r_0$, вида[20]

$$\Gamma_{\mu,\nu}(s,s') = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}_{\mu,\nu}(s,s'), \qquad /1.18/$$

где $\Gamma^{(0)}_{\mu,\nu}(s,s') = B_{\mu,\nu}(s,s')$, а при $n > 0$ имеем

$$\Gamma^{(n)}_{\mu,\nu}(s,s') = \sum_{\mu_1=0}^{2r_0}\cdots\sum_{\mu_n=0}^{2r_0}\oint_c\cdots\oint_c F_n\binom{s,s',s_1,\dots,s_n}{\mu,\nu,\mu_1,\dots,\mu_n}ds_1\dots ds_n, \qquad /1.19/$$

$$F_n\binom{s,s',s_1,\dots,s_n}{\mu,\nu,\mu_1,\dots,\mu_n} = \det\begin{vmatrix} B_{\mu,\nu}(s,s') & B_{\mu,\mu_1}(s,s_1) & \cdots & B_{\mu,\mu_n}(s,s_n) \\ B_{\mu_1,\nu}(s_1,s') & B_{\mu_1,\mu_1}(s_1,s_1) & \cdots & B_{\mu_1,\mu_n}(s_1,s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{\mu_n,\nu}(s_n,s') & B_{\mu_n,\mu_1}(s_n,s_1) & \cdots & B_{\mu_n,\mu_n}(s_n,s_n) \end{vmatrix}.$$

Лемма Адамара[21] гарантирует сходимость ряда /1.18/ равномерно по x,y в любой ограниченной области двумерного комплексного пространства C^2. Следовательно, элементы $\Gamma_{\mu,\nu}(s,s')$ матрицы $\Gamma(s,s')$ будут целыми аналитическими функциями двух комплексных переменных x, y во всем двумерном комплексном пространстве C^2.

Из равенств /1.16/-/1.19/ следует, что при любых $s, s' \in c$ выполняются соотношения /20/

$$\Gamma(s,s') + \oint_c \Gamma(s,z)\,B(z,s')\,dz = D\,B(s,s'),$$

$$\Gamma(s,s') + \oint_c B(s,z)\,\Gamma(z,s')\,dz = D\,B(s,s'). \qquad /1.20/$$

В соответствии с /1.20/ получаем, что решение $X_0(s), X_1(s), \dots, X_{r_0}(s)$ системы /1.1/, /1.2/ имеет вид

$$X_0(s) = -J_0\,\lambda(s) + \frac{1}{D}\oint_c \Gamma(s,s')\,J_0\,\lambda(s')\,ds', \qquad /1.21/$$

$$X_r(s) = J_r\,\lambda(s) - \frac{1}{D}\oint_c \Gamma(s,s')\,J_r\,\lambda(s')\,ds', \quad r = 1,\dots,r_0. \qquad /1.22/$$

С учетом /1.3/-/1.6/, /1.9/, /1.14/ и /1.15/ из равенства /1.21/ вытекает соотношение

$$\oint_c \tilde{\ell}(s)\,J X_0(s)\,ds = -\frac{\partial}{\partial x}\oint_c \mathrm{Sp}\,B(s,s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{D}\oint_c\oint_c \tilde{\ell}(s)\,J\,\Gamma(s,s')\,J_0\,\lambda(s')\,ds'ds. \qquad /1.23/$$

С другой стороны, на основе /1.17/ и /1.19/ имеем

$$\frac{\partial D_n}{\partial x} = n\,D_{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\oint_c \mathrm{Sp}\,B(s,s)\,ds -$$

$$-\,n(n-1)\oint_c\oint_c \tilde{\ell}(s)\,J\,\Gamma^{(n-2)}(s,s')\,J_0\lambda(s')\,ds'ds,$$

где $\Gamma^{(n-2)}(s,s')$ - квадратная матрица порядка $2r_0+1$ с элементами $\Gamma^{(n-2)}_{\mu,\nu}(s,s')$. Таким образом, с помощью /1.16/ и /1.18/ получаем соотношение

$$\frac{\partial D}{\partial x} = D\frac{\partial}{\partial x}\oint_c \mathrm{Sp}\,B(s,s)\,ds -$$

$$-\oint_c\oint_c \tilde{\ell}(s)\,J\,\Gamma(s,s')\,J_0\,\lambda(s')\,ds'ds.$$

Сравнивая это соотношение с /1.23/, убеждаемся в справедливости равенства

$$\oint_c \tilde{\ell}(s)\,J X_0(s)\,ds = -\frac{\partial}{\partial x}\ln D, \qquad /1.24/$$

