объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-148

Л.А.Слепченко

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ АТОМА ВОДОРОДА

Направлено в журнал "Письма в ЖЭТФ"
и в Оргкомитет Международного семинара
"Кварки-86", Тбилиси, апрель 1986 г.

1986

Известно, что некоторые квантовомеханические (КМ) системы обладают точными решениями ввиду наличия достаточно большой группы симметрии. В частности, уравнение Шредингера для атома водорода обладает в дополнение к геометрической вращательной симметрии более высокой "скрытой" или динамической симметрией /I,2/. Включение в эту группу преобразований суперсимметрии /3/ позволит, по-видимому, продвинуться в понимании проблемы вырождения спектров КМ систем, вопросов спонтанного нарушения суперсимметрии и т.п.

В данной заметке в рамках суперсимметричной квантовой механики (ССКМ) /4/ мы обсудим возможность наличия в задаче атома водорода группы динамической суперсимметрии, порождающей неизвестные ранее свойства спектров.

Следуя Виттену /4/, рассмотрим d = I*) действие для вещественного скалярного суперполя

$$S=\int dt\, d\theta\, d\theta^* \left\{ \frac{1}{2} |\mathcal{D}_\theta \Phi|^2 - W[\Phi] \right\}, \qquad \text{(I)}$$

где $\mathcal{D}_\theta = \partial_\theta - i\theta^* \partial_t$ - суперковариантная производная, разложение локального поля Φ в ряд по нечетным вещественным элементам алгебры Грассмана θ и θ^* : $\Phi(t,\theta,\theta^*) = x(t) + i\theta\Psi(t) - i\Psi^+(t)\theta^* + \theta\theta^* F(t)$. После интегрирования по грассмановым переменным, исключения вспомогательного поля с использованием уравнения движения $F = -\partial_x W \equiv -W'$ и процедуры квантования $\dot{x} \to p$, $[x,p]=i$, $\{\Psi\Psi^+\} = I$, $\{\Psi\Psi\} = 0$ получим гамильтониан системы

$$H = \frac{1}{2}\{Q,Q^+\} = \frac{1}{2}\{p^2 + W'^2 + [\Psi\Psi^+]W''\},$$

$$[H,Q] = [H,Q^+] = 0, \qquad (2)$$

где Q - сохраняющий суперсимметрию нётеровский заряд, который определяет генератор суперзаряда системы

$$Q = i\Psi(p - iW'), \quad Q^+ = -i\Psi^+(p + iW'). \qquad (3)$$

*) d-мерный случай понимается как (0 + I) - мерная теория d-компонентного поля $\Phi_i (i=1,\dots,d)$ (d - число пространственных измерений).

Для суперпотенциала W' типа $W = a\Phi_1 + b\ln\Phi$ приходим к кулоновской КМ задаче с $W' = a + br^{-1}$, $r = \sqrt{\sum x_i^2}$. Выбирая $a = \kappa^{-1}$, $b = -\kappa$, $\kappa = J + 1 + (d-3)/2$, мы приходим к оператору, известному в методе факторизации Шредингера /5/*).

В реализации элементов алгебры Клиффорда $\{\Psi, \Psi^+, [\Psi^+,\Psi]\}$ в виде матриц Паули $\{\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3\}$

$$H \to H_\pm = \frac{1}{2}(p^2 + W'^2 \mp W''),$$

где гамильтониан бозонного сектора H_+ с точностью до константы $C(\kappa) = (2\kappa^2)^{-1}$ представляет собой стандартный КМ гамильтониан кулоновской задачи $H_0 = H_+ + C(\kappa)$

$$H_0 = \frac{1}{2}\left[P_r^2 - \frac{2}{r} + \frac{J(J+1)}{r^2} \right].$$

Таким образом, эффекты суперсимметрии: увеличение центробежного отталкивания на единицу J = I в фермионном секторе, удвоение (±) возбужденных уровней $E_n = -(2n^2)^{-1}$, $n > 1$ и равенство нулю энергии основного состояния $(n=1)$, $n > J+1$ бозонного сектора $\mathcal{E}_0^+ = C(\kappa) - E = 0$. Заметим, что соответствующая волновая функция $\Psi_0 = e^{-\int W' dz}$ нормируема. Классически точная суперсимметрия соответствует движению электрона по замкнутой орбите (эллипсу).

