сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-16

А.П.Исаев

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ТЕОРИЯХ ФЕРМИОННЫХ СТРУН

1986

Настоящее сообщение посвящено построению бесконечного набора локальных законов сохранения в инволюции для теорий фермионных струн (струн Невьё – Шварца – Рамона в пространствах групп Ли). В конце сообщения будет намечен (на основе уравнений Новикова) путь сведения системы фермионной струны с бесконечным числом степеней свободы к суперсимметричным системам с конечным числом степеней свободы.

Хорошо известно /I,2/, что теории фермионных струн наиболее естественно (так как в этих теориях имеется симметрия между фермионными и бозонными степенями свободы (суперсимметрия)) формулируются в (2+2)-мерном суперпространстве с координатами $(\sigma, \tau, \theta_L, \theta_R)$, где σ, τ – параметры на мировой поверхности струны ($x_1 = \sigma$ -параметр на струне, $x_0 = \tau$ – параметр эволюции), а $\theta_\alpha\ (\alpha \in L, R)$ – антикоммутирующие переменные:

$$[x_\mu, x_\nu']_- = [x_\mu, \theta_\alpha]_- = [\theta_\alpha, \theta_\beta']_+ = 0. \tag{I}$$

С использованием такой формулировки в /2/ показано, что динамические уравнения, описывающие эволюцию фермионной струны в произвольной калибровке (эволюцию координат фазового пространства: $x_a(\sigma,\tau) = x_a(\sigma+2\pi,\tau)$ -вектор-функция мировой поверхности струны в D -мерном пространстве-времени M ; $a = 0, 1, \ldots, D-1$; $p_a(\sigma,\tau)$ – плотность импульса струны; $\psi_L^a(\sigma,\tau)$ и $\psi_R^a(\sigma,\tau)$ – антикоммутирующие поля, задающие фермионные степени свободы на струне), можно представить в форме Лакса

$$[\hat{L}, \hat{M}] = [\hat{D}_\alpha - i\lambda \Phi_\alpha^a(\sigma,\theta_\alpha,\tau) T_a,\ \frac{\partial}{\partial\tau} - i\lambda X_\alpha^a(\sigma,\theta_\alpha,\tau,\lambda) T_a] = 0. \tag{2}$$

Здесь λ – спектральный параметр; $\Phi_\alpha^a(\sigma,\theta_\alpha,\tau) = \psi_\alpha^a(\sigma,\tau) + \theta_\alpha q_\alpha^a(\sigma,\tau)$ – суперполе, определяющее состояние струны; функция $q_\alpha^a(\sigma,\tau)$ строится из координат $x_a(\sigma,\tau)$, $p_a(\sigma,\tau)$ и $\psi_\alpha^a(\sigma,\tau)$; её явный вид /2/ нам не понадобится, как и не понадобится явный вид /2/ суперполя $X_\alpha^a(\sigma,\theta_\alpha,\tau,\lambda)$; $\hat{D}_\alpha = (a_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial\sigma})$ – ковариантная производная $(a_L = -\frac{4\pi}{N}, a_R = \frac{4\pi}{N})$, $N \in \mathbb{Z}$; T_a -матричный генератор алгебры Ли $([T^a, T^b] = t^{ab}{}_c T^c)$ группы G, характеристики которой связаны с характеристиками пространства-времени M, в частности, метрический тензор пространства M равен $\eta^{ab} = -\mathrm{Tr}(T^a T^b)$. Скобки Пуассона суперфункций $\Phi_\alpha^a(\sigma,\theta_\alpha,\tau)$ зависят от конкретного выбора группы Ли G ; как показано в работе /2/, необходимо постулировать (супераналог алгебры Каца – Муди)

$$\{\Phi^a_\alpha(\sigma,\theta,\tau),\Phi^b_\alpha(\sigma',\theta',\tau)\}=[\delta(\sigma-\sigma')(\theta-\theta')]t^{abc}\Phi_{\alpha c}(\sigma,\theta,\tau)-$$

$$-\frac{i}{a_\alpha}\hat{D}_\alpha[\delta(\sigma-\sigma')(\theta-\theta')]\eta^{ab}. \qquad (3)$$