играющего важную роль в этой работе.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Решение системы /1.1/, /1.2/ позволяет определить несколько линейных операторов, имеющих основополагающее значение в дальнейшем исследовании. С этой целью предположим, что в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$ определитель Фредгольма D системы /1.1/, /1.2/ удовлетворяет условию

$$D \neq 0. \qquad /2.1/$$

Далее, с помощью решения системы /1.1/, /1.2/ определим величины $K_{n,r}$ и $W_{n,r}$, полагая при $r = 0,1,\dots,r_0$ и $n \geq 0$

$$K_{n,r} = \oint_c \tilde{\ell}(s)\,\sigma^n(s)\,J X_r(s)\,ds,$$

$$W_{n,r} = \oint_c \tilde{\ell}(s)\,J\,\frac{\partial^n X_r(s)}{\partial x^n}\,ds. \qquad /2.2/$$

Определим теперь оператор L вида

$$L = \sum_{k=0}^{k_0+2} u_k\,\partial_x^k, \quad k_0 \geq 0, \qquad /2.3/$$

полагая, что

$$u_{k_0+2} \equiv 1, \qquad /2.4/$$

а коэффициенты $u_{k_0+1}, \dots, u_0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u_k = K_{k_0-k+1,0} - \sum_{p=0}^{k_0-k+1}\sum_{q=0}^{p} u_{p+k+1}\,C^k_{q+k}\,\frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q}. \qquad /2.5/$$

Нетрудно убедиться, что согласно /2.4/ и /2.5/ имеем

$$u_{k_0+1} \equiv 0, \quad u_{k_0} = -(k_0+2)\frac{\partial W_{0,0}}{\partial x},$$

$$u_{k_0-1} = \frac{k_0-1}{2}\,\frac{\partial u_{k_0}}{\partial x} - (k_0+2)\frac{\partial W_{1,0}}{\partial x} - u_{k_0}W_{0,0}. \qquad /2.6/$$

Определим, наконец, функции v_r, w_r, $r = 1,\dots,r_0$, посредством равенств

$$v_r = \oint_c \tilde{\ell}(s)\,J_r'\,X_0(s)\,ds, \quad w_r = -W_{0,r}, \qquad /2.7/$$

где матрица J_r' связана с определенными ранее с помощью /1.5/ и /1.9/ матрицами J_r и ϵ соотношением

$$J_r' = \epsilon J_r \epsilon . \qquad /2.8/$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$ выполнено неравенство /2.1/, то решение $X_0(s), X_1(s), \dots, X_{r_0}(s)$ системы /1.1/, /1.2/ в этой окрестности при любом $s \in \wp$ удовлетворяет соотношениям

$$(L - \kappa\frac{\partial}{\partial y}) X_0(s) + \sum_{r=1}^{r_0} v_r X_r(s) = \sigma^{k_0+2}(s) X_0(s), \qquad /2.9/$$

$$\frac{\partial}{\partial x} X_r(s) + w_r X_0(s) = 0, \quad r = 1, \dots, r_0. \qquad /2.10/$$

Доказательство. Дифференцируя уравнение /1.1/ n раз по x, с учетом /1.15/ получаем

$$\frac{\partial^n X_0(s)}{\partial x^n} + \oint_c B(s, s')\frac{\partial^n X_0(s')}{\partial x^n} ds' + S_n(s) + \omega^n(s) J_0 \lambda(s) = 0, \qquad /2.11/$$

где $S_0(s) \equiv 0$, а при $n > 0$ величина $S_n(s)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_n(s) = \frac{\partial}{\partial x} S_{n-1}(s) + \oint_c \frac{\partial B(s, s')}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} X_0(s')}{\partial x^{n-1}} ds'.$$

На основании /1.15/ и /2.2/ это соотношение принимает вид

$$S_n(s) = \frac{\partial}{\partial x} S_{n-1}(s) + J_0 \lambda(s) W_{n-1,0}.$$

Отсюда следует, что при $n > 0$ имеем

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{m} \omega^\alpha(s) J_0 \lambda(s) C_m^\alpha \frac{\partial^{m-\alpha} W_{n-m-1,0}}{\partial x^{m-\alpha}}. \qquad /2.12/$$

Умножим теперь равенство /2.11/ на u_n и просуммируем по n от нуля до $k_0 + 2$. В соответствии с /2.3/ получаем равенство

$$L X_0(s) + \oint_c B(s, s') L X_0(s') ds' + S(s) + \sum_{n=0}^{k_0+2} \omega^n(s) J_0 \lambda(s) u_n = 0, \qquad /2.13/$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{k_0+2} u_n S_n(s). \qquad /2.14/$$

Далее, дифференцируя уравнение /1.1/ по y, в силу /1.15/ получаем равенство

$$\frac{\partial X_0(s)}{\partial y} + \oint_c B(s, s') \frac{\partial X_0(s')}{\partial y} ds' +$$

$$+ \tau(s) \oint_c B(s, s') X_0(s') ds' + \tau(s)\lambda(s) = 0.$$

Умножим это равенство на κ и вычтем из /2.13/. В результате имеем

$$(L - \kappa\frac{\partial}{\partial y}) X_0(s) + \oint_c B(s, s')(L - \kappa\frac{\partial}{\partial y}) X_0(s') ds' + S(s) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{k_0+2} \omega^n(s) J_0 \lambda(s) u_n - \kappa\tau(s) \oint_c B(s, s') X_0(s') ds' - \kappa\tau(s)\lambda(s) = 0. \qquad /2.15/$$

