сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-131

П.П.Физиев, Ц.Я.Физиева

ПОЛНАЯ РЕДУКЦИЯ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ ЛИНИИ

1986

ВВЕДЕНИЕ

В системе центра масс в модифицированных координатах Дельвеса[1-3] $\rho \in [0,\infty)$, $\phi \in [0,2\pi]$ задача трех частиц с массами $m_{1,2,3}$ ($m_1+m_2+m_3=M$) и с гравитационным или электрическим двухчастичным взаимодействием сводится к автономной механической системе с двумя степенями свободы, гамильтониан которой есть

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2}\right) + \frac{a(\phi)}{\rho}, \qquad /1/$$

где

$$a(\phi) = \epsilon\gamma(\phi), \qquad /2/$$

$$\gamma(\phi) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i \left|\sin(\phi-\phi_{i,jk})\right|^{-1}, \qquad /3/$$

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon^{(m)} = -\mu M\sqrt{s_1 s_2 s_3} & \text{для гравитации,} \\ \epsilon^{(e)} = (e_1 e_2 e_3)^{\frac{2}{3}}\sqrt{s_1 s_2 s_3} & \text{для электрических сил,} \end{cases} \qquad /4/$$

$$s_i = \sin\psi_i, \quad c_i = \cos\psi_i, \quad t_i = \mathrm{tg}\psi_i = \frac{m_i}{\mu}, \qquad /5/$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma_i^{(m)} = c_i s_i^{-2} & \text{для гравитации,} \\ \gamma_i^{(e)} = (e_j e_k/e_i^2)^{\frac{1}{3}} s_i^{-1} & \text{для электрических сил.} \end{cases} \qquad /6/$$

Приведенная масса трехчастичной системы[1-3] задана выражением

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1+m_2+m_3}}. \qquad /7/$$

Проблема изучения динамики интегрируемости систем с двумя степенями свободы является сложным и неисследованным до конца вопросом[4-10]. Основной метод его рассмотрения состоит в получении полного набора первых интегралов системы и соответствующей редукции системы уравнений Гамильтона до одного дифференциального уравнения на некий класс функций, через которые можно описать динамику задачи. Этот вопрос не решен для общей задачи трех классических частиц, несмотря на ее длительную историю[4-10]. В ограниченной задаче трех частиц проблема полной редукции была решена сравнительно недавно[7].

Случай движения трех частиц по неподвижной прямой линии соответствует специальному выбору начальных условий в общей задаче [2]. Несмотря на значительные упрощения, позволяющие продвинуться очень далеко в его изучении, этот случай содержит в полной мере проблему интегрируемости задачи.

Вопрос интегрируемости механических задач рассматривался в различных смыслах разными авторами [4–10]. Он не выяснен до конца и сегодня. В частности, отсутствует критерий определения интегрируемости задачи по ее гамильтониану [5,6], что, на наш взгляд, отражает неполноту понимания сути проблемы.

Задача трех частиц является классическим примером неинтегрируемой задачи, многовековое развитие которой отражает и эволюцию взглядов на общую проблему интегрируемости [7,8]. Можно надеяться, что достаточно полное изучение хотя бы самого простого случая движения в этой задаче позволит продвинуться в понимании общей проблемы интегрируемости гамильтоновых систем.

Проведение полной редукции в общей задаче трех частиц до сих пор наталкивалось на непреодолимые трудности технического характера. В настоящей работе мы покажем, что решающую роль для успешного проведения полной редукции задачи на прямой играет применение модифицированных координат Дельвеса. Возможность доведения редукции до конца связана с полным разделением описания тройного и парных ударов в этих координатах [3], а ее выполнение определено однозначно. В результате полной редукции мы получим ряд новых в физическом и математическом плане уравнений, позволяющих классифицировать возможные движения и полностью разобраться в динамике задачи.

Полная редукция позволяет также установить вид дополнительных первых интегралов для данного случая движения, разобраться в проблеме их существования и выяснить их свойства. До сих пор по этим вопросам имелись только хорошо известные отрицательные результаты Брунса, Пенлеве, Пуанкаре и других авторов [4–10].

Настоящей работой мы начинаем изучение этих проблем для линейного случая движения трех частиц.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнения Гамильтона получаем из /1/:

$$\dot{p}_\rho = \frac{p_\phi^2}{\mu\rho^3} + \frac{\alpha}{\rho}, \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{\mu}; \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\alpha'(\phi)}{\rho}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{\mu\rho^2}, \qquad /8/$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t, а штрихом - по углу ϕ.

