сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-86-121

Г.М.Десимиров, Р.Т.Колева*

О КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ОПИСАНИИ РАССЕЯНИЯ НУКЛОНОВ НА МАЛЫЕ УГЛЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ (ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

* Институт космических исследований, София, НРБ

1986

I. Настоящая работа является непосредственным продолжением предыдущей работы одного из авторов /I/. С учетом квазипотенциального уравнения в версии Тодорова с модельным чисто мнимым квазипотенциалом типа Гаусса была введена специфическая техника приближенного расчета и найдены нулевое и первое приближения в смысле этой техники для главного члена амплитуды рассеяния. Ниже мы найдем второе приближение для главного члена. Основные предположения и обозначения даны в работе /I/ и повторяться здесь не будут. Для единства с более новой литературой в квазипотенциальном уравнении (I) из /I/ изменен нормировочный множитель амплитуды рассеяния путем замещения $\pi^2 \to 2(2\pi)^3$.

2. Второе приближение главного члена квазипотенциала - это учет в разложении комплексной экспоненты (I4) из /I/ следующего члена:

$$\frac{1}{2!}\left[i\sum_{k=1}^{n} a_k^{(-)}(x_k - x_{k+1})\right]^2 \qquad (I)$$

под знаком необходимого интегрирования для вычисления интеграла $K^{(n+1)}$. Этот интеграл связан с соответствующим итерированным членом интегрального квазипотенциального уравнения. Для вычисления интеграла $K^{(n+1)}$ имеем представление во втором приближении

$$K_2^{(n+1)} = B^{(n+1)} + iA^{(n+1)} + C^{(n+1)}. \qquad (2)$$

Величины $A^{(n+1)}$, $B^{(n+1)}$ изучались в /I/ и отвечают первому приближению. Нашей задачей в дальнейшем будет определение величины $C^{(n+1)}$. Для нее можно записать

$$C^{(n+1)} = \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x_1-x_2)\theta(x_2-x_3)\ldots\theta(x_n-x_{n+1}) \times \qquad (3)$$
$$\times e^{-\frac{1}{4a}\sum_{k=1}^{n+1}x_k^2}\left[i\sum_{s=1}^{n}a_s^{(-)}(x_s-x_{s+1})\right]^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_{n+1}.$$

Здесь a – один из двух параметров чисто мнимого гауссовского квазипотенциала (2) из /1/, $a_k^{(-)}$ – учитываемые малые корни (10) из /1/, зависящие от угла рассеяния и энергии.

Вводим обозначение

$$L_{kj}^{(n+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x_1-x_2)\theta(x_2-x_3)\cdots\theta(x_n-x_{n+1})\times \tag{4}$$

$$\times e^{-\frac{1}{4a}\sum_{\ell=1}^{n+1}x_\ell^2}\, x_k x_{k+j}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n+1}$$

$$k=1,2,\ldots,n+1,$$

$$j=0,1,2,\ldots,n+1-k.$$

Тогда для $C^{(n+1)}$ получаем следующую структуру:

$$C^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\left(a_k^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)^2 L_{k,0}^{(n+1)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)\left(a_{k+1}^{(-)}-a_k^{(-)}\right)L_{k,1}^{(n+1)} - \tag{5}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)\left(a_{k+2}^{(-)}-a_{k+1}^{(-)}\right)L_{k,2}^{(n+1)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=3}^{n+1-k}\left(a_k^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)\left(a_{k+j}^{(-)}-a_{k+j-1}^{(-)}\right)L_{k,j}^{(n+1)}$$

$$\left(a_0^{(-)} = a_{n+1}^{(-)} = 0\right).$$

Для введенных выше интегралов $L_{k,j}^{(n+1)}$ можно найти следующее представление:

$$L_{k,0}^{(n+1)} = \frac{2a\left(\sqrt{2a\pi}\right)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{4a\left(\sqrt{a\pi}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}\left\{V_k^{(n-1)} - 2V_{k-1}^{(n-1)} + V_{k-1}^{(n-1)}\right\}, \tag{6}$$

$$k=1,2,\ldots,n+1,$$

$$L_{k,1}^{(n+1)} = \frac{4a\left(\sqrt{a\pi}\right)^{n+1}}{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}\left\{V_k^{(n-1)} + V_{k-1}^{(n-1)} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}W_{k-1,1}^{(n-1)}\right\} \tag{7}$$

$$k=1,2,\ldots n,$$

$$L_{k,2}^{(n+1)} = \frac{16a\left(\sqrt{a\pi}\right)^{n+1}}{\pi^2}\left\{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}V_k^{(n-1)} + W_{k-1,1}^{(n-1)} + W_{k,1}^{(n-1)} - W_{k-1,2}^{(n-1)}\right\}, \tag{8}$$