Умножим теперь уравнение /1.1/ слева на матрицу $\sigma^{k_0+2}(s)$ и полученный результат вычтем из /2.15/. Согласно /1.12/ и /2.4/ получаем равенство

$$Y_0(s) + \oint_c B(s, s') Y_0(s') ds' + S(s) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0+1} \omega^k(s) J_0 \lambda(s) u_k - \Omega(s) = 0, \qquad /2.16/$$

где

$$Y_0(s) = (L - \kappa\frac{\partial}{\partial y}) X_0(s) - \sigma^{k_0+2}(s) X_0(s), \qquad /2.17/$$

$$\Omega(s) = \oint_c [\omega^{k_0+2}(s) B(s, s') - B(s, s')\sigma^{k_0+2}(s')] X_0(s') ds'. \qquad /2.18/$$

Положим

$$\omega^{k_0+2}(s) B(s, s') - B(s, s')\sigma^{k_0+2}(s') = \Delta(s, s') +$$

$$+ \hat\omega^{k_0+2}(s) B(s, s') - B(s, s')\hat\sigma^{k_0+2}(s'), \qquad /2.19/$$

где матрицы $\hat\omega(s)$ и $\hat\sigma(s)$ определены посредством /1.13/, а

$$\Delta(s, s') = [\omega^{k_0+2}(s) - \hat{\omega}^{k_0+2}(s)]\, B(s, s') - \qquad /2.20/$$

$$- B(s, s')[\sigma^{k_0+2}(s') - \hat{\sigma}^{k_0+2}(s')].$$

С помощью тождества

$$\hat{\omega}^{k_0+2}(s) B(s, s') - B(s, s') \hat{\sigma}^{k_0+2}(s') =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0+1} \hat{\omega}^k(s)[\hat{\omega}(s) B(s, s') - B(s, s') \hat{\sigma}(s')] \hat{\sigma}^{k_0-k+1}(s')$$

на основе /1.15/ и /2.2/ находим, что

$$\oint_c [\hat{\omega}^{k_0+2}(s) B(s, s') - B(s, s') \hat{\sigma}^{k_0+2}(s')] X_0(s') ds' = \qquad /2.21/$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0+1} \omega^k(s) J_0 \lambda(s) K_{k_0-k+1,0} .$$

Далее, в соответствии с /1.11/, /1.13/ и /2.20/ все элементы матрицы Δ равны нулю, кроме тех, которые стоят на пересечении строк с номерами $\mu = 1, \dots, r_0$ и столбцов с номерами $\nu = r_0 + 1, \dots, 2r_0$. Расположенный здесь минор Δ_0 согласно /1.3/ имеет вид $\Delta_0 = -\operatorname{diag}(f_1(s), \dots, f_{r_0}(s))$. Отсюда в силу /1.5/, /1.6/, /1.14/ и /2.8/ следует, что

$$\oint_c \Delta(s, s') X_0(s') ds' = - \sum_{r=1}^{r_0} J_r \lambda(s) v_r .$$

С учетом уравнения /1.2/ получаем, что определенная с помощью /2.17/ величина $Z_0(s) = Y_0(s) + \sum_{r=1}^{r_0} v_r X_r(s)$ на основании /2.16/ удовлетворяет соотношению

$$Z_0(s) + \oint_c B(s, s') Z_0(s') ds' + R(s) + S(s) = 0, \qquad /2.22/$$

где величина $R(s)$ согласно /2.18/-/2.21/ имеет вид

$$R(s) = \sum_{k=0}^{k_0+1} \omega^k(s) J_0 \lambda(s)(u_k - K_{k_0-k+1,0}) .$$

Подставим теперь выражение /2.12/ в /2.14/. Изменив после этого порядок суммирования, находим, что

$$S(s) = \sum_{k=0}^{k_0+1} \sum_{p=0}^{k_0-k+1} \sum_{q=0}^{p} \omega^k(s) J_0 \lambda(s) u_{p+k+1}\, C_{q+k}^{k} \frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q} .$$

Отсюда на основе /2.5/ следует равенство $R + S = 0$. Таким образом, в соответствии с /2.1/ и /2.22/ убеждаемся в справедливости /2.9/.