Исключением импульсов из /8/ получаем динамические уравнения в форме уравнений Лагранжа:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{\mu\rho^2} = 0, \quad \ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\alpha'}{\mu\rho^3} = 0. \qquad /9/$$

Уравнения /8/,/9/ имеют очевидный первый интеграл - полную энергию системы:

$$E = \frac{1}{2\mu}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2}\right) + \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{\rho}. \qquad /10/$$

2. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

А. В электрическом варианте задачи трех частиц имеются особые решения простейшего типа, которые характеризуются условием

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const} \in (0, \infty). \qquad /11/$$

Вместе с /9/ и /10/ оно приводит к

$$\phi = \phi_0 = \mathrm{const}, \qquad /12/$$

где $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ следует искать из системы уравнений

$$\alpha(\phi) = 0, \quad \alpha'(\phi) = 0. \qquad /13/$$

Для энергии этих решений получаем

$$E = 0. \qquad /14/$$

Условие совместимости переопределенной системы /13/ есть

$$\sqrt{-\gamma_{i+2}\, s_{i+2}} = \sqrt{\gamma_{i+1}\, s_{i+1}} + \sqrt{\gamma_i\, s_i}, \qquad /15/$$

где индексы берутся по mod 3. Видно, что для гравитации и электрических зарядов с одинаковыми знаками таких решений не существует. Они становятся возможными для зарядов разных знаков, например $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \mp)$, когда при помощи /6/ можно переписать /15/ в виде

$$|e_3|^{-1/2} = |e_2|^{-1/2} + |e_1|^{-1/2}. \qquad /16/$$

Это соотношение зарядов имеет место, например, в системе двух ядер Be^{++++} и одного электрона e^-. При его выполнении система /13/ имеет два, физически эквивалентных, решения ϕ_0, $\phi_0 + \pi$ /рис.1/, а ρ_0 остается произвольным. При этом силы между зарядами уравновешивают друг друга и система остается в покое при соответствующих начальных условиях.

Б. Решения либрационного типа. В задаче трех частиц на неподвижной прямой линии легко найти гомотетические решения, которые, по-видимому, не выписывались в литературе, но являются прямым аналогом либрационных решений Эйлера, а их обобщения - гомографических решений [8,9]. Для случая движения на вращающейся с постоянной угловой скоростью прямой последние представляют все известные точные решения задачи.

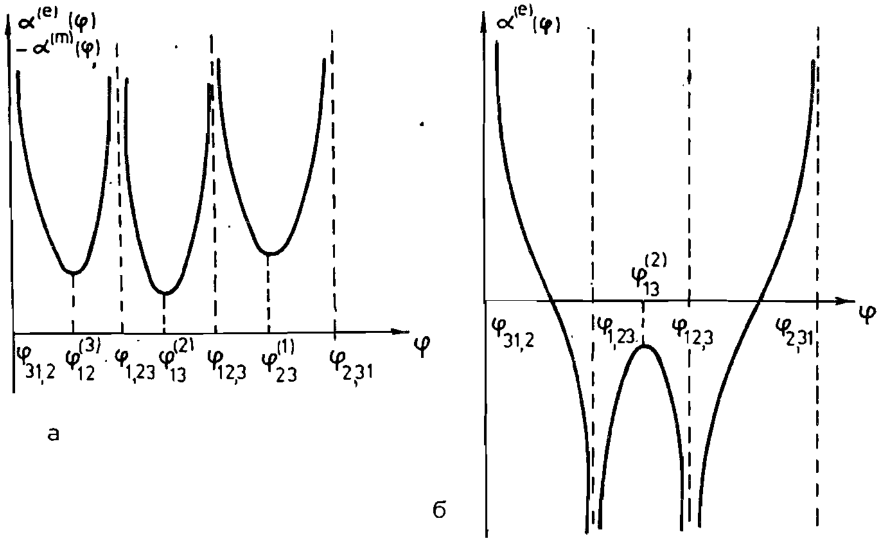

Рис.1. Вид функций: а/ $\alpha^{(e)}(\phi)$ при $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \pm)$/ и $-\alpha^{(m)}(\phi)$; б/ $\alpha^{(e)}(\phi)$ при $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \mp, \pm)$.

