

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-86-130

П.П.Физиев, Ц.Я.Физиева

ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЧАСТИЦ  
НА ПРЯМОЙ ЛИНИИ

1986

## ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача трех частиц с массами  $m_1, m_2, m_3$  ( $M = m_1 + m_2 + m_3$ ), взаимодействующих между собой с помощью потенциала  $V = V_{12} + V_{23} + V_{31}$ , где  $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$  есть двухчастичные потенциалы гравитационного или электрического типа, а  $r_{ij}$  - расстояние между частицами с номерами  $i \neq j = 1, 2, 3$ , имеет трехвековую историю. С большим числом полученных результатов можно познакомиться, например, в [1-5].

На протяжении длительного периода времени простейший случай в задаче, который реализуется при специальном выборе начальных условий - движении частиц по неподвижной прямой линии, не привлекал внимания, так как он не встречался в астрономических приложениях. В последние годы появился интерес к этому случаю в связи с нуждами квантовой химии [см. ссылки в [7]], где, однако, применяют феноменологические двухчастичные потенциалы другого вида.

На наш взгляд, случай движения частиц по неподвижной прямой интересен с нескольких точек зрения. Во-первых, он соответствует замораживанию угловых степеней свободы системы в реальном пространстве, и поэтому в нем следует искать аналог простейших квантовых состояний, в том числе и основного состояния системы. Во-вторых, такое движение можно реализовать на ускорителях. В-третьих, с чисто математической точки зрения это достаточно простой случай, который следует в первую очередь попытаться разобрать точно. При этом он содержит все еще не выясненную до конца проблему интегрируемости задачи и может пролить на нее новый свет.

Настоящей публикацией мы начинаем изучение этого случая в предложенных недавно модифицированных координатах Дельвеса [6, 7]. Изложение строится так, чтобы по возможности одновременно рассматривать гравитационный и электрический вариант задачи.

### 1. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ КООРДИНАТЫ ДЕЛЬВЕСА НА ЛИНИИ

Пусть три точки движутся по ориентированной оси  $OX$ , и имеют координаты  $x_1, x_2, x_3$ . В системе центра масс, рис. 1, имеют

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0. \quad //1/$$

Следовательно, остаются две независимые переменные, в качестве которых можно выбрать алгебраические значения радиус-векторов квазичастиц Якоби:

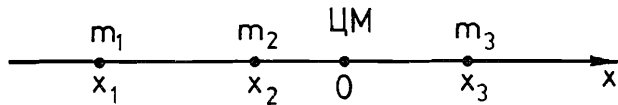


Рис.1. Положение частиц на прямой OX.

$$R = x_2 - x_1 \in (-\infty, \infty),$$

$$r = x_3 - x_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (x_2 - x_1) \in (-\infty, \infty).$$

Они выражаются через модифицированные координаты Дельвеса<sup>6,7/</sup>  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  согласно формулам

$$R = \left(\frac{\mu}{\mu_{1,2}}\right)^{1/2} \rho \cos \phi; \quad r = \left(\frac{\mu}{\mu_{12,3}}\right)^{1/2} \rho \sin \phi, \quad /2/$$

где  $\mu = \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}}$  есть приведенная масса системы трех частиц,

а  $\mu_{1,2}^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$ ,  $\mu_{12,3}^{-1} = (m_1 + m_2)^{-1} + m_3^{-1}$  — массы частиц Якоби.

## 2. ТРЕУГОЛЬНИК $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ И ОПИСАНИЕ УДАРОВ ЧАСТИЦ

А'. Легко получить, что координаты частиц  $x_i$  выражаются следующим образом через  $\rho$  и  $\phi$ :

$$x_i = d_i \cos(\phi - \phi_{i,jk}); \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3, \quad /3/$$

где

$$d_i = \rho \frac{c_i}{\sqrt{s_1 s_2 s_3}} \quad /4/$$

выражаются через

$$s_i = \sin \Psi_i, \quad c_i = \cos \Psi_i, \quad t_i = \operatorname{tg} \Psi_i, \quad /5/$$

а углы  $\Psi_{1,2,3}$  определены согласно соотношению<sup>/7/</sup>:

$$\Psi_i = \operatorname{arctg} \left( \frac{m_i}{\mu} \right) \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad /6/$$

и удовлетворяют условию

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \pi. \quad /7/$$

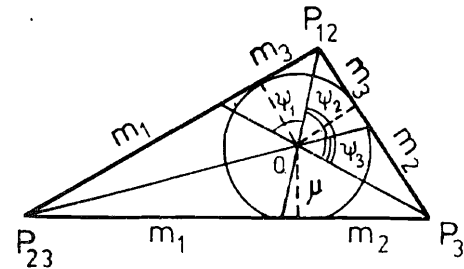


Рис.2. Треугольник  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ .

Они являются углами между биссектрисами треугольника  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , рис.2, стороны которого заданы соотношениями

$$P_{31} P_{23} = m_1 + m_2, \quad P_{12} P_{31} = m_2 + m_3, \quad P_{23} P_{12} = m_3 + m_1. \quad /8/$$

Приведенная масса  $\mu$  есть радиус вписанной в этот треугольник окружности с центром в точке O.