Продифференцируем теперь по x уравнение /1.2/. С помощью /1.15/, /2.2/ и /2.7/ получаем соотношение

$$\frac{\partial X_r(s)}{\partial x} + \oint_c B(s, s') \frac{\partial X_r(s')}{\partial x} ds' - J_0 \lambda(s) w_r = 0,$$

$$r = 1, \dots, r_0 .$$

В силу /1.1/ отсюда следует равенство

$$\frac{\partial X_r(s)}{\partial x} + w_r X_0(s) + \oint_c B(s, s') [\frac{\partial X_r(s')}{\partial x} + w_r X_0(s')] ds' = 0,$$

из которого в соответствии с /2.1/ вытекает справедливость /2.10/.

Теорема доказана.

Возьмем теперь произвольное целое число $n_0 \geq 0$ и образуем операторы A и Q_r, $r = 1, \dots, r_0$, вида

$$A = \sum_{n=0}^{n_0+2} a_n \partial_x^n , \quad Q_r = \sum_{n=0}^{n_0+1} Q_{r,n} \partial_x^n , \qquad /2.23/$$

полагая

$$a_{n_0+2} = 1, \quad Q_{r,n_0+1} = - w_r , \qquad /2.24/$$

а остальные коэффициенты этих операторов определим с помощью рекуррентных соотношений

$$a_n = K_{n_0-n+1,0} - \sum_{p=0}^{n_0-n+1} \sum_{q=0}^{p} a_{p+n+1} C_{q+n}^{n} \frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q} , \qquad /2.25/$$

$$Q_{r,n} = K_{n_0-n+1,r} - \sum_{p=0}^{n_0-n} \sum_{q=0}^{p} Q_{r,p+n+1} C_{q+n}^{n} \frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q} . \qquad /2.26/$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Определенные согласно /2.23/-/2.26/ операторы A и Q_r, $r = 1,\dots,r_0$, таковы, что операторы

$$\hat{Q}_r = w_r A + \partial_x Q_r, \quad r = 1,\dots,r_0, \tag{/2.27/}$$

имеют нулевой порядок, т.е. являются операторами умножения на функцию.

Доказательство. Полагая $Q_{r,n_0+2} \equiv 0$, мы видим, что для доказательства теоремы нам нужно убедиться в справедливости равенства

$$\hat{Q}_{r,n} = Q_{r,n-1} + \frac{\partial}{\partial x} Q_{r,n} + w_r a_n = 0 \tag{/2.28/}$$

при $n = 1,\dots,n_0+2$. При $n = n_0+2$ справедливость этого равенства следует из /2.24/. Предположим теперь, что равенство /2.28/ справедливо при всех n, удовлетворяющих неравенству $n' < n \le n_0 + 2$, где $1 \le n' < n_0 + 2$. Покажем, что отсюда следует его справедливость при $n = n'$. Действительно, согласно /1.14/, /2.2/ и /2.10/ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} K_{n,r} + K_{n+1,r} + w_r K_{n,0} = 0.$$

С учетом этого равенства на основе /2.25/, /2.26/ и /2.28/ получаем соотношение

$$\hat{Q}_{r,n'} = -\sum_{p=0}^{n_0-n'+1} \sum_{q=0}^{p} \hat{Q}_{r,p+n'+1}\, C^{n'}_{q+n'} \frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q}.$$

Правая часть этого соотношения равна нулю в силу предположения индукции. Значит, и левая часть равна нулю, т.е. равенство /2.28/ справедливо и при $n = n'$. Отсюда очевидным образом следует справедливость доказываемой теоремы.

Предположим теперь, что входящие в систему /1.1/, /1.2/ величины $f_0, f_1, \dots, f_{2r_0}$ зависят от времени t так, что выполняется равенство

$$\frac{\partial f(s)}{\partial t} + c_0 (\hat{\omega}^{n_0+2}(s) - \hat{\sigma}^{n_0+2}(s)) f(s) = 0, \tag{/2.29/}$$

где f - вектор с компонентами $f_0, f_1, \dots, f_{2r_0}$, величина $c_0 \in C$ и является константой, т.е. от точки $s \in c$ и от координат x, y, t не зависит. О величинах $\omega_0, \omega_{r_0+1}, \dots, \omega_{2r_0}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}, \tau_0$ будем предполагать, что они от t не зависят. В этой ситуации справедлива следующая

Теорема 3. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство /2.1/, то решение $X_0(s), X_1(s), \dots, X_{r_0}(s)$ системы /1.1/, /1.2/ в этой окрестности при любом $s \in c$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} X_0(s) + c_0 A X_0(s) = c_0 \hat{\sigma}^{n_0+2}(s) X_0(s), \tag{/2.30/}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X_r(s) + c_0 Q_r X_0(s) = c_0 \hat{\sigma}^{n_0+2}(s) X_r(s), \quad r = 1,\dots,r_0. \tag{/2.31/}$$

Доказательство этой теоремы очень сходно с доказательством теоремы 1. Различие состоит только в том, что вместо условия /1.12/ нужно воспользоваться равенством /2.29/, а роль соотношения /2.5/ в этом случае играют соотношения /2.25/ и /2.26/. Поэтому доказательство теоремы 3 опущено.