В дальнейшем для краткости записи не будем выписывать в формулах параметр τ . Расписывая соотношение (3) по компонентам, получаем:

$$\{\psi^a_\alpha(\sigma),\psi^b_\alpha(\sigma')\}=-i\eta^{ab}\delta(\sigma-\sigma'), \qquad (4а)$$

$$\{q^a_\alpha(\sigma),\psi^b_\alpha(\sigma')\}=\{\psi^a_\alpha(\sigma),q^b_\alpha(\sigma')\}=\delta(\sigma-\sigma')t^{abc}\psi_{\alpha c}, \qquad (4б)$$

$$\{q^a_\alpha(\sigma),q^b_\alpha(\sigma')\}=\delta(\sigma-\sigma')t^{abc}q_{\alpha c}-\frac{1}{a_\alpha}\delta'(\sigma-\sigma'). \qquad (4в)$$

Удобно ввести новую переменную $J^a_\alpha=q^a_\alpha+\frac{i}{2}t^{abc}\psi_{\alpha b}\psi_{\alpha c}$. Тогда (4б) и (4в) переписываются в виде

$$\{\psi^a_\alpha(\sigma),J^b_\alpha(\sigma')\}=0,$$

$$\{J^a_\alpha(\sigma),J^b_\alpha(\sigma')\}=\delta(\sigma-\sigma')t^{abc}J_{\alpha c}(\sigma)-\frac{1}{a_\alpha}\delta'(\sigma-\sigma'). \qquad (5)$$

Таким образом, супераналог алгебры Каца -Муди (3) в компонентах эквивалентен прямой сумме алгебры свободных фермионов и алгебры Каца - Муди.

Перейдем теперь к построению интегралов движения фермионной струны на основе изучения вспомогательной спектральной задачи, которая связана с $\hat{L}$ -оператором из представления (2) и имеет вид

$$\hat{L}\Phi(\sigma,\theta)=\left[\left(a_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta}+i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)-i\lambda\left(\psi_\alpha(\sigma)+\theta q_\alpha(\sigma)\right)\right]\Phi(\sigma,\theta)=0,$$

$$\psi_\alpha(\sigma)=\psi^a_\alpha(\sigma)T_a,\ q_\alpha(\sigma)=q^a_\alpha(\sigma)T_a. \qquad (6)$$

Из спектральной задачи (6) получаем систему уравнений $(\Phi(\sigma,\theta)=\Phi_0(\sigma)+\theta\Phi_1(\sigma))$:

$$\Phi_1=\frac{i\lambda}{a_\alpha}\psi_\alpha\Phi_0,\ \Phi_0'+\lambda\psi_\alpha\Phi_1-\lambda q_\alpha\Phi_0=0, \qquad (7)$$

откуда следует спектральная задача в компонентной записи

$$\tilde{L}\Phi_0=\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}-\left(\lambda q_\alpha-\frac{\lambda^2}{a_\alpha}i\psi^2_\alpha\right)\right]\Phi_0=0,\ \Phi_1=\frac{i\lambda}{a_\alpha}\psi_\alpha\Phi_0. \qquad (8)$$

(Штрих обозначает производную по параметру струны σ; см. (7)). Определим матрицу трансляций $T_\alpha(\lambda;\sigma',\sigma)$ для решений уравнения (8) с помощью соотношения

$$\Phi_0(\sigma')=T_\alpha(\lambda;\sigma',\sigma)\Phi_0(\sigma). \qquad (9)$$

Из определения (9) следует, что матрица трансляций на период $T_\alpha(\lambda;2\pi+\sigma,\sigma)$ коммутирует с оператором $\tilde{L}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}-\left(\lambda q_\alpha-\frac{\lambda^2}{a_\alpha}i\psi^2_\alpha\right),T_\alpha(\lambda;2\pi+\sigma,\sigma)\right]=0. \qquad (10)$$

Пользуясь этим равенством и уравнениями (2), достаточно просто показать, что функционал $T_\alpha(\lambda)=\mathrm{Tr}\{T_\alpha(\lambda;2\pi+\sigma,\sigma)\}$ не зависит от σ и сохраняется во времени τ . Последнее указывает на то, что $T_\alpha(\lambda)$ есть производящий функционал законов сохранения. Далее, техника работы /3/ позволяет доказать, что (постулируя скобки Пуассона (3),(4),(5))

$$\{T_\alpha(\lambda),T_\alpha(\mu)\}=0\ (\forall\lambda,\mu). \qquad (11)$$

Таким образом, функционалы $T_\alpha(\lambda)$ дают интегралы движения в инволюции.