Полагая

$$\phi = \mathrm{const}, \qquad /17/$$

получаем из /9/ уравнение на ϕ :

$$\alpha'(\phi) = 0, \qquad /18/$$

и уравнение для $\rho(t)$:

$$\ddot{\rho} - \frac{\alpha}{\mu\rho^2} = 0. \qquad /19/$$

Решениями уравнения /18/ являются либрационные углы $\phi_{jk}^{(i)}$ /рис.1/, которые подробно исследовались в [8]. Видно, что в /19/ константа $\alpha = \alpha(\phi_{jk}^{(i)})$ может иметь разные знаки: $\alpha(\phi_{jk}^{(i)}) < 0$ – для гравитации и электрических зарядов одного знака $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \pm)$, $\alpha(\phi_{jk}^{(i)}) > 0$ - для зарядов разных знаков, например $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \mp)$.

Решения уравнения /19/ находятся элементарным интегрированием. Имеются три типа таких решений:

1/ инфинитное движение - при $E > 0$, когда решение задается неявным образом соотношением

$$\sqrt{\mu\rho E(|\alpha| + \mu\rho E)} - \sqrt{\mu\rho_0 E(|\alpha| + \mu\rho_0 E)} - |\alpha|\left(\mathrm{arcth}\sqrt{\frac{\mu\rho E}{|\alpha| + \mu\rho E}} - \mathrm{arcth}\sqrt{\frac{\mu\rho_0 E}{|\alpha| + \mu\rho_0 E}}\right) =$$

$$= \pm\frac{\mu}{2}(2E)^{3/2}(t - t_0); \qquad /20/$$

2/ сепаратрисный случай движения - при $E = 0$ и $\alpha(\phi_{jk}^{(i)}) < 0$, когда

$$\rho(t) = \left[\rho_0^{3/2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{|\alpha|}{2\mu}}(t - t_0)\right]^{2/3}; \qquad /21/$$

3/ финитное движение - при $E < 0$ и $\alpha(\phi_{jk}^{(i)}) < 0$, когда

$$\sqrt{\mu\rho|E|(|\alpha| - \mu\rho|E|)} - \sqrt{\mu\rho_0|E|(|\alpha| - \mu\rho_0|E|)} - |\alpha|\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mu\rho|E|}{|\alpha| - \mu\rho|E|}} - \right.$$

$$\left. - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\mu\rho_0|E|}{|\alpha| - \mu\rho_0|E|}}\right) = \pm\frac{\mu}{2}(2|E|)^{3/2}(t - t_0). \qquad /22/$$

Из /20/-/22/ видим, что зависящий от времени t дополнительный первый интеграл системы t_0 не является однозначной функцией и неаналитичен в нуле по массам $m_{1,2,3}$, которые входят в него через приведенную трехчастичную массу μ .

Следовательно, его нельзя искать по теории возмущений, разлагая решение в степенные ряды по некоторой из масс $m_{1,2,3}$. Этот факт имеет место и в более сложных случаях движения задачи трех частиц. Он дает возможность понять происхождение отрицательных результатов Пуанкаре по поводу существования однозначных первых интегралов задачи трех частиц, аналитических в нуле по некоторой из масс $m_{1,2,3}$ [4,6-10], и находится в согласии с результатами работы [11].

В задаче трех частиц на неподвижной прямой нет других особых решений.

3. ПОЛНАЯ РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА НЕПОДВИЖНОЙ ПРЯМОЙ

Суть проблемы трех частиц состоит в описании решений общего вида, что до сих пор является открытым вопросом. Первым шагом на пути к его решению есть полная редукция задачи, которую в данном случае можно провести только в модифицированных координатах Дельвеса. Для этого будем искать решения уравнений Гамильтона /8/ в виде

$$p_\rho(t) = p_\rho[\phi(t)], \quad \rho(t) = \rho[\phi(t)], \quad p_\phi(t) = p_\phi[\phi(t)], \quad \phi = \phi(t). \qquad /23/$$