§ 3. СОВМЕСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим выражения

$$\phi_0 = \exp(\zeta x)\Big\{1 + \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c X_{0,r}(s) \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)}\, ds\Big\}, \tag{/3.1/}$$

$$\psi_{\mu,0} = \exp(\zeta x) \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c X_{\mu,r}(s) \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)}\, ds, \quad \mu = 1,\dots,r_0, \tag{/3.2/}$$

где $\zeta \in C$ - параметр, а $X_{\mu,r}(s)$ при $\mu, r = 0, 1, \dots, r_0$ - компоненты векторов /1.8/. Справедлива следующая

Теорема 4. Определенные посредством /3.1/ и /3.2/ функции ϕ_0 и $\psi_{\mu,0}$, $\mu = 1,\dots,r_0$, удовлетворяют системе уравнений

$$\Big(L - \kappa \frac{\partial}{\partial y}\Big)\phi_0 + \sum_{\mu=1}^{r_0} v_\mu \psi_{\mu,0} = \zeta^{k_0+2} \phi_0, \tag{/3.3/}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_{\mu,0} + w_\mu \phi_0 = 0, \quad \mu = 1,\dots,r_0. \tag{/3.4/}$$

Доказательство. Дифференцируя равенство /3.1/ n раз по x, с помощью /1.15/ получаем

$$\frac{\partial^n \phi_0}{\partial x^n} = \exp(\zeta x)\Big\{\zeta^n + \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\partial^n X_{0,r}(s)}{\partial x^n} \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)}\, ds + S_n\Big\}, \tag{/3.5/}$$

где $S_0 = 0$, а при $n > 0$ величина S_n в соответствии с /2.2/ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_n = \zeta S_{n-1} + \frac{\partial}{\partial x} S_{n-1} + W_{n-1,0}.$$

Решая это рекуррентное соотношение, находим, что при $n > 0$ справедливо равенство

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{m} \zeta^{\alpha} C_m^{\alpha} \frac{\partial^{m-\alpha} W_{n-m-1,0}}{\partial x^{m-\alpha}} . \qquad /3.6/$$

Умножим теперь равенство /3.5/ на u_n и просуммируем по n от нуля до $k_0 + 2$. Согласно /2.3/ имеем

$$L\phi_0 = \exp(\zeta x)\{ \sum_{n=0}^{k_0+2} \zeta^n u_n + \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)} L X_{0,r}(s) ds + S \}, \qquad /3.7/$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{k_0+2} \zeta^n S_n . \qquad /3.8/$$

Далее, дифференцируя выражение /3.1/ по y, получаем

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y} = \exp(\zeta x) \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\partial X_{0,r}(s)}{\partial y} \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)} ds .$$

Умножим это равенство на κ и вычтем из /3.7/. В результате находим, что

$$(L - \kappa \frac{\partial}{\partial y})\phi_0 = \exp(\zeta x)\{ S + \sum_{n=0}^{k_0+2} \zeta^n u_n +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)} (L - \kappa \frac{\partial}{\partial y}) X_{0,r}(s) ds \} .$$

Умножим теперь равенство /3.1/ на ζ^{k_0+2} и вычтем полученный результат из приведенного выше соотношения. С учетом /2.2/ и /2.4/ имеем

$$(L - \kappa \frac{\partial}{\partial y} - \zeta^{k_0+2})\phi_0 = \exp(\zeta x)\{ R + S +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)} (L - \kappa \frac{\partial}{\partial y} - \sigma_r^{k_0+2}(s)) X_{0,r}(s) ds \}, \qquad /3.9/$$

где

$$R = \sum_{k=0}^{k_0+1} (u_k - K_{k_0-k+1,0}) \zeta^k . \qquad /3.10/$$

Умножим, наконец, равенство /3.2/ на v_μ и полученный результат прибавим к /3.9/. На основании /2.9/ получаем

$$(L - \kappa \frac{\partial}{\partial y} - \zeta^{k_0+2})\phi_0 + \sum_{\mu=1}^{r_0} v_\mu \psi_{\mu,0} = \exp(\zeta x)(R + S) .$$

С другой стороны, подставив /3.6/ в /3.8/ и изменив порядок суммирования в полученном выражении, легко находим, что

$$S = \sum_{k=0}^{k_0+1} \zeta^k \sum_{p=0}^{k_0-k+1} \sum_{q=0}^{p} u_{p+k+1} C_{q+k}^{k} \frac{\partial^q W_{p-q,0}}{\partial x^q} .$$

Отсюда в силу /2.5/ и /3.10/ следует, что $R + S = 0$, т.е. справедливость /3.3/ доказана.