Стороны треугольника, заданные /8/, всегда удовлетворяют неравенствам треугольника. В данном случае они сводятся к

$$m_i + m_j + 2m_k \geq m_i + m_j$$

и выполняются в силу неотрицательности масс  $m_i \geq 0$ . Следовательно,  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  существует всегда и определяется однозначно массами  $m_{1,2,3}$ .

Б. Модифицированные координаты Дельвеса обладают замечательным свойством: в них тройной и парные удары частиц описываются полностью независимо друг от друга.

Тройной удар:  $x_1 = x_2 = x_3$  соответствует координатной линии

$$\rho = 0 \quad /9/$$

и может произойти при любом значении угла  $\phi$ .

Парные удары  $x_j = x_k \neq x_i$  /при  $i \neq j \neq k \neq i$ / происходят независимо от значения гиперрадиуса  $\rho$  на координатных линиях

$$\phi = \phi_{i,jk} = \text{const}. \quad /10/$$

В принятых нами обозначениях  $\phi_{i,jk}$ ,  $\phi_{ij,k}$  углов парных ударов положение индексов по отношению к запятой соответствует положению частиц на ориентированной оси OX по отношению к центру масс  $x=0$ . При таком соглашении

$$\phi_{i,jk} = \phi_{i,kj} = \phi_{jk,i} \pm \pi = \phi_{kj,i} \pm \pi.$$

Мы отдаем предпочтение записям, в которых  $(i, j, k)$  образуют четную перестановку индексов /1,2,3/, не вкладывая в это дополнительный смысл.

Из определения углов парных столкновений и из /2/ можно получить их значения:

$$\phi_{23,1} = \frac{\pi}{2} - \Psi_2, \quad \phi_{3,12} = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_{31,2} = \frac{\pi}{2} + \Psi_1,$$

/11/

$$\phi_{1,23} = \frac{3\pi}{2} - \Psi_2, \quad \phi_{12,3} = \frac{3\pi}{2}, \quad \phi_{2,31} = \frac{3\pi}{2} + \Psi_1.$$

При помощи трансляции  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{3}$  при желании можно добиться симметрического описания парных столкновений по отношению к трем частицам. Тогда для значений углов получаем

$$\phi'_{23,1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\Psi_2 - \Psi_3}{3}, \quad \phi'_{3,12} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{3}, \quad \phi'_{31,2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{3},$$

$$\phi'_{1,23} = \frac{7\pi}{6} - \frac{\Psi_2 - \Psi_3}{3}, \quad \phi'_{12,3} = \frac{9\pi}{6} - \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{3}, \quad \phi'_{2,31} = \frac{11\pi}{6} - \frac{\Psi_3 - \Psi_1}{3}.$$

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ $\rho = \text{const}$

Поставим центр масс  $x=0$  в точке 0 на плоскости  $\{R, r\}$  и выберем горизонтальное направление в качестве нулевого для отсчета угла  $\phi$ , рис.3. При вращении прямой OX на угол  $\phi$  около точки 0 точки с координатами  $x_i(\phi)$  опишут согласно /3/ три окружности  $C_i$  с диаметрами  $d_i$ . Эти окружности проходят через точку 0, а их центры  $O_i$  лежат на прямых  $OO_i$ , заданных направлениями парных ударов  $\phi_{i,jk}$  ( $\phi_{jk,i}$ ). Окружность  $C_3$  касается горизонтального нулевого направления.

Обозначим через  $P_{jk}$  точки пересечения окружностей  $C_j$  и  $C_k$ . Легко убедиться, что прямые  $OO_i$  являются биссектрисами треугольника  $P_{12}, P_{23}, P_{31}$ , который подобен треугольнику  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , построенному в разделе 2. Коэффициент подобия есть

$$a = \frac{\rho}{\mu} \frac{c_1 c_2 c_3}{\sqrt{s_1 s_2 s_3}} \quad /12/$$

Оба треугольника совпадают при  $a=1$ , то есть если

$$\rho = \mu \frac{\sqrt{s_1 s_2 s_3}}{c_1 c_2 c_3}, \quad /13/$$

что мы будем считать выполненным для удобства построения геометрического места частиц при  $\rho = \text{const}$ , когда ограничение /13/ не приводит к потере общности рассмотрения.

Тогда точки  $P_{jk}$  являются положениями парных ударов  $m_j$  и  $m_k$  при угле  $\phi_{i,jk}$  /или  $\phi_{jk,i}$  /, а точки  $P_i$  задают положение третьей частицы  $m_i$  в момент этого удара. При произвольном значении угла

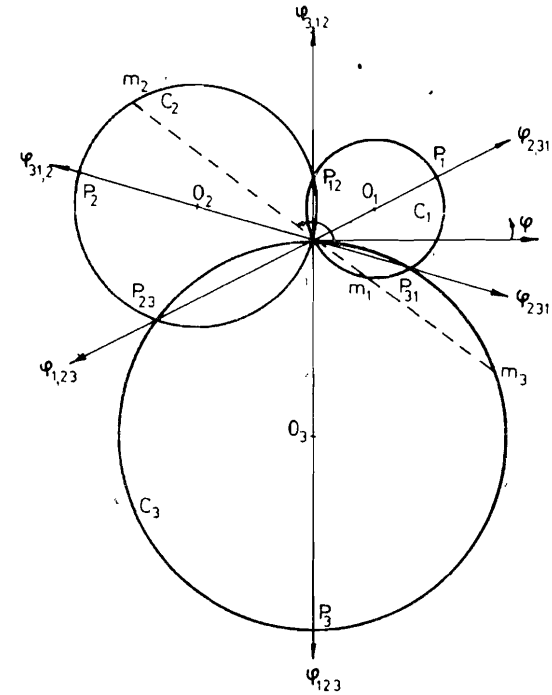


Рис.3. Геометрическое место частиц при  $\rho = \text{const}$ .