Обратимся к вопросу динамической симметрии (ДС) кулоновской задачи /2/. Максимальная группа ДС : $SO(d+1,2)$ для $d \geq 3$, соответствующая алгебра, порождающая спектр $SO(2,I)$. Рассмотрим, как видоизменится ДС атома водорода в ССКМ. Известно, что наличие дополнительного интеграла движения кулоновской задачи - вектора Лапласа - Рунге - Ленца /I,2/ обеспечивает ей высшую симметрию. Коммутируя этот оператор с генератором суперсимметрии, мы приходим к интересному результату:

$$[Q^+, \tilde{A}] = i\frac{d-2}{2}(p^2 + W''), \qquad (4)$$

где $\tilde{A} = A + M$, A - вектор Лапласа и M - оператор лоренц-преобразований - оба генераторы подалгебры $AdISO(d+1,2)$ в терминологии /7/. В частности, для d = 2

*) Применение данного суперпотенциала в теории атомных спектров можно найти в /6/.

$$\tilde{A} = 2q\,p^{+}p + i(J-1/2)p\,,$$

где $$q = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)\,,\ p = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x+ip_y)\,,\ J = xp_y - yp_x\,. \qquad (5)$$

Таким образом, двумерная задача атома водорода (задача Кеплера) в ССКМ сохраняет свою высокую симметрию с дополнительной спиновой суперсимметрией.

В частности, алгебра суперсимметрии соответствующей радиальной задачи, в качестве четной подалгебры, порождающей спектр, опять содержит некомпактную алгебру $SU(1,1) \sim SO(2,1)$. Опять-таки энергия основного состояния $\mathcal{E}_0^+ = 0$ и соответствующая классическая орбита – эллипс.

Весьма интересные следствия равенства (5) получаются для полной (угловой) двумерной задачи Кеплера.

Так как генератор подалгебры, порождающей спектр, имеет вид $\Gamma_0 = \frac{1}{2}(rp^2 + r + \mathcal{E}/r)$, с $\epsilon = K^2 - \sigma_3 K$, $K = J + 1/2$, уравнение Шредингера в бозонном секторе отвечает кеплеровокой задаче взаимодействия частицы в эффективном потенциале с удвоенным отталкиванием силой $\sim 1/r^3$. В случае $\epsilon \neq 0$ генераторы $SO(2,1)$ и дипольные операторы $\Gamma_i = rp_i$ не замыкают алгебру ДС $SO(d+1,2)$, что соответствует частичному снятию вырождения типа эффектов тонкой структуры (классическая орбита размыкается).

При этом супералгеброй Ли, порождающей спектр, является некомпактная простая супералгебра OSP (2,I) /8/.

Обычная КМ задача все еще обладает точным решением /2/

$$E_n = -(2n^2)^{-1}\,,\ n = \frac{1}{2} + m + \sqrt{J^2+\epsilon}\,,\ m = 0, 1, \ldots\,.$$

При этом суперсимметрия задачи спонтанно нарушается – отсутствует основное состояние системы с энергией $\mathcal{E}_0^+ = 0$, $n \geq J+1$, т.е. разрушается исходная ДС.