Тогда из /8/ и /10/ получаем соотношения

$$p_\rho = \mu \frac{\alpha'}{p'_\phi}\left(\frac{2E}{\mu}\frac{p'^2_\phi}{\alpha'^2} + \frac{2}{\mu}\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{p'_\phi}{p_\phi} - 1\right)^{1/2}, \quad p'_\rho = \mu\frac{\alpha'}{p'_\phi}\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{p'_\phi}{p_\phi} - 1\right), \qquad /24/$$

$$\rho = -\frac{p_\phi p'_\phi}{\mu\alpha'}, \quad \rho' = \frac{p_\phi p'_\phi}{\mu\alpha'}\left(\frac{2E}{\mu}\frac{p'^2_\phi}{\alpha'^2} + \frac{2}{\mu}\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{p'_\phi}{p_\phi} - 1\right)^{1/2}. \qquad /25/$$

Дифференцируя первое соотношение в /24/ или в /25/ по ϕ и приравнивая результат ко второму выражению, получаем дифференциальное уравнение для $p_\phi(\phi)$:

$$\frac{p''_\phi}{p'_\phi} + \frac{p'_\phi}{p_\phi} - \left(\frac{2E}{\mu}\frac{p'^2_\phi}{\alpha'^2} + \frac{2}{\mu}\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{p'_\phi}{p_\phi} - 1\right)^{1/2} = \frac{\alpha''}{\alpha'}. \qquad /26/$$

Уравнение для $\rho(\phi)$ легко получить из /9/ и /10/ в виде

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)\frac{1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\rho'}{\rho} - 2\frac{E\rho}{\alpha}}{1 - \frac{E\rho}{\alpha}} = 0. \qquad /27/$$

Получение дифференциального уравнения для $p_\rho(\phi)$ наталкивается на непреодолимую трудность - решение алгебраического уравнения выше четвертой степени, содержащего произвольный параметр. Однако при помощи /10/ нетрудно выразить $p_\rho(\phi)$ через $\rho(\phi)$ в виде

$$p_\rho = [2\mu(E - \frac{\alpha}{\rho})/(1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2})]^{1/2}. \qquad /28/$$

Уравнения /26/ и /27/ эквивалентны друг другу, что видно из соотношения

$$p_\phi = \frac{\rho^2}{\rho'}[2\mu(E - \frac{\alpha}{\rho})/(1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2})]^{1/2}, \qquad /29/$$

выражающего $p_\phi(\phi)$ через $\rho(\phi)$. Ясно, что предпочтительнее работать с уравнением /27/, которое не содержит дробно-степенных особенностей.

Предполагая, что решение $\rho(\phi)$ уравнения /27/ известно, то есть зная траекторию системы, при помощи

$$\dot\phi = [\frac{2}{\mu}(E - \frac{\alpha}{\rho})/(\rho'^2 + \rho^2)]^{1/2} \qquad /30/$$

можно найти и ее закон движения в виде простой квадратуры:

$$t - t_0 = \pm\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\sqrt{\frac{\rho'^2 + \rho^2}{\frac{2}{\mu}(E - \frac{\alpha}{\rho})}}, \qquad /31/$$

то есть полностью решить задачу.

В единственности изложенного решения можно убедиться, если провести редукцию по соответствующей теореме Уиттекера /10,5/. Согласно этой теореме наша автономная система с двумя степенями свободы, при ограничении на энергетической поверхности /10/, редуцируется до неавтономной системы с одной степенью свободы и неким гамильтонианом h , получаемым из /10/. Если в качестве независимой переменной /нового "времени"/ выбрать угол ϕ , то

$$h = p_\phi(p_\rho, \rho, \phi; E) = [2\mu\rho^2 E - \rho^2 p_\rho^2 - 2\mu\rho\alpha(\phi)]^{1/2}$$

и уравнения Гамильтона для системы с этим гамильтонианом, обобщенным импульсом p_ρ и координатой ρ, сводятся к /26/. Любой другой выбор независимой переменной, равно как и работа в других координатах, привел бы к технически нерешимой задаче нахождения h из уравнения /10/, которое, как видно из рис.1, в таком случае привело бы к уравнению с шестью корнями, то есть эквивалентному уравнению шестой степени, зависящему от произвольного параметра E .

4. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА ЗАДАЧИ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА НЕПОДВИЖНОЙ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

В этом разделе мы излагаем классификацию решений задачи по отношению к свойству интегрируемости. Она основана на уравнении /27/. Физическую классификацию решений типа классификации Шази следует привести после более детального изучения решений.