Продифференцируем теперь по x равенство /3.2/. В соответствии с /2.7/ имеем

$$\frac{\partial \phi_{\mu,0}}{\partial x} = \exp(\zeta x)\{ - w_\mu + \sum_{r=0}^{r_0} \oint_c \frac{\partial X_{\mu,r}(s)}{\partial x} \frac{\exp[-\sigma_r(s)x]}{\zeta - \sigma_r(s)} ds \} .$$

Далее, умножим равенство /3.1/ на w_μ и полученный результат прибавим к приведенному выше соотношению. На основании /2.10/ отсюда вытекает справедливость /3.4/. Теорема, таким образом, доказана полностью.

Определенные с помощью /3.1/ и /3.2/ функции ϕ_0 и $\psi_{\mu,0}$, $\mu = 1, \ldots, r_0$, кроме системы /3.3/, /3.4/ удовлетворяют еще одной системе уравнений. Именно, справедлива следующая

Теорема 5. Для определенных посредством /3.1/ и /3.2/ функций ϕ_0 и $\psi_{\mu,0}$, $\mu = 1, \ldots, r_0$, выполняются соотношения

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 A - c_0 \zeta^{n_0+2})\phi_0 = 0,$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \zeta^{n_0+2})\psi_{\mu,0} + c_0 Q_\mu \phi_0 = 0, \ \mu = 1, \ldots, r_0 . \qquad /3.11/$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4. Отличие состоит только в том, что вместо системы уравнений /2.9/, /2.10/ нужно использовать систему /2.30/, /2.31/, а вместо рекуррентного соотношения /2.5/ нужно воспользоваться рекуррентными соотношениями /2.25/ и /2.26/. Поэтому это доказательство опущено.

В дополнение к сказанному выше рассмотрим выражения

$$\phi_\nu = \oint_c \frac{X_{0,r_0+\nu}(s)}{\zeta^{k_0+2} - \omega_{r_0+\nu}^{k_0+2}(s)} ds, \ \nu = 1, \ldots, r_0 ,$$

$$\psi_{\mu,\nu} = \delta_{\mu,\nu} + \oint_c \frac{X_{\mu,r_0+\nu}(s)}{\zeta^{k_0+2} - \omega^{k_0+2}_{r_0+\nu}(s)}\, ds,\ \mu,\nu = 1,\dots,r_0, \qquad /3.12/$$

где $X_{\mu,\nu}(s)$ при $0 \le \mu \le r_0 < \nu \le 2r_0$ - компоненты векторов /1.8/. Имеет место следующая

Теорема 6. Определенные согласно /3.12/ функции ϕ_ν и $\psi_{\mu,\nu}$, $\mu,\nu = 1,\dots,r_0$, являются совместным решением следующих линейных систем уравнений

$$(L - \kappa\frac{\partial}{\partial y})\phi_\nu + \sum_{\mu=1}^{r_0} v_\mu \psi_{\mu,\nu} = \zeta^{k_0+2}\phi_\nu, \qquad /3.13/$$

$$\frac{\partial\psi_{\mu,\nu}}{\partial x} + w_\mu\phi_\nu = 0,\ \mu,\nu = 1,\dots,r_0,$$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 A)\phi_\nu = 0, \qquad \frac{\partial\psi_{\mu,\nu}}{\partial t} + c_0 Q_\mu \phi_\nu = 0,\ \mu,\nu = 1,\dots,r_0. \qquad /3.14/$$

Доказательство этой теоремы очевидным образом вытекает из равенств /2.9/, /2.10/, /2.30/ и /2.31/, поэтому оно опущено.

§ 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определим операторы P_r, $r = 1,\dots,r_0$, вида

$$P_r = \sum_{n=0}^{n_0+1} P_{r,n}\,\partial_x^n \qquad /4.1/$$

так, чтобы операторы

$$\hat{P}_r = A\cdot v_r + P_r\,\partial_x,\quad r = 1,\dots,r_0, \qquad /4.2/$$

имели нулевой порядок, т.е. были бы операторами умножения на функцию. Пусть, далее, G' - область в вещественном трехмерном пространстве x, y, t, в которой выполнено неравенство /2.1/. Тогда справедлива следующая

Теорема 7. Определенные с помощью решений системы /1.1/, /1.2/ операторы L, A, P_r, Q_r и функции v_r, w_r, $r = 1,\dots,r_0$, удовлетворяют в области G' операторным соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c_0\kappa\frac{\partial A}{\partial y} + c_0[A,L] + c_0\sum_{r=1}^{r_0}(P_r\cdot w_r - v_r\cdot Q_r) = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + c_0(A\cdot v_r + P_r\,\partial_x) = 0,\quad \frac{\partial w_r}{\partial t} = c_0(w_r A + \partial_x\cdot Q_r),\ r = 1,\dots,r_0. \qquad /4.3/$$

Доказательство. Возьмем операторы $\mathfrak{L}, \mathfrak{J}, \hat{\mathfrak{J}}$ вида