$\phi$  частицы находятся в точках пересечения прямой, проведенной под углом  $\phi$  через точку 0, с окружностями  $C_i$ . Правильное значение координат  $x_i(\phi)$  можно получить из отрезков /рис.3/ путем умножения на коэффициент подобия  $a$  /12/. Вращая эту прямую линию на всевозможные углы  $\phi \in [0, 2\pi]$  мы опишем непрерывным образом все конфигурации системы трех частиц на прямой OX. Из-за наличия ориентации на OX при этом физически эквивалентные конфигурации /например упорядочения  $(m_1, m_2, m_3)$  и  $(m_3, m_2, m_1)$  / учитываются дважды.

Практически построение геометрического местоположения частиц удобно начать с построения треугольника  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , биссектрисы которого задают указанные выше секторы. Окружности  $C_i$  можно построить как проходящие через три точки  $O, P_{ij}$  и  $P_{ik}$ , рис.4. Необходимые доказательства существования и единственности этого построения легко получить средствами элементарной геометрии.

Следует отметить, что изменение гиперрадиуса  $\rho$  не влияет на угловые соотношения на всех рисунках, а меняет только масштабы.

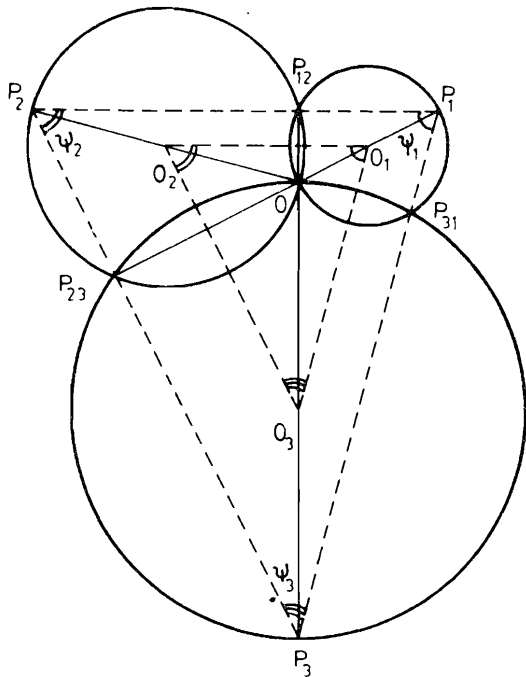


Рис.4. Построение геометрического места частиц.

#### 4. РАССТОЯНИЕ $r_{ij}$ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

При помощи /3/, свойств /5/-/7/ углов  $\Psi_i$  и соотношений /11/ для углов парных ударов нетрудно получить выражения

$$r_{ij} = \rho \left( \frac{s_k}{s_i s_j} \right)^{1/2} | \sin(\phi - \phi_{ij,k}) | \quad /14/$$

для расстояний

$$r_{ij} = |x_i - x_j| \quad /15/$$

между частицами при заданных  $(\rho, \phi)$ . Однотипные выражения /14/ являются частными случаями формул /7/, которые при движении по прямой ( $\theta \equiv 0$ ) упрощаются.

Введем нужные для дальнейшего отношения /3-4/:

$$\kappa_{ij}^{(k)} = \frac{r_{kj}(\phi)}{r_{ik}(\phi)} = \frac{s_i}{s_j} \left| \frac{\sin(\phi - \phi_{i,kj})}{\sin(\phi - \phi_{ik,j})} \right| \quad /16/$$

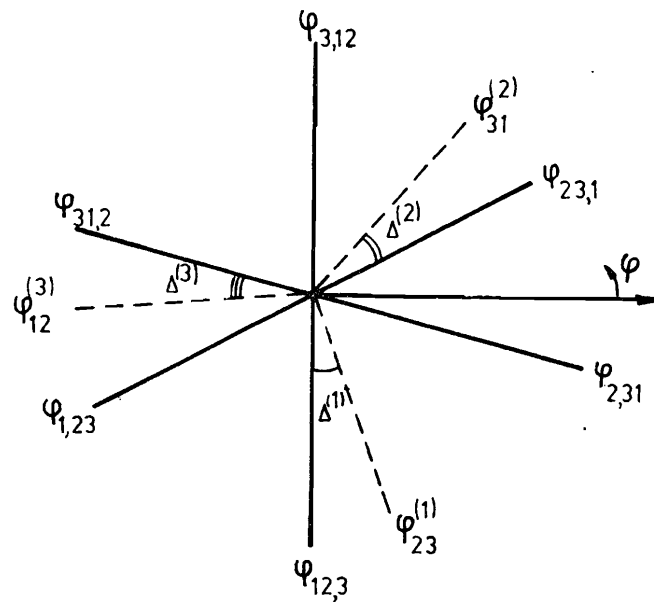


Рис.5. Секторы  $(\phi_{i,kj}, \phi_{ik,j})$  и либрационные направления.