Из уравнения /27/ легко вытекает, что решения общего вида разбиваются на два основных класса:

1. Случаи "полной интегрируемости" задачи, когда дифференциальное уравнение второго порядка /27/ приводится к дифференциальному уравнению первого порядка:

а/ при $E \to \infty$, когда кинетическая энергия трех частиц намного больше их потенциальной энергии и их можно с хорошей точностью рассматривать как свободные. Тогда уравнение /27/ переходит в уравнение на логарифмическую производную:

$$v = v(\phi) = (\ln\rho)', \qquad /32/$$

которое принимает вид

$$v' = 1 + v^2 \qquad /33/$$

и решается элементарно:

$$v = \mathrm{tg}(\phi - \phi_0). \qquad /34/$$

Отсюда

$$\rho(\phi) = \frac{\rho_0}{\cos(\phi - \phi_0)}. \qquad /35/$$

Тогда из /28/,/29/ и /31/ получаем

$$p_\rho \approx \pm \sqrt{2\mu E}\,\sin(\phi - \phi_0), \qquad p_\phi \approx \pm\rho_0\sqrt{2\mu E}, \qquad /36/$$

$$\phi \approx \phi_0 \pm \mathrm{arctg}\Big[\sqrt{\frac{2E}{\mu\rho_0^2}}(t - t_0)\Big]. \qquad /37/$$

Эти уравнения задают приближенное решение задачи трех частиц для достаточно больших значений E при наличии двухчастичного взаимодействия рассматриваемого нами вида, а также точное решение задачи для трех свободных частиц в координатах Дельвеса. В нашем случае ϕ_0, ρ_0, t_0, а также их комбинации, например p_ϕ, являются приближенными первыми интегралами задачи при больших E. Все они не являются аналитическими функциями масс $m_{1,2,3}$, от которых зависят через посредство приведенной массы μ.

б/ при $E = 0$ получаем второй вполне интегрируемый случай задачи - сепаратрисный случай. Тогда /37/ снова переходит в дифференциальное уравнение первого порядка на логарифмическую производную v. Это есть уравнение Абеля[12] второго рода:

$$v' - \frac{1}{2}(1 + v^2)(1 - \frac{\alpha'}{\alpha} v) = 0. \qquad /38/$$

Пусть $v = v(\phi, \phi_0)$ есть решение этого неавтономного уравнения. Тогда

$$\rho(\phi) = \rho_0 \exp\Big[\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\, v(\phi, \phi_0)\Big] \qquad /39/$$

есть общее решение уравнения /27/ при $E = 0$. Оно зависит от двух произвольных констант ρ_0 и ϕ_0.

С учетом /32/ и соотношения $\rho' = \rho^2 p_\rho / p_\phi$ получаем, что в данном случае $\rho p_\rho / p_\phi = v(\phi, \phi_0)$.

Следовательно, система имеет дополнительный первый интеграл

$$\phi_0 = \Phi(\phi, \rho\frac{p_\rho}{p_\phi}), \qquad /40/$$

где $\Phi(v)$ - функция, обратная функции $v(\phi)$. Физический смысл этого первого интеграла можно связать с распределением энергии между частицами[1]. Он также зависит от масс $m_{1,2,3}$ сложным и неаналитическим образом, что следует из /38/ и /2/-/5/.

Других "полностью интегрируемых" случаев в задаче трех частиц на неподвижной прямой, по-видимому, нет. По терминологии

Биркгофа[4], полученные нами дополнительные первые интегралы следует считать условными.

2. В случае движения общего вида: $E \neq 0$, ∞, решение задачи сводится к решению нелинейного уравнения второго порядка /27/. Оно обладает важным свойством, характерным для двухчастичного взаимодействия с потенциалами $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$. Это уникальное свойство состоит в том, что решение зависит тривиальным образом от значения энергии E, и если сделать подстановку

$$z(\phi) = E\rho(\phi), \qquad /41/$$

то получим не зависящее от E уравнение

$$\Big(\frac{z'}{z}\Big)' - \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{z'^2}{z^2}\Big)\frac{1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{z'}{z} - 2\frac{z}{\alpha}}{1 - \frac{z}{\alpha}} = 0. \qquad /42/$$

Иными словами, с технической точки зрения достаточно решить задачу только для двух значений полной энергии: $E = 0$ и $E = 1$.