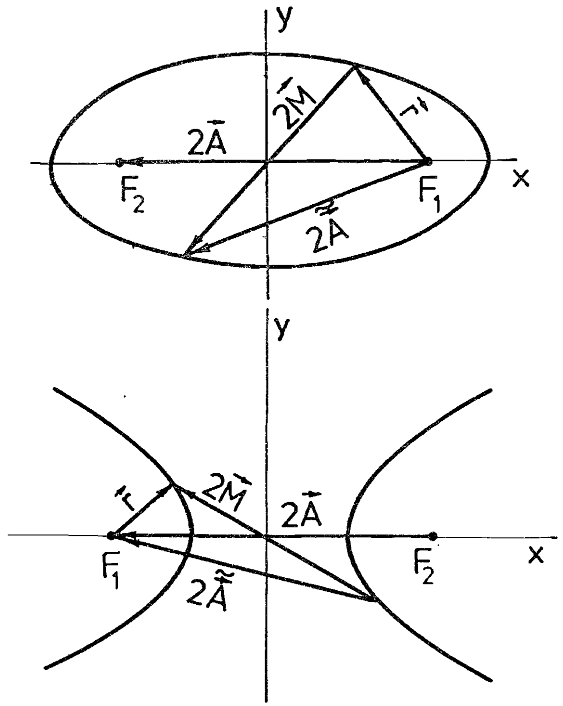
Однако даже в этом случае динамическая суперсимметрия допускает аномальное решение уравнения Шредингера, не имеющее аналога в обычной КМ:

$$\mathcal{E}_0^+ = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{2J^2-1/4}+1+J\right)\left(\sqrt{2J^2-1/4}-J\right)}{\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2J^2-1/4}\right)\right]^2}\,, \qquad (6)$$

так как $\sqrt{2J^2-1/4} - J \geq 0$ – минимальное значение момента J = I/2 и $\mathcal{E}_0^+ = 0$.

В заключение отметим, что полученные результаты являются следствием выбора суперпотенциала шредингеровского типа /5/, который в отличие от выбора W' , сделанного в работе /9/, обладает, на наш взгляд, интересными физическими следствиями.

Геометрический смысл вектора $\tilde{A} = A + M = 2A - r = 2M + r$ для классических кеплеровских орбит проиллюстрирован рисунком (см. также /I0/).



Геометрический смысл вектора $\tilde{A} = A + M = 2A - r = 2M + r$ в формулах (4) , (5) для двух типов орбит классической кеплеровой задачи. $(\vec{A}\cdot\vec{r})$ – уравнение орбиты, $|\vec{A}|$ – эксцентриситет.

Автор выражает глубокую благодарность А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и поддержку, Е.А.Иванову, В.А.Матвееву, Р.М.Мир-Касимову, В.Г.Кадышевскому, А.Н.Сисакяну, Я.А.Смородинскому, И.Т.Тодорову, П.Экснеру за весьма полезные обсуждения.

Литература

I. Fock V. Z. Phys., I935, 98, I45; Bargmann V. Z. Phys., I936, 99, 576.
2. Wybourne B., Classical groups for physicists, I974, New York; Englefield M.J. Croup theory and Coulomb problem, I972, I972, New York.
3. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. Письма в ЖЭТФ, 297I, I3, I52. Volkov D.V., Akulov V.P. Phys. Lett., I973, B46, I09.
4. Witten E., Nucl. Phys. I98I, BI85, 5I3.
5. Schrödinger E. Proc. Ir. Acad. 1940, 46A, 9; Infeld L. Hull T.E., Rev. Mod. Phys., I95I, 23, 2I.
6. Koslelecky V.A., Nieto M.M. Phys. Rev. Lett., I984, 53, 2285.
7. Gilmore R., Lie groups, Lie algebras, and some of their applications, I974, New York; Barut A.O., Schneider C., Wilson R., Journ. Math. Phys., I979, 20, 2244.
8. Pais A., Rittenberg V., Journ. Math. Phys., I975, I6, 2062; I976, I7, 868.
9. D'Hoker E., Vinet L., Nucl. Phys., I985, B260, 79.
IO. Chen A., Am. J. Phys., I979, 47, I073.

Рукопись поступила в издательский отдел
I7 марта I986 года.

Слепченко Л.А. Р2-86-148
О динамической суперсимметрии атома водорода

В рамках суперсимметричной квантовой механики обсуждается динамическая симметрия задачи водородного атома. Показано, что динамическая суперсимметрия двумерной задачи Кеплера обладает неизвестными ранее свойствами спектров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Slepchenko L.A. P2-86-148
On the Dynamical Supersymmetry of the Hydrogen Atom

In the framework of supersymmetric quantum mechanics a dynamical symmetry of the hydrogen atom is considered. New features of spectra for the dynamical supersymmetry of two-dimensional Kepler problem are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986