$$k=1,2,\ldots,n-1,$$

$$L_{k,j}^{(n+1)} = \frac{16a\left(\sqrt{a\pi}\right)^{n+1}}{\pi^2}\left\{W_{k,j-1}^{(n-1)} - W_{k-1,j}^{(n-1)} + W_{k-1,j-1}^{(n-1)} - W_{k,j-2}^{(n-1)}\right\}. \tag{9}$$

$$k=1,2,\ldots,n-2$$

$$j=3,4,\ldots,n+1-k.$$

В формулах (6)-(9) основные интегралы $L_{k,j}^{(n+1)}$ выражены с помощью интегралов низшей кратности:

$$V_k^{(n-1)} = \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\Phi(x)\right]^{k-1} e^{-3x^2}\left[1+\Phi(x)\right]^{n-k-1}dx \tag{10}$$

$$k=0,1,2,\ldots n-1$$

$$\left(V_{-p}^{(n-1)} = V_{n+p}^{(n-1)} = 0,\ p=0,1,2,\ldots\right),$$

$$W_{k,j}^{(n-1)} = \frac{1}{(k-1)!(j-1)!(n-k-j-1)!}\cdot \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, e^{-2x^2}\left[1+\Phi(x)\right]^{n-k-j-1}\int_x^{\infty}\left[\Phi(y)-\Phi(x)\right]^{j-1}\cdot e^{-2y^2}\left[1-\Phi(y)\right]^{k-1}dy.$$

$$k=1,2,\ldots n-2$$

$$j=1,2,\ldots n-k-1$$

Выше всюду $\Phi(x)$ - функция ошибок Гаусса /3/ . Она очень быстро стремится к своему асимптотическому пределу $\Phi(x)\to 1, x\to\infty$, в связи с чем интегралы (I0) и (II) быстро сходятся и подходят для численных расчетов. Вид этих интегралов можно получить методом математической индукции, следуя работе Киношиты /2/ .

Имея в виду (I0), (II), получаем

$$
\begin{aligned}
C^{(n+1)} = &-\frac{a(2\sqrt{a\pi})^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n+1}\left(a_k^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)^2 - \\
&-\frac{2a(\sqrt{a\pi})^{n+1}}{(\sqrt{\pi})^3}\sum_{k=1}^{n-1}V_k^{(n-1)}\Big[3\left(a_{k+2}^{(-)}-a_k^{(-)}\right)^2 - \\
&-2\left(a_{k+2}^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)^2-6\left(a_{k+1}^{(-)}-a_k^{(-)}\right)^2+3\left(a_{k+1}^{(-)}-a_{k-1}^{(-)}\right)^2\Big] - \\
&-\frac{16a(\sqrt{a\pi})^{n+1}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-k-1}W_{k,j}^{(n-1)}\left(a_{k+1}^{(-)}-2a_k^{(-)}+a_{k-1}^{(-)}\right)\times \\
&\times\left(a_{k+j+2}^{(-)}-2a_{k+j+1}^{(-)}+a_{k+j}^{(-)}\right).
\end{aligned}
\tag{I2}
$$

С помощью найденных формул можно записать для второго приближения амплитуды рассеяния

$$T_2(\vec{p},\vec{q}) = Re\,T_2(\vec{p},\vec{q}) + i\,Im\,T_2(\vec{p},\vec{q}), \tag{I3}$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - импульсы в начальном и конечном состоянии рассеивающихся упругим образом друг на друге нуклонов с одинаковыми массами. Из /I/ известно, что

$$Re\,T_2(\vec{p},\vec{q}) = Re\,T_1(\vec{p},\vec{q}), \tag{I4}$$

где $T_1(\vec{p},\vec{q})$ - амплитуда рассеяния в первом приближении согласно /I/, а для мнимой части получаем

$$Im\,T_2(\vec{p},\vec{q}) = Im\,T_1(\vec{p},\vec{q}) + \sum_{n=1}^{\infty}M_{n+1}, \tag{I5}$$