Их следует рассматривать как функции  $\phi$  только в соответствующем секторе  $\phi \in (\phi_{i,kj}, \phi_{ik,j})$  /см.рис.5/, где они принимают вид

$$\kappa_{ij}^{(k)} = \frac{s_i}{s_j} \frac{\sin \Delta \phi_{i,kj}}{\sin \Delta \phi_{ik,j}} \geq 0$$

при  $\Delta \phi_{i,kj} = \phi - \phi_{i,kj}$ ,  $\Delta \phi_{ik,j} = \phi_{ik,j} - \phi$ .

#### 5. ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ

Как было показано в /7/, в рассматриваемом случае гамильтониан системы  $H = T + V$  есть

$$H = \frac{1}{2\mu} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} \right) + \frac{a(\phi)}{\rho} \quad /17/$$

При помощи полученных в настоящей работе соотношений  $a$  можно записать в виде

$$a(\phi) = \epsilon \gamma(\phi) \quad /18/$$

где

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon^{(m)} = -\mu M \sqrt{s_1 s_2 s_3} & \text{для гравитации,} \\ \epsilon^{(e)} = (e_1 e_2 e_3) \frac{2}{3} \sqrt{s_1 s_2 s_3} & \text{для электрических сил,} \end{cases} \quad /19/$$

а

$$\gamma(\phi) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i |\sin(\phi - \phi_{i,jk})|^{-1}, \quad /20/$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} \gamma_i^{(m)} = \sigma_i^{-2} s_i^{-2} & \text{для гравитации,} \\ \gamma_i^{(e)} = (e_j e_k / e_i^2) \frac{1}{3} s_i^{-1} & \text{для электрических сил.} \end{cases} \quad /21/$$

Отражением равенства инертной и гравитационной масс является тот факт, что  $\alpha(\phi)$  для гравитации с точностью до несущественного общего множителя выражается в чисто геометрических терминах /через углы  $\Psi_i$ /. Это не имеет места в электрической задаче.

Качественно вид функций  $\alpha(\phi) = \alpha(\phi + \pi)$  в трех секторах значений угла  $\phi$  показан на рис.6а,б в случае гравитационного и электрического взаимодействий при равных знаках зарядов.

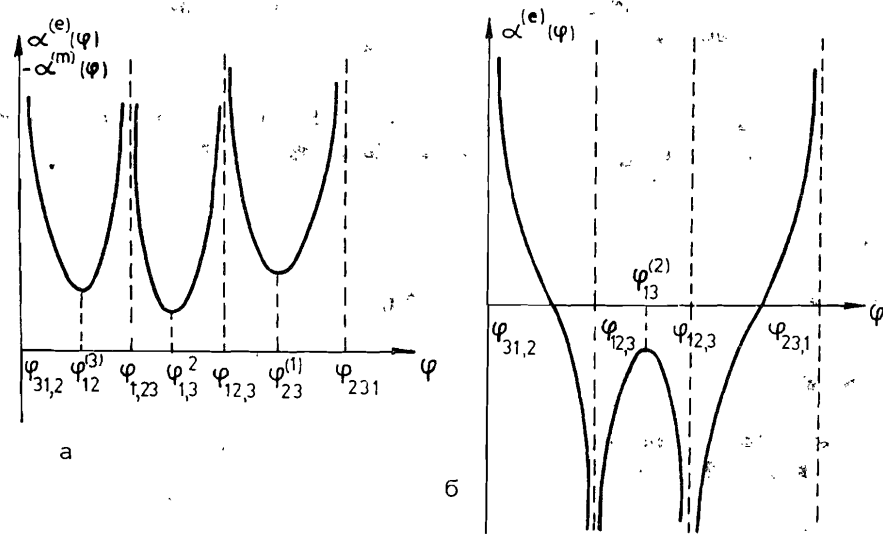


Рис.6. Вид функций: а/  $\alpha^{(e)}(\phi)$  /при  $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \pm)$  / и  $-\alpha^{(m)}(\phi)$ ; б/  $\alpha^{(e)}(\phi)$  при  $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \mp, \pm)$