Нелокальные законы сохранения получаются при разложении $T_\alpha(\lambda)$ в точке $\lambda=0$. Здесь удобно пользоваться формальным рядом

$$T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)=1+\int_\sigma^{\sigma+2\pi}d\sigma_1\left(\lambda q_\alpha(\sigma_1)-\frac{\lambda^2}{a_\alpha}i\psi^2_\alpha(\sigma_1)\right)+$$

$$+\int_\sigma^{\sigma+2\pi}d\sigma_1\left(\lambda q_\alpha(\sigma_1)-\frac{\lambda^2}{a_\alpha}i\psi^2_\alpha(\sigma_1)\right)\int_\sigma^{\sigma_1}d\sigma_2\left(\lambda q_\alpha(\sigma_2)-\frac{\lambda^2}{a_\alpha}i\psi^2_\alpha(\sigma_2)\right)+\ldots. \qquad (12)$$

Метод получения локальных законов сохранения основывается на разложении $T_\alpha(\lambda)$ при $\lambda\mapsto\infty$ и существенно зависит от конкретного выбора группы G . Рассмотрим простейший случай, когда в качестве группы G выбрана группа $SU(2)$. Такой выбор группы G весьма интересен и с точки зрения изучения динамики фермионной струны в пространстве-времени Минковского. Спектральная задача (8) в этом случае переписывается в виде $(T_a=i\sigma_a)$

$$\tilde{L}\Phi_0(\sigma)=\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}-i\left(\lambda q^j_\alpha+\lambda^2 A^j_\alpha\right)\sigma_j\right]\Phi_0(\sigma)=0, \qquad (13)$$

где $A^j_\alpha=\frac{1}{a_\alpha}\varepsilon^{jke}i\psi^k_\alpha\psi^e_\alpha$, σ_j -матрицы Паули

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \sigma_k\sigma_e=\delta_{ke}+i\varepsilon^{kej}\sigma_j,$$

ε^{jke} - антисимметричный тензор $(\varepsilon^{123}=1)$. Заметим, что набор полей A^j_α удовлетворяет соотношению

$$A^j_\alpha A^k_\alpha\equiv 0\quad(\forall j,k). \qquad (14)$$

Оператор трансляции $T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)$ для спектральной задачи (13) имеет вид

$$T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)=P\exp\left\{i\int_\sigma^{\sigma+2\pi}d\sigma'\left[\left(\lambda q^j_\alpha(\sigma')+\lambda^2A^j_\alpha(\sigma')\right)\sigma_j\right]\right\}=$$
$$=T^0+iT^j\sigma_j, \qquad (15)$$

$$\det\{T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)\}=\left(T^0(\lambda)\right)^2+\left(\vec{T}(\lambda,\sigma)\right)^2=1. \qquad (16)$$

В дальнейшем будем использовать методы и терминологию из фундаментальной работы /4/. Из очевидных свойств оператора $T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)$ и формулы (10) следует, что существуют 2 независимых решения уравнения (13) $\Phi_+(\sigma,\lambda)$ и $\Phi_-(\sigma,\lambda)$ (функции Блоха), которые диагонализуют оператор (15), т.е.

$$\Phi_+(\sigma+2\pi,\lambda)=T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)\Phi_+(\sigma,\lambda)=\exp\left(ip(\lambda)\right)\Phi_+(\sigma,\lambda), \qquad (17а)$$

$$\Phi_-(\sigma+2\pi,\lambda)=T_\alpha(\lambda;\sigma+2\pi,\sigma)\Phi_-(\sigma,\lambda)=\exp\left(-ip(\lambda)\right)\Phi_-(\sigma,\lambda). \qquad (17б)$$

Величина $p(\lambda)$ называется квазиимпульсом. Из формул (17) с необходимостью следует, что

$$T_\alpha(\lambda)=\mathrm{Tr}\{T_\alpha(\lambda;2\pi+\sigma,\sigma)\}=2\cos(p(\lambda))=2T^0(\lambda). \qquad (18)$$