где

$$
\begin{aligned}
M^{(n+1)} = &-sg\frac{e^{\frac{at}{n+1}}\,ap^2}{(n+1)\prod_{\ell=1}^{n}(\beta_\ell^{(n)})}\left(-\frac{g_0\sqrt{(\vec{p})^2+m^2}}{16\pi a p}\right)^n \times \\
&\times\left\{\frac{2^n}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n+1}\left(\beta_k^{(n)}-\beta_{k-1}^{(n)}\right)^2 + \right. \\
&+\frac{1}{(\sqrt{\pi})^3}\sum_{k=1}^{n-1}V_k^{(n-1)}\Big[3\left(\beta_{k+2}^{(n)}-\beta_k^{(n)}\right)^2 - \\
&-2\left(\beta_{k+2}^{(n)}-\beta_{k-1}^{(n)}\right)^2-6\left(\beta_{k+1}^{(n)}-\beta_k^{(n)}\right)^2+3\left(\beta_{k+1}^{(n)}-\beta_{k-1}^{(n)}\right)^2\Big] + \\
&+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-k-1}W_{k,j}^{(n-1)}\left(\beta_{k+1}^{(n)}-2\beta_k^{(n)}+\beta_{k-1}^{(n)}\right)\cdot \\
&\left.\left(\beta_{k+j+2}^{(n)}-2\beta_{k+j+1}^{(n)}+\beta_{k+j}^{(n)}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{I6}
$$

Здесь
$$\beta_k^{(n)} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}+4\frac{(n+1-k)k}{(n+1)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\,, \quad p=|\vec{p}|,$$
$$a_k^{(-)} = p\left(\beta_k^{(n)}-\beta_0^{(n)}\right), \quad k=1,2,\ldots,n+1$$
$$n=1,2,\ldots\infty.$$

θ - угол рассеяния в системе центра масс. Итак, второе приближение (формулы (I3)-(I6)) найдено.

3. Оказывается, что для $n =$ 1,2,3,4,5 можно вычислить интегралы $V_k^{(n-1)}$ и $W_{k,j}^{(n-1)}$ в явном виде, и таким образом можно привести, при соответствующей степени точности, искомую поправку $C^{(n+1)}$ (3) также в виде явной формулы. Пользуясь основными свойствами и формулами для гауссовской функции ошибок $\Phi(x)$ и для обобщенной функции ошибок $\Phi(a;x)$ /3/, последовательно получаем все необходимые нетривиальные интегралы

$$
\begin{aligned}
&\underline{n=2:}\ V_1^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{3}\\
&\underline{n=3:}\ V_1^{(2)}=V_2^{(2)}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\ ;\quad W_{1,1}^{(2)}=\frac{\pi}{4}\\
&\underline{n=4:}\ V_1^{(3)}=V_3^{(3)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}\\
&\qquad V_2^{(3)}=\sqrt{\frac{\pi}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}\\
&\qquad W_{1,1}^{(3)}=W_{2,1}^{(3)}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\\
&\qquad W_{1,2}^{(3)}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\\
&\underline{n=5:}\ V_1^{(4)}=V_4^{(4)}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}\\
&\qquad V_2^{(4)}=V_3^{(4)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{15}}\\
&\qquad W_{1,1}^{(4)}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\\
&\qquad W_{1,2}^{(4)}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&\qquad W_{2,1}^{(4)}=\frac{\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\ ;\ W_{1,3}^{(4)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&\qquad W_{2,2}^{(4)}=\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
&\qquad W_{3,1}^{(4)}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}+\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\ .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Подставляя их в (16), находим простые выражения для членов $\dot{M}^{(n+1)}$. Для примера запишем:

$$
\begin{aligned}
&\underline{n=1:}\ M^{(2)}=s g a p^2 e^{\frac{at}{2}}\left(\frac{g_0\sqrt{(\vec{p})^2+m^2}}{16\pi a p}\right)\left(1-\beta_0^{(1)}\right)^2\\
&\underline{n=2:}\ M^{(3)}=-s g a p^2\,\frac{2e^{\frac{at}{3}}}{9(\beta_1^{(2)})^2}\left(\frac{g_0\sqrt{(\vec{p})^2+m^2}}{16\pi a p}\right)^2\cdot\\
&\qquad\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)\left(\beta_0^{(2)}-\beta_1^{(2)}\right)^2\\
&\underline{n=3:}\ M^{(4)}=s g a p^2\,\frac{e^{\frac{at}{4}}}{2(\beta_1^{(3)})^2}\left(\frac{g_0\sqrt{(\vec{p})^2+m^2}}{16\pi a p}\right)^3\cdot\\
&\qquad\left\{\frac{1}{3}\left[\left(\beta_1^{(3)}-\beta_0^{(3)}\right)^2+\left(1-\beta_1^{(3)}\right)^2\right]+\right.\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\left(1-2\beta_1^{(3)}+\beta_0^{(3)}\right)^2+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[3\left(1-\beta_0^{(3)}\right)^2-\right.\\
&\qquad\left.\left.-6\left(1-\beta_1^{(3)}\right)^2-2\left(\beta_1^{(3)}-\beta_0^{(3)}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Получение остальных членов для $n=4$ и для $n=5$ не представляет труда. Мы их здесь не выписываем, они будут сложнее и с похожей на (18) структурой.