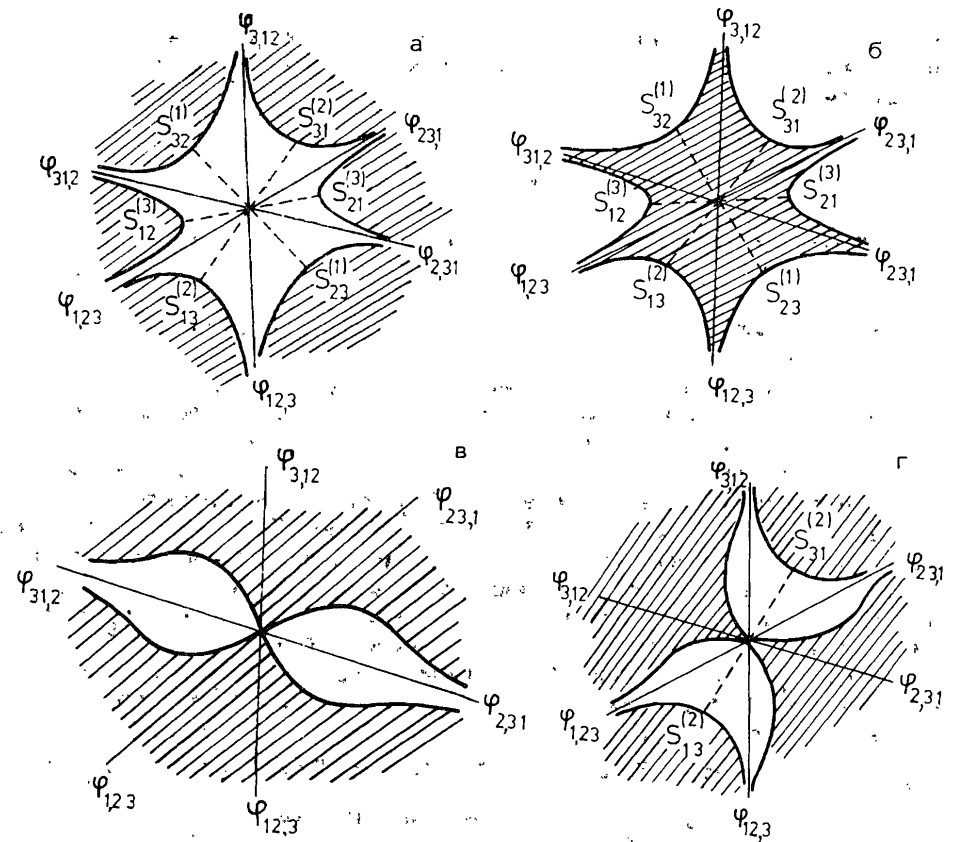


Рис.7. Кривые нулевой скорости /T=0/: а/ при E<0 для гравитирующих частиц; б/ при E>0 для  $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \pm, \pm)$ ; в/ при E<0 для  $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \mp, \pm)$  г/ при E>0 для  $(e_1, e_2, e_3) = (\pm, \mp, \pm)$ .

### 6. КРИВЫЕ НУЛЕВОЙ СКОРОСТИ

В классических работах Хилла и Болина /см. в<sup>1,3-5</sup>/ была показана большая эффективность построения кривых нулевых скоростей /T=0/ для качественного анализа возможных траекторий в ограниченной задаче трех частиц. В нашем случае эти кривые описываются уравнением

$$z(\phi) = \rho E = \alpha(\phi), \quad /22/$$

где E - значение энергии системы трех частиц в системе центра масс. Кривые выглядят по-разному в зависимости от знака E, они показаны на рис.7а-г, где в каждом случае заштрихована класси-

чески запрещенная область. По этим фигурам можно также судить о сложности асимптотики, волновых функций для квантового варианта задачи.

### 7. НАПРАВЛЕНИЯ ЛИБРАЦИОННОГО ТИПА $\phi_{ij}^{(k)}$

Направления, в которых  $\alpha(\phi)$  имеет экстремум, то есть  $\alpha'(\phi) = 0$ ,

/23/

обозначим через  $\phi_{ij}^{(k)}$  и назовем направлениями либрационного типа /см.рис.6 а,б/.

Это название связано с наличием экстремумов у эффективного потенциала /включающего центробежный член/ системы гравитирующих частиц, движение которых происходит по вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  прямой линии. Неустойчивые равновесные положения системы, задаваемые этими экстремумами, определяют либрационные решения Эйлера  $L_{1,2,3}^{1-5}$  задачи. При этом условие экстремума эффективного потенциала по переменной  $\phi$  точно совпадает с /23/ и не зависит от  $\omega$ . В нашем случае  $\omega \equiv 0$  и  $V(\rho, \phi)$  не имеет экстремума по  $\rho$ , а от либрационных точек Эйлера остаются только направления  $\phi_{ij}^{(k)}$ . На рис.7а,г они определяются точками  $S_{ij}^{(k)}$ .

В традиционном подходе  $L_{1,2,3}^{1-5}$  точки находятся при помощи откошений  $\kappa_{ij}^{(k)}$  /16/, которые при  $\phi = \phi_{ij}^{(k)}$  должны удовлетворять уравнению пятой степени ( $i \neq j \neq k \neq i$ ):

/24/

$$(m_i + m_k) \kappa^5 + (3m_i + 2m_k) \kappa^4 + (3m_i + m_k) \kappa^3 - (m_k + 3m_j) \kappa^2 - (2m_k + 3m_j) \kappa - (m_k + m_j) = 0.$$

При  $m_i \geq 0$  /24/ имеет единственный положительный корень /4/, определяющий  $L_{1,2,3}$ . Это уравнение эквивалентно /23/, которое для гравитационной задачи имеет вид

$$\sigma_{23,1} \frac{c_1}{s_1^2} \frac{\cos(\phi - \phi_{231})}{\sin^2(\phi - \phi_{23,1})} + \sigma_{31,2} \frac{c_2}{s_2^2} \frac{\cos(\phi - \phi_{31,2})}{\sin^2(\phi - \phi_{31,2})} + \sigma_{12,3} \frac{c_3}{s_3^2} \frac{\cos(\phi - \phi_{12,3})}{\sin^2(\phi - \phi_{12,3})} = 0.$$