Таким образом, $p(\lambda)$ сохраняется во времени. Именно коэффициенты разложения квазиимпульса $p(\lambda)$ в ряд по обратным степеням спектрального параметра λ и будут давать искомые локальные интегралы движения фермионной струны. Будем искать эти коэффициенты следующим образом. Найдем выражение для квазиимпульса через компоненты функций Блоха из соотношения (17а), получаем: $(n\in\mathbb{Z})$

$$ip(\lambda)=\ln\left[\frac{\Phi^1_+(\sigma+2\pi,\lambda)}{\Phi^1_+(\sigma,\lambda)}\right]=\int_\sigma^{\sigma+2\pi}d\sigma'\left[\frac{\Phi^{1\prime}_+(\sigma',\lambda)}{\Phi^1_+(\sigma',\lambda)}\right]+i2\pi n. \qquad (19)$$

Подставляя в уравнение (13) функцию Блоха $\Phi_+=\begin{pmatrix}\Phi^1_+\\\Phi^2_+\end{pmatrix}$ и исключая из него компоненту Φ^2_+, получим уравнение на функцию $\Phi^1_+(\sigma,\lambda)$, через которую выражается квазиимпульс $p(\lambda)$. Это уравнение имеет вид

$$\Sigma^-\left[\frac{1}{\Sigma^-}\left(\frac{\Phi^{1\prime}_+}{i\lambda^2}-\Sigma^3\Phi^1_+\right)\right]'-i\lambda^2\left(\vec{\Sigma}\right)^2\Phi^1_++\Sigma^3\Phi^{1\prime}_+=0, \qquad (20)$$

где $\Sigma^i=\frac{q^i_\alpha}{\lambda}+A^i_\alpha$, $\Sigma^\pm=\Sigma^1\pm i\Sigma^2$. Будем искать решение Φ^1_+ уравнения (20) с помощью подстановки

$$\Phi^1_+(\sigma,\lambda)=\exp\left\{i\lambda^2\int^\sigma d\sigma' K(\sigma',\lambda)\right\},\ \Phi^{1\prime}_+=i\lambda^2K\Phi^1_+. \qquad (21)$$

При этом квазиимпульс выражается через функцию $K(\sigma,\lambda)$

$$p(\lambda)=\lambda^2\int_\sigma^{\sigma+2\pi}d\sigma' K(\sigma',\lambda)+2\pi n. \qquad (22)$$

Подставляя формулу (21) в уравнение (20) и используя условие $A^i_\alpha A^j_\alpha=0\ (\forall i,j)$, получим уравнение, определяющее функцию K

$$\left[K-\left(\frac{q^3_\alpha}{\lambda}+A^3_\alpha\right)\right]'+i\lambda^2\left[K^2-\left(\frac{\vec{q}^{\,2}_\alpha}{\lambda^2}+2\frac{(\vec{q}_\alpha\vec{A}_\alpha)}{\lambda}\right)\right]-$$
$$-\left(\frac{q^{-\prime}_\alpha}{q^-_\alpha}+\lambda\left(\frac{A^-_\alpha}{q^-_\alpha}\right)'\right)\left[K-\left(\frac{q^3_\alpha}{\lambda}+A^3_\alpha\right)\right]=0. \qquad (23)$$

Решение уравнения (23) будем искать в виде формального ряда

$$K=K_0+\frac{1}{\lambda}K_1+\frac{1}{\lambda^2}K_2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}K_n\lambda^{-n}. \qquad (24)$$