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} L - \kappa\frac{\partial}{\partial y} & \vec{v} \\ w & 1\cdot\partial_x \end{vmatrix},\quad \mathfrak{J} = \frac{\partial}{\partial t} + c_0\begin{vmatrix} A & 0 \\ Q & 0 \end{vmatrix},\quad \hat{\mathfrak{J}} = \frac{\partial}{\partial t} + c_0\begin{vmatrix} A & \vec{P} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /4.4/$$

где 1 - единичная матрица порядка r_0, а v, w, P, Q - векторы-столбцы соответственно с компонентами $v_1,\dots,v_{r_0}$, $w_1,\dots,w_{r_0}$, $P_1,\dots,P_{r_0}$, $Q_1,\dots,Q_{r_0}$. Возьмем, далее, векторы - столбцы χ_ν с компонентами ϕ_ν, $\psi_{\nu,1},\dots,\psi_{\nu,r_0}$, $\nu = 0,1,\dots,r_0$. Пусть, наконец, I - диагональная матрица порядка $r_0 + 1$, имеющая вид $I = \mathrm{diag}(1,0,\dots,0)$. Тогда на основе равенств /3.3/, /3.4/ и /3.13/ при $\nu = 0,1,\dots,r_0$ выполняется соотношение

$$(\mathfrak{L} - \zeta^{k_0+2} I)\,\chi_\nu = 0, \qquad /4.5/$$

а на основании равенств /3.11/ и /3.14/ при $\nu = 0,1,\dots,r_0$ выполняется соотношение

$$(\mathfrak{J} - c_0\delta_{0,\nu}\zeta^{n_0+2})\,\chi_\nu = 0. \qquad /4.6/$$

Положим

$$\Delta = \hat{\mathfrak{J}}\cdot(\mathfrak{L} - \zeta^{k_0+2}I) - (\mathfrak{L} - \zeta^{k_0+2}I)\cdot\mathfrak{J}. \qquad /4.7/$$

В соответствии с /4.4/ оператор Δ имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \vec{\beta} \\ \gamma & 0 \end{vmatrix}, \qquad /4.8/$$

где

$$\alpha = \frac{\partial L}{\partial t} + c_0\kappa\frac{\partial A}{\partial y} + c_0[A,L] + c_0\sum_{r=1}^{r_0}(P_r\cdot w_r - v_r Q_r),$$

а β, γ - векторы-столбцы с компонентами

$$\beta_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + c_0(A\cdot v_r + P_r\,\partial_x),$$

$$\gamma_r = \frac{\partial w_r}{\partial t} - c_0(w_r A + \partial_x\cdot Q_r),\ r = 1,\dots,r_0.$$

При этом в силу /2.3/-/2.7/, /2.23/-/2.27/, /4.1/ и /4.2/ убеждаемся, что α - дифференциальный по x оператор, чей порядок m_0 не превосходит k_0+n_0+1, а β_r и γ_r при $r=1,\dots,r_0$ являются операторами умножения на функцию. Таким образом, согласно /4.5/-/4.8/ при $\nu=0,1,\dots,r_0$ справедливы равенства

$$\alpha\phi_\nu+\sum_{\mu=1}^{r_0}\beta_\mu\psi_{\mu,\nu}=0,\quad \gamma_\mu\phi_\nu=0,\quad \mu=1,\dots,r_0. \qquad /4.9/$$

С помощью /3.1/ находим, что величина $\Phi_0=\phi_0\exp(-\zeta x)$ стремится к единице при $|\zeta|\to\infty$. Это значит, что для любой точки $x,y,t\in G'$ найдется $\zeta=\zeta'$, такое, что $\phi_0\neq 0$ в этой точке при $\zeta=\zeta'$. Отсюда согласно /4.9/ следует, что $\gamma_1=\dots=\gamma_{r_0}=0$. Далее, с учетом /3.12/ для любых $\mu,\nu=1,\dots,r_0$ имеем

$$\sum_{m=0}^{m_0}\left|\frac{\partial^m\phi_\nu}{\partial x^m}\right|\to 0,\quad \psi_{\mu,\nu}\to\delta_{\mu,\nu}\quad \text{при } |\zeta|\to\infty.$$

На основании /4.9/ это значит, что $\beta_1=\dots=\beta_{r_0}=0$. Положим теперь $\alpha=\sum_{m=0}^{m_0}\alpha_m\partial_x^m$, $\Phi_m=\phi_0(x,e_m\zeta)$, где $\phi_0(x,\zeta)$ определено посредством /3.1/, а $e_m=\exp\left(i\frac{2\pi m}{m_0+1}\right)$, $m=0,1,\dots,m_0$. В силу /4.9/ справедливо равенство $\alpha\phi_0=0$, т.е.

$$\sum_{m=0}^{m_0}\alpha_m\frac{\partial^m\Phi_{m'}}{\partial x^m}=0,\quad m'=0,1,\dots,m_0. \qquad /4.10/$$

Определитель $\Phi=\det\left|\frac{\partial^m\Phi_{m'}}{\partial x^m}\right|$ системы /4.10/ в соответствии с /3.1/ и /3.5/ допускает представление $\Phi=C\zeta^{m_1}$, где $m_1=\frac{1}{2}m_0(m_0+1)$, а величина C при $|\zeta|\to\infty$ стремится к отличной от нуля константе. Отсюда следует, что для любой точки $x,y,t\in G'$ найдется $\zeta=\zeta'$, такое, что $\Phi\neq 0$ в этой точке при $\zeta=\zeta'$. Это значит, что $\alpha=0$. Таким образом, справедливость равенств /4.3/ доказана.