Здесь  $\sigma_{ij,k} = \pm 1$  есть знак  $\sin(\phi - \phi_{ij,k})$  в соответствующем секторе. Если ввести удобные для вычисления углы /см.рис.5/:

$$\Delta^{(i)} = \phi_{ik}^{(i)} - \phi_{ij,k}^{(i)}, \quad 0 \leq \Delta^{(i)} \leq \Psi_i, \quad /25/$$

то уравнение для  $\phi_{jk}^{(i)}$  переходит в уравнение для  $\Delta^{(i)}$ :

$$\gamma_i \frac{\cos(\Delta^{(i)} + \Psi_{i+1})}{\sin^2(\Delta^{(i)} + \Psi_{i+1})} - \gamma_{i+1} \frac{\cos(\Delta^{(i)} - \Psi_i)}{\sin^2(\Delta^{(i)} - \Psi_i)} + \gamma_{i+2} \frac{\cos \Delta^{(i)}}{\sin^2 \Delta^{(i)}} = 0, \quad /26/$$

где значения индексов берутся по mod 3.

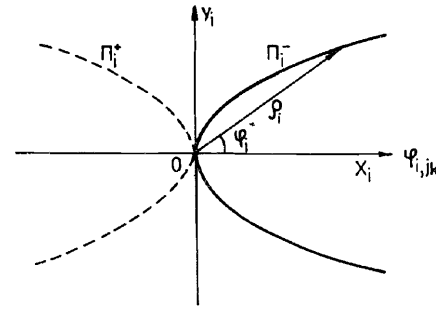


Рис.8. Параболы  $\Pi_i^\pm$ .

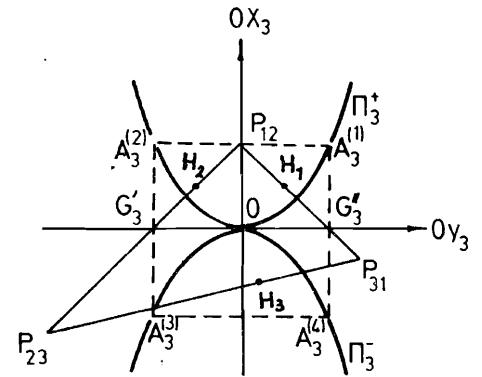


Рис.9. Построение парабол  $\Pi_i^\pm$  по треугольнику  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ .

Эти уравнения можно легко решить графически, если заметить, что в полярных координатах  $(\rho_i, \phi_i)$  уравнение

$$\rho_i = \pm a_i \frac{\cos \phi_i}{\sin^2 \phi_i},$$

где  $\phi = \phi - \phi_{jk,i}$ , а  $a_i = \cos \Psi_i / \sin^2 \Psi_i$  задает параболы  $\Pi_i^\pm$  /рис.8/. В декартовых координатах уравнение этих парабол есть  $y_i^2 = \pm a_i x_i$ .

Осями  $OX_i$  для парабол  $\Pi_i^\pm$  служат направления  $\phi_{jk,i}$ , а перпендикулярные оси  $OY_i$  пересекают  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  в точках  $G_1', G_2', G_3'$ , рис.9. Нетрудно видеть, что если  $OH_i$  являются перпендикулярами к сторонам треугольника, то  $\angle P_{ij}OH_i = \angle P_{ij}OH_j = \Psi_k$  ( $i \neq j \neq k \neq i$ ). Так как

$$x_i = OP_{jk} = \frac{\mu}{\cos \Psi_i}, \quad y_i = OG_i'' = \frac{\mu}{\sin \Psi_i}$$

удовлетворяют уравнению

$$y_i^2 = \mu^2 \gamma_i x_i,$$

то можно считать /включив коэффициент подобия  $\mu^2$  в  $a_i$ /, что параболы  $\Pi_i^\pm$  проходят через точки  $A_i^{(1,2,3,4)}$  прямоугольника, показанного на рис.9. Таким образом,  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  определяет однозначно параболы  $\Pi_i^\pm$ .

Считая, что направления  $\phi_{ij}^{(k)}$  задаются в каждом секторе точкой пересечения соответствующей параболы  $\Pi_i^\pm$  /которая отвечает значению  $\sigma_k = \sigma_{ij,k}$  одного знака/ с кривой, получающейся в результате сложения парабол  $\Pi_i^\pm; \Pi_j^\pm$  /имеющих одинаковые  $\sigma_i = \sigma_j = -\sigma_k$ /, при-