Подставив соотношение (24) в уравнение (23), получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов $K_n(\sigma)$:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ k_0^2 = 0,\\
&2)\ \ i\left(2k_0k_1 - 2(\vec A_\alpha \vec q_\alpha)\right) - \left(\frac{A_\alpha^-}{q_\alpha^-}\right)'(k_0 - A_\alpha^3) = 0,\\
&3)\ \ (k_0 - A_\alpha^3)' + i(2k_0k_2 + k_1^2 - \vec q_\alpha^{\,2}) - \frac{q_\alpha^{-\prime}}{q_\alpha^-}(k_0 - A_\alpha^3) - \left(\frac{A_\alpha^-}{q_\alpha^-}\right)'(k_1 - q_\alpha^3) = 0,\\
&4)\ \ (k_1 - q_\alpha^3)' + i(2k_0k_3 + 2k_1k_2) - \frac{q_\alpha^{-\prime}}{q_\alpha^-}(k_1 - q_\alpha^3) - \left(\frac{A_\alpha^-}{q_\alpha^-}\right)' k_2 = 0,\\
&5)\ \ k_2' + i(2k_0k_4 + 2k_1k_3 + k_2^2) - \frac{q_\alpha^{-\prime}}{q_\alpha^-}k_2 - \left(\frac{A_\alpha^-}{q_\alpha^-}\right)'k_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\\
&n{+}3)\ \ k_n' + i\left(\sum_{m=0}^{n+2} k_m k_{n+2-m}\right) - \frac{q_\alpha^{-\prime}}{q_\alpha^-}k_n - \left(\frac{A_\alpha^-}{q_\alpha^-}\right)' k_{n+1} = 0, \ldots .
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Решая систему (25), для первого коэффициента k_0 получим выражение

$$
k_0 = \pm\left\{\frac{(\vec A_\alpha \vec q_\alpha)}{\sqrt{\vec q_\alpha^{\,2}}} - \frac14 \varepsilon^{ijk} A_\alpha^i A_\alpha^{j\prime}\frac{q_\alpha^k}{(\vec q_\alpha^{\,2})^{3/2}}\right\}. \tag{26}
$$

Теперь можно определить следующий коэффициент k_1, если решать совместно уравнение 3) и уравнение 4), умноженное на k_0, относительно двух неизвестных функций: k_1 и k_0k_2 (произведение k_0k_1 известно из уравнения 2)). В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
k_1 = \pm\Big\{&\sqrt{\vec q_\alpha^{\,2}} + \frac{1}{8(\vec q_\alpha^{\,2})^{3/2}}\Big[(\vec A_\alpha')^2 - \frac{(\vec A_\alpha' \vec q_\alpha)^2}{(\vec q_\alpha^{\,2})} + 4\varepsilon^{ijk}A_\alpha^i q_\alpha^j q_\alpha^{k\prime}\Big] -\\
&- \frac18\frac{(\vec A_\alpha\vec q_\alpha)}{(\vec q_\alpha^{\,2})^{7/2}}\varepsilon^{ijk}A_\alpha^{k\prime}A_\alpha^{i\prime\prime}q_\alpha^j\Big\}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Последующие коэффициенты k_2, k_3, ... находятся из системы уравнения (25) аналогично тому, как только что был найден коэффициент k_1. Зная коэффициенты k_0 и k_1, надо решать совместно уравнение 4) и уравнение 5), умноженное на k_0, относительно двух неизвестных: k_2 и k_0k_3. Далее, зная k_0, k_1 и k_2, определяем k_3 и т.д.

Рассмотренный только что "классический" способ построения локальных законов сохранения обладает одним существенным недостатком, а именно, получающиеся в результате для коэффициентов k_n выражения неинвариантны явно относительно вращений векторных полей q_α^i и A_α^i,

что является следствием записи уравнения (23) в нековариантном виде. Приведение же полученных результатов к окончательным симметричным выражениям (26), (27) ($T_\alpha(\lambda)$ очевидно, инвариантная величина) является весьма затруднительным из-за наличия нильпотентных полей A_α^i. Поэтому сейчас мы рассмотрим другой метод получения локальных законов сохранения, когда результат получается сразу же в явно инвариантном виде. Этот метод (в случае, когда $A_\alpha^i = 0$) рассматривался в работе /5/.