Численная оценка показывает, что с точностью до явно получаемых членов до $n=5$ наша поправка к мнимой части получается с точностью до нескольких процентов.

4. В заключение сделаем несколько замечаний. Численные расчеты возможны всегда под контролем следующего приближения, т.е. учет точности первого приближения невозможен без нахождения второго. На основании прежней /1/ и настоящей работ возможны численные применения, и это будет сделано в последующей работе для широкого интервала энергий. Как и /1/, данная работа преследует только методические цели. Потенциал Гаусса является основным модельным и для задач с учетом спина, а выбор варианта квазипотенциального уравнения – вопрос весьма важный. Видно, что версия квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе, предложенная Тодоровым (см. например, /8/), выявляет свою эффективность и в задачах рассеяния. Показана высокая симметрия, получаемая в основных задачах, что для расчетов весьма важно. Следующим шагом в развитии данной методики может быть учет неглавных членов, которые не имеются в виду ни в /1/, ни в настоящей работе.

Вопрос о связи между результатами, получаемыми в различных версиях квазипотенциального подхода несомненно интересный. Как хорошо известно, при применении оригинальной версии квазипотенциального подхода Логунова и Тавхелидзе затруднения вызывает кинематический корень $\sqrt{(\vec{k})^2+m^2}$, находящийся под знаком интеграла. Обычно в задачах высокоэнергетического рассеяния делают приближения, в силу которых корень выносят за знак интеграла и пренебрегают квадратом массы m^2 . Если такое пренебрежение квадратом массы будет сделано в уравнении Тодорова (I) из работы [1], что по сути дела не нужно, то результаты обеих версий квазипотенциального подхода становятся одинаковыми. Видно удобство уравнения Тодорова, симметрия которого более высокая и поэтому необходимо делать меньше приближений.

Рассматриваемый подход дает для главного члена амплитуды рассеяния как реальную часть (из приближений первого, третьего и т.д. порядка), так и мнимую часть (из нулевого, второго и т.д. порядка). Это обосновано в работе [1]. А как известно, многие авторы встречают серьезные затруднения с вычислением реальной части амплитуды (см., например,[4,5,6,7] и др.). Как видно, в рассматриваемом подходе нет специфических затруднений с вычислением реальной части амплитуды.

Литература

1. Десимиров Г.М. Препринт ОИЯИ, Р2-6034, Дубна, 1971.
2. Kinoshita T. Progr.Theor.Phys., 5, 1950, p.473.
3. Хаджи П.И. Функция вероятности. Изд-во АН МССР, Кишинев, 1971.
4. Hohler G. et al. Z.Physik, 1970, 233, p.430.
5. Kroll P. Nuovo Cim.Lett., 1972, B49, p.745.
6. Bronzan J.B. et al. Phys.Lett., 1974, B49, p.272.
7. Голоскоков С.В. и др. Ядерная физика, 1980, 31, 3, с.741.
8. Тодоров И., Ризов В. Задачата за две тела в квантовата теория. София, "Наука и изкуство", 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1986 года.

Десимиров Г.М., Колева Р.Т. Р2-86-121

О квазипотенциальном описании рассеяния нуклонов на малые углы при высоких энергиях /второе приближение/

Продолжена разработка подхода прямого интегрирования квазипотенциального уравнения в случае применения модельного квазипотенциала гауссовского типа /спиновые эффекты не учитываются/. Главный член амплитуды упругого рассеяния вычислен в приближении второго порядка, которое соответствует способу разложения, предложенному в предыдущей работе. Вводимые приближения применимы в случае упругого рассеяния нуклонов при высоких энергиях на малые углы. В случае чисто мнимого гауссовского квазипотенциала найдена поправка к мнимой части амплитуды рассеяния, при этом реальная часть не изменяется.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Desimirov G.M., Koleva R.T. P2-86-121

On the Quasipotential Description of Small Angle High Energy Nucleon Scattering (the second order approximation)

The direct method for integration of a quasipotential equation in the case of Gauss model type quasipotential (the spin effects are not taken into account) is further developed. The second order approximation of the leading term to the elastic scattering amplitude using the decomposition proposed earlier. The approximations introduced here could be applied for description of the high energy small-angle nucleon elastic scattering. In the case of imaginery Gaussian quasipotential the correction to the imaginary part of scattering amplitude is found. The real part remains unchanged.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986