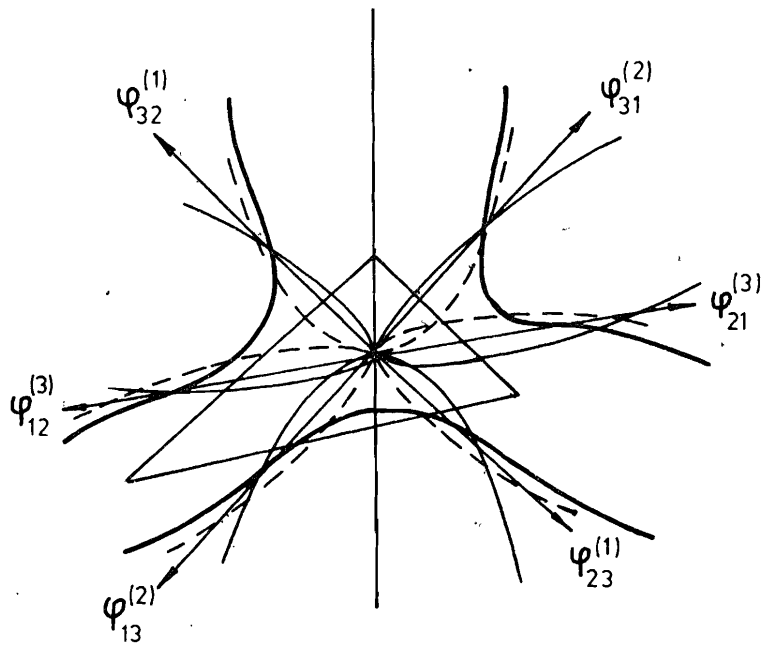


Рис.10. Построение либрационных направлений.

ходим к геометрическому решению уравнения /25/, которое показано на рис.10.

В случае электрического взаимодействия параболы  $\Pi_i^\pm$  не определяются однозначно треугольником  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , так как согласно /18/-/21/ они зависят от зарядов  $e_i$ . Это нарушает описанное для случая гравитации простое построение парабол  $\Pi_i^\pm$ .

### 8. ХАРАКТЕРНЫЕ СЛУЧАИ СООТНОШЕНИЙ МАСС $m_1, m_2, m_3$

Известно, что в задаче трех частиц имеется три характерных случая соотношений масс. В каждом из них рассмотренная нами геометрия задачи имеет свои специфические черты.

А. Случай трех сравнимых по величине масс. В нем

$$m_i = m(1 + \delta_i), \quad |\delta_i| \ll 1. \quad /27/$$

Тогда с точностью до членов  $O_2(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  получаем

$$\mu \approx \frac{m}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{3} \right) \leq m. \quad /28/$$

$$\Psi_1 \approx \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{348} (2\delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \quad /29/$$

и для гравитационной задачи из /26/ находим

$$\Delta^{(i)} \approx \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{348} (29\delta_1 + 14\delta_2 - 43\delta_3). \quad /30/$$

При данном соотношении масс треугольник  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  близок к равностороннему, так же, как и треугольник  $\Delta(O_1, O_2, O_3)$ .

Б. Случай двух сравнимых по массе тяжелых частиц и одной легкой частицы /астероидный случай в гравитации,  $H_2^+$  - молекула и т.д. в электрической задаче/. Пусть, например,

$$m_{1,2} = m(1 + \delta_{1,2}), \quad |\delta_{1,2}| \ll 1; \quad m_3 = m\delta_3, \quad 0 \leq \delta_3 \ll 1. \quad /31/$$

Тогда с точностью до высших поправок по  $\delta_{1,2,3}$

$$\mu = m \left( \frac{\delta_3}{2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_3}{4} \right), \quad /32/$$

то есть в разложении  $\mu(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  выделяется неаналитическая, дробно-степенная особенность по  $\delta_3$ , а оставшиеся аналитические в нуле по  $\delta_{1,2,3}$  множители разлагаются в ряды Тейлора.

Это объясняет, почему нельзя получать результаты для общей задачи трех частиц путем аналитического продолжения результатов из ограниченной задачи трех частиц  $^{1-5/}$ . Видна роль приведенной массы системы как независимого от ударов источника неаналитических особенностей в задаче. По-видимому, впервые такого типа особенности были обнаружены Пуанкаре при поиске дополнительного первого интеграла в ограниченной задаче трех частиц. Наше рассмотрение позволяет, очевидно, связать отсутствие аналитических по  $m_1$  и  $m_2$  дополнительных интегралов с их зависимостью от приведенной трехчастичной массы  $\mu$ . Этот вопрос нуждается в более детальном анализе.

Имея в виду разложения типа /32/, мы получаем с точностью до  $O_{3/2}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

$$\Psi_1 \approx \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\delta_3}{2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{9\delta_1 - 3\delta_2 + \delta_3}{12} \right),$$

$$\Psi_2 \approx \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\delta_3}{2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{-3\delta_1 + 9\delta_2 + \delta_3}{12} \right), \quad /33/$$

$$\Psi_3 \approx (2\delta_3)^{1/2} \left( 1 - \frac{3\delta_1 + 3\delta_2 + 5\delta_3}{12} \right).$$



Для гравитационной задачи из /26/ находим с точностью  $O_1(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

$$\Delta^{(1)} \approx \frac{\pi}{2} - (2\delta_3)^{1/2}, \quad \Delta^{(2)} \approx (2\delta_3)^{1/2}, \quad \Delta^{(3)} \approx \left(\frac{\delta_3}{2}\right)^{1/2}. \quad /34/$$

При данном соотношении масс треугольник  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  с точностью до  $O_{3/2}(\delta_1)$  равнобедрен с тупым углом при вершине  $P_{12}$ , а  $\Delta(O_1, O_2, O_3)$  равнобедрен с острым углом при вершине  $O_3$ .

В. Случай одной тяжелой и двух легких частиц /планетарный случай, атомы  $H^+, He$  и т.д./.