Воспользуемся вначале равенством (18), из которого получаем с учетом формулы (16)

$$
\frac{\partial}{\partial\lambda}p(\lambda) = \pm\int_\sigma^{\sigma+2\pi} d\sigma'\left(q_\alpha^i(\sigma') + 2\lambda A_\alpha^i(\sigma')\right)M^i(\lambda,\sigma'), \tag{28}
$$

где $M^i(\lambda,\sigma') = T^i(\lambda,\sigma')/\sqrt{(T^i)^2}$. Таким образом, коэффициенты k_n могут быть выражены с помощью формул (22) и (28) через вектор M^i. Действительно, разлагая вектор $M^i(\lambda,\sigma)$ и квазиимпульс $p(\lambda)$ в ряды по обратным степеням λ

$$
M^i(\lambda,\sigma) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} M_n^i(\sigma)\lambda^{-n}, \tag{29}
$$

$$
p(\lambda) = \lambda^2\sum_{n=0}^{\infty} I_n\lambda^{-n} \quad \left(I_n = \int d\sigma\, k_n(\sigma)\right) \tag{30}
$$

и подставляя их в формулу (28), при учете (22), получаем $(n \neq 2)$

$$
(2-n)k_n = \pm\left\{q_\alpha^i(\sigma)M_n^i(\sigma) + 2A_\alpha^i(\sigma)M_{n+1}^i(\sigma)\right\} + \{\ldots\}'. \tag{31}
$$

Отсутствие членов $\sim \lambda^3$ в (30) гарантируется равенством

$$
M_0^i A_\alpha^i = 0. \tag{32}
$$

Осталось определить коэффициенты M_n^i, которые находятся из условия коммутативности оператора $T_\alpha(\lambda; 2\pi+\sigma, \sigma)$ с Σ - оператором

$$
[M^k(\lambda,\sigma)]' - 2\lambda\varepsilon^{kij}M^i(\lambda,\sigma)(\lambda q_\alpha^j + \lambda^2 A_\alpha^j) = 0 \tag{33}
$$

и равенства

$$
(M^i(\lambda,\sigma))^2 = 1. \tag{34}
$$

Подставляя разложение (29) в уравнения (33), (34), получаем

$$\dot{M}^i_m - 2\varepsilon^{ijk}\left(M^j_{m+1}n^k + M^j_{m+2}\alpha^k\right) = 0 \; \left(m \geq -2,\; M^i_{-2} = M^i_{-1} = 0\right), \tag{35}$$

$$\sum_{r=0}^{m} M^i_r M^i_{m-r} = \delta_{m,2} \quad (m \geq 0). \tag{36}$$

Здесь $n^i = q^i_\alpha / q_\alpha$, $\alpha^i = A^i_\alpha / q_\alpha$, $q_\alpha = \sqrt{\vec{q}^{\,2}_\alpha}$, а точкой обозначается действие оператора $\frac{d}{d\ell} = \frac{1}{q_\alpha}\frac{\partial}{\partial 6}$. Если в системе уравнений (33) и (34) положить $A^i_\alpha = 0$ /5/, то эта система решается тривиально, и мы имеем

$$M^i_0 = 0\,,\; M^i_1 = n^i,\; M^i_2 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\dot{n}^j n^k,\; M^i_3 = -\tfrac{1}{4}\ddot{n}^i - \tfrac{3}{8}\dot{n}^i(\dot{\vec{n}})^2, \ldots \tag{37}$$

Если же нильпотентные поля $A^i_\alpha \neq 0$, то решение системы уравнений (35),(36) резко усложняется и приводит к следующему ответу:

$$M^k_0 = \alpha^k - n^k\left[(\alpha n) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ije} n^i \alpha^j \dot{\alpha}^e\right] + \tfrac{1}{2}(\alpha n)\varepsilon^{ijk}\dot{\alpha}^i n^j, \tag{38а}$$

$$M^k_1 = n^k\left\{1 + (n\dot{\alpha})(n\dot{M}_0) - \tfrac{1}{4}(\dot{\alpha}\dot{M}_0) - \tfrac{1}{8}\left[\dot{M}^2_0 - (n\dot{M}_0)^2\right] - \tfrac{1}{4}(\alpha n)(n\ddot{M}_0) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ije}M^i_0 n^j \dot{n}^e\right\} + \tfrac{1}{2}(\alpha n)\varepsilon^{ijk}\dot{n}^i n^j - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\dot{M}^i_0 n^j + \tfrac{1}{4}(\alpha n)\ddot{M}^k_0, \tag{38б}$$

$$M^k_2 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\dot{M}^i_1 n^j + X^{ki}\alpha^i, \ldots . \tag{38в}$$

Прямой подстановкой векторов (38) в (31) можно прийти к уже полученным выше выражениям (26) и (27) (для получения формулы (27) явный вид матрицы X^{ki} в формуле (38в) неважен).