В заключение отметим, что если входящие в систему /4.3/ величины c_0 и κ удовлетворяют условиям

$$\bar c_0=(-1)^{n_0+1}c_0,\quad \bar\kappa=(-1)^{k_0+1}\kappa, \qquad (*)$$

то соотношения /4.3/ инвариантны относительно замены

$$L\to(-1)^{k_0}L^*,\ A\to(-1)^{n_0}A^*,\ v_r\to\epsilon_r\bar w_r,\ w_r\to\epsilon_r\bar v_r,$$

$$P_r\to(-1)^{n_0+1}\epsilon_r Q_r^*,\ Q_r\to(-1)^{n_0+1}\epsilon_r P_r^*,\ r=1,\dots,r_0,$$

где величины ϵ_r подчинены требованию $\epsilon_r^2=(-1)^{k_0+1}$, $r=1,\dots,r_0$. Отсюда следует, что при выполнении условий (*) система /4.3/ обладает инвариантным многообразием

$$L^*=(-1)^{k_0}L,\ w_r=\epsilon_r\bar v_r,\ r=1,\dots,r_0.$$

При этом операторы A,P_r,Q_r и величины ϵ_r нужно выбирать с соблюдением условий

$$A^*=(-1)^{n_0}A,\ P_r=(-1)^{n_0+1}\epsilon_r Q_r^*,\ \epsilon_r^2=(-1)^{k_0+1}.$$

Для того чтобы полученные с помощью равенств /2.3/-/2.7/, /2.23/-/2.27/, /4.1/ и /4.2/ операторы L,A,P_r,Q_r и функции v_r, w_r удовлетворяли этим условиям, необходимо наложить на входящие в систему /1.1/, /1.2/ величины

$$f_0,f_1,\dots,f_{2r_0},\omega_0,\omega_{r_0+1},\dots,\omega_{2r_0},\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0},\tau_0$$

определенные требования. Сделать это можно несколькими способами. Детальному рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Известия АН СССР, сер.матем., 1951, т.15, № 4, с.309.
2. Крейн М.Г. ДАН СССР, 1954, т.97, № 1, с.21.
3. Марченко В.А. ДАН СССР, 1955, т.104, № 5, с.695.
4. Крейн М.Г. ДАН СССР, 1955, т.105, № 3, с.433.
5. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, No. 19, p.1095.
6. Lax P. Comm. Pure Appl. Math., 1968, v.21, No.5, p.467.
7. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett., 1973, v.31, No.2, p.125.
8. Дрюма В.С. Письма в ЖЭТФ, 1974, т.19, вып.12, с.753.
9. Захаров В.Е., Манаков С.В. ТМФ, 1976, т.27, № 3, с.283.
10. Манаков С.В. УМН, 1976, т.31, вып.5, с.245.
11. Мельников В.К. Матем.сб., 1979, т.108, (150), № 3, с.378.
12. Мельников В.К. ЭЧАЯ, 1980, т.11, вып.5, с.1224.
13. Мельников В.К. Функц.анализ, 1981, т.15, вып.1, с.43.
14. Мельников В.К. Матем.сб., 1983, т.121 /163/, № 4(8), с.469.
15. Mel'nikov V.K. Lett.Math.Phys., 1983, v.7, No.2, p.129.
16. Zakharov V.E. In: Solitons.Ed.Bullough R.K., Caudrey P.J., Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, p.243.
17. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Функц.анализ, 1974, т.6, вып.3, с.43.

18. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Функц.анализ, 1979, т.13, вып.3, с.13.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В. Функц.анализ, 1985, т.19, вып.2, с.11.
20. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, Физматгиз, М., 1963, т.1.
21. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц."Наука", М., 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1986 года

Мельников В.К. P2-86-202

Об интегрировании нелинейных эволюционных уравнений

Указана система линейных интегральных уравнений, с помощью которой получены явные выражения для решений ряда нелинейных эволюционных уравнений. Эти уравнения описывают взаимодействие волн на плоскости x, y и применяются в ряде областей математической физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Mel'nikov V.K. P2-86-202

On Integration of Nonlinear Evolution Equations

The system of linear integral equations is found, that is used to derive explicit expressions for solutions of some nonlinear evolution equations. These equations describe the interaction of waves on the x, y plane and are applied for some problems of mathematical physics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986