1. Пусть, например,

$$m_{1,2} = m\delta_{1,2}, \quad 0 \leq \delta_{1,2} \ll 1; \quad m_3 = m(1 + \delta_3), \quad |\delta_3| \ll 1. \quad /35/$$

Тогда после выделения неаналитических множителей получаем, что

$$\mu \approx m(\delta_1 \delta_2)^{1/2} \left(1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \ll m \quad /36/$$

с точностью до  $O_2(\delta_3)$  не зависит от  $\delta_3$ , а

$$\operatorname{tg} \Psi_1 \approx \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \gtrless 1,$$

$$\operatorname{tg} \Psi_2 \approx \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \lesseqgtr 1, \quad /37/$$

$$\operatorname{tg} \Psi_3 \approx (\delta_1 \delta_2)^{-1/2} \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3}{2}\right) \gg 1.$$

При данном соотношении масс угол  $\angle P_{23} P_{12} P_{31}$  у вершины треугольника  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  является острым,  $\Psi_3 \approx \frac{\pi}{2} - (\delta_1 \delta_2)^{1/2}$ , однако геометрия задачи не определена, если дополнительно не указать и соотношение масс легких частиц.

2. При сравнимых по массе легких частицах, например, если

$$m_{1,2} = m(1 + \delta_{1,2}), \quad |\delta_{1,2}| \ll 1; \quad m_3 = \frac{m}{\delta_3}, \quad 0 < \delta_3 \ll 1, \quad /38/$$

геометрия задачи фиксирована хорошо и с точностью до  $O_2(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

$$\mu \approx m \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2\delta_3}{2}\right) \approx m, \quad /39/$$

$$\Psi_1 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1 - \delta_2 + 2\delta_3}{4}, \quad \Psi_2 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{-\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3}{4},$$

$$\Psi_3 \approx \frac{\pi}{2} - \delta_3. \quad /40/$$

Треугольник  $\Delta(O_1, O_2, O_3)$  является почти равнобедренным и прямоугольным, а  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  - равнобедренным с острым углом у вершины  $P_{12}$ .

Для либрационных направлений в самом низком порядке получаем

$$\Delta^{(1)} \approx \left(\frac{\delta_3}{12}\right)^{1/3}, \quad \Delta^{(2)} \approx \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\delta_3}{12}\right)^{1/3}, \quad \Delta^{(3)} = O_2(\delta_3). \quad /41/$$

В последующих работах мы применим изложенные здесь результаты для детального изучения динамики движения системы из трех частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hagihara Y. Celestial Mechanics. Cambridge-Massachusetts-London, MIT Press, 1970, vol.1-2; Tokio Press, Tokio, 1976, vol.3-5.
2. Wintner A. Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1941.
3. Pollard H. Mathematical Introduction to Celestial Mechanics. Prentice-Hall, New Jersey, 1965; Pars L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London, 1964.
4. Charlier C.L. Die Mechanik des Himmels. Walter de Gruyter & Co, Berlin-Leipzig, 1927.
5. Голубев В.Г., Гребников Е.А. Проблема трех тел в небесной механике. Изд-во МГУ, М., 1985.
6. Delves L.M. Nucl.Phys., 1959, 9, p.391; 1960, 20, p.275.
7. Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya. JINR, E2-86-119, Dubna, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 марта 1986 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Физиев П.П., Физиева Ц.Я.

P2-86-130

Геометрия задачи трех частиц на прямой линии

Рассматривается модификация координат Дельвеса в задаче трех частиц на неподвижной прямой линии, которые взаимодействуют между собой при помощи двух-частичных потенциалов  $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$ . Вводится ряд новых геометрических объектов, связанных с этой задачей: треугольник положений парных ударов  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , геометрическое местоположение трех частиц при фиксированном гиперрадиусе - три окружности  $C_1$  и т.д. В геометрических терминах описаны тройной и парные удары в системе, кривые нулевой скорости Хилла для данного случая, а также либрационные направления. Излагается геометрическое решение предложенного уравнения для либрационных направлений, а также решение этого уравнения с помощью степенных рядов при трех характерных соотношениях масс частиц: три сравнимые по величине массы, две тяжелые и одна легкая частица, одна тяжелая и две легкие частицы. Обсуждается роль приведенной массы трехчастичной системы как источника неаналитических особенностей в задаче, не зависящих от ударов частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Сандуковской Г.Г.

Fiziev P.P., Fizieva Ts.Ya.

P2-86-130

Geometry of the Three-Particle Problem on the Line

A modification of the Delves coordinates is considered for the problem of three particles on a fixed straight line, that interact with each other through the two-particle potentials  $V_{ij} \sim r_{ij}^{-1}$ . A number of new geometrical objects related to this problem is introduced: the triangle of positions of pair collisions  $\Delta(P_{12}, P_{23}, P_{31})$ , geometrical positions of three particles at fixed hyperradius (three circles  $C_1$ ), etc. The triple and pair collisions in the system, Hill's curves of the zero velocity for the given case and librational directions are described in geometrical terms. The geometrical solution of the proposed equation for librational directions is expounded as well as the solution of this equation by the power series at three typical sets of values of particle masses: three masses comparable in magnitude, two heavy and one light particle and one heavy and two light particles. The role is discussed of the reduced mass of the three-particle system as a source of nonanalytical singularities in the problem independent of those caused by particle collisions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986