Векторы M^i_m с помощью соотношений (30), (31) дают бесконечное число локальных интегралов движения I_k в инволюции. Используя явный вид этих интегралов движения, можно вычислить условие на переменные фермионной струны (q^i_α и ψ^i_α), которые совместны с уравнениями движения фермионной струны в произвольной калибровке и которые редуцируют фермионную струну к системам с конечным числом степеней свободы ($2M$ - бозонных и $2M$ -фермионных степеней свободы). Очевидно, что эти системы будут обладать суперсимметрией.

Условия редукции называются уравнениями Новикова и имеют вид:

$$\{I, q^i_\alpha(6)\} = \{I, \psi^i_\alpha(6)\} = 0, \tag{39}$$

где $I = I_0 + c_1 I_1 + c_2 I_2 + \ldots + c_M I_M$ ($c_1, c_2, \ldots, c_M$ - произвольные константы). Учитывая выражения (4) для скобок Пуассона, можно переписать уравнения (39) в терминах векторов M^i:

$$\left(1 + \frac{1}{a_\alpha}\right)\frac{d}{d\ell}\left(M^i_0 + c_1 M^i_1 + \ldots + c_M M^i_M\right) = 0\,,$$

$$\varepsilon^{ijk}\psi^j_\alpha\left(M^k_0 + c_1 M^k_1 + \ldots + c_M M^k_M\right) = 0. \tag{40}$$

Доказательство того, что уравнения (40) действительно вырезают инвариантным образом системы с конечным числом степеней свободы, проводится аналогично соответствующему доказательству /5,6/ в теории бозонной струны (имеется в виду доказательство конечнозонности спектра задачи (6) при выполнении условий (40)).

Заключение

В данной работе с помощью метода вспомогательной спектральной задачи построена производящая функция для бесконечного набора локальных интегралов движения в инволюции и выписаны несколько первых интегралов из этого набора. Кроме того, получено уравнение, с помощью которого можно осуществить редукцию фермионной струны к суперсимметричным системам с конечным числом степеней свободы.

В последующей работе будут построены переменные типа "действие-угол", удобные для квазиклассического квантования систем фермионных струн.

Автор благодарен В.И. Бородулину за полезные обсуждения.

Литература

I. Zumino B. Gauge Theories and Modern Field Theory, eds. Arnowitt R. and P. Nath., MIT Press 1976, p. 255. Howe P.S. Phys. Lett., 70B, 1977, 453.

2. Исаев А.П. Модель фермионной струны в пространствах групп Ли. Препринт ОИЯИ Р2-85-942, Дубна, 1985.

3. Кулиш П.П., Цыпляев С.А.. Зап. научного сем. ЛОМИ, I20 , I984, с. I22.
4. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. УМН, т. 3I, № I, I976, с. 55.
5. Пронько Г.П. Теория релятивистской струны: I. Вспомогательная спектральная задача. Препринт ИФВЭ, 85-27, Серпухов, I985 г.
6. Пронько Г.П. ТМФ, 57, №2, I983, с. 203.

Рукопись поступила в издательский отдел
I0 января I986 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Исаев А.П. Р2-86-16

Вспомогательная спектральная задача в теориях фермионных струн

Изучается вспомогательная спектральная задача, возникающая в моделях фермионных струн. Цель работы - изучение динамики фермионных струн в некомпактных группах Ли. Строится полный набор переменных типа "Действие" и намечен путь редукции фермионных струн к суперсимметричным системам с конечным числом степеней свободы. Полученные результаты открывают возможность построения корректной квантовой теории фермионных струн в пространстве-времени любой размерности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Isaev A.P. P2-86-16

Auxiliary Spectral Problem in Fermionic String Theories

The auxiliary spectral problem arising in the fermionic string model is investigated in order to study the fermionic string dynamics in noncompact Lie group. A complete set of the "action" type variables is obtained and fermionic string reduction to supersymmetry systems with finite-number degrees of freedom is discussed. These results reveal the possibility to construct a correct quantum theory of the fermionic strings in the arbitrary dimension space-time.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986