Можно показать, что это свойство двухчастичного взаимодействия с потенциалами $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$ имеет место не только в общей задаче трех частиц, движущихся в пространстве, но и в задаче N частиц при любом $N \geq 2$.

Возможность понизить порядок уравнений /27/, /42/ нуждается в исследовании и зависит от явного вида функции $\alpha(\phi)$. Например, при $\alpha = \mathrm{const}$, умножая /27/ на $\rho'\rho^{-2}(E\rho/\alpha - 1)^{-1}$, можно понизить его порядок и привести к виду

$$\frac{1}{2\rho}\Big(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\Big)\Big(\frac{E\rho}{\alpha} - 1\Big)^{-1} = \mathrm{const}.$$

Это соответствует наличию дополнительного первого интеграла $p_\phi = \mathrm{const}$. Видно, что при $\alpha = \mathrm{const}$ приходим к полностью интегрируемой задаче с трехчастичным потенциалом $V(\rho) = \mathrm{const}\cdot\rho^{-1}$, который является функцией момента инерции системы $I = \mu\rho^2$.

Для исследования неприводимости уравнения /27/ при $\alpha(\phi)$ вида /2/-/6/, а также в случае $\alpha(\phi)$ общего вида необходимо разработать специальную методику. Это позволило бы доказать строго "неинтегрируемость" классической задачи трех частиц.

Таким образом, дальнейшее изучение решений задачи трех частиц на неподвижной прямой линии сводится к исследованию свойств классов специальных функций, определяемых уравнениями /38/ и /42/. Мы займемся этим исследованием в последующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Delves L.M. Nucl.Phys.,1959,9,p.391; 1960,20,p.275.
2. Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya.JINR,E2-86-119, Dubna,1986.

3. Fiziev P.P.,Fizieva Ts.Ya.JINR,P2-86-130,Dubna,1986.
4. Birkhoff G.D. Dynamical Systems.N.Y., 1927.
5. Arnold V.I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, 1978.
6. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Итоги науки и техники, серия "Современные проблемы математики", М.,1985,т.3.
7. Szebehely V. Theory of Orbits. Academic Press, N.Y.,1967.
8. Wintner A.Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton Press, N.Y., 1947.
9. Hagihara Y. Celestial Mechanics. MIT Press, Cambridge-Massachissets-London,1970, vol.1-2; Tokio Press, Tokio, 1976, vol.3-5.
10. Whittaker E.T. A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge,1965.
11. Cherry T.M. Proc.Cambridge Phil.Soc.,1924,22,p.287.
12. Kamke E. Differentialgleichungen. Leipzig,1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1986 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Физиев П.П., Физиева Ц.Я. P2-86-131

Полная редукция и интегрируемость в классической задаче трех частиц на прямой линии

Рассматривается классическая задача трех частиц на неподвижной прямой линии, которые взаимодействуют между собой при помощи двухчастичных потенциалов гравитационного или электрического типа. Изучаются решения динамических уравнений в модифицированных координатах Дельвеса. Найдены все особые решения этих уравнений. Впервые проведена полная редукция задачи и получены новые уравнения, позволяющие полностью описать динамику в терминах соответствующих классов специальных функций. При помощи этих уравнений дана классификация решений общего вида по отношению к "полной интегрируемости" задачи и найдены соответствующие дополнительные первые интегралы. Показано, что все дополнительные первые интегралы зависят неаналитическим образом от масс $m_{1,2,3}$ трех частиц, в результате чего их нельзя искать по теории возмущений, разлагая в ряды по некоторой из масс, в предположении ее малости.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Г.Г.Сандуковской

Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya. P2-86-131

Complete Reduction and Integrability of the Classical Three-Particle Problem on the Line

The classical problem of three particles on a fixed straight line that interact with each other through two-particle potentials of the gravitational and electrical type is considered. The solutions of dynamical equations are studied in the modified Delves coordinates. All particular solutions of these equations are found. A complete reduction of the problem has first been performed thus providing new equations for the description of the dynamics in terms of the relevant classes of special functions. These equations were used to classify solutions of the general form with respect to "complete integrability" of the problem and the relevant additional first integrals were found. It is shown that all additional first integrals depend in the nonanalytical way on masses $m_{1,2,3}$ of three particles. As a result they cannot be searched for by the perturbation theory expanding in series over one of the masses under the assumption of its smallness.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986