ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 8568

В.Г.Малышкин

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ $\pi\pi$ - РАССЕЯНИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР ПИОНА

1975

Р2 - 8568

В.Г.Мальшкин*

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ $\pi\pi$ - РАССЕЯНИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР ПИОНА

* Саратовский государственный университет

§ I. В в е д е н и е

До недавнего времени основными методами в изучении $\pi\pi$ -взаимодействий являлись метод дисперсионных уравнений и паде-аппроксимация. Программа получения дисперсионных уравнений для парциальных волн низкоэнергетического $\pi\pi$ -рассеяния была впервые реализована Чу и Мандельстамом /1/, однако уравнения Чу-Мандельстама не обладали решениями, содержащими ρ -мезон /2/, и не учитывали вклады высоких энергий /3/.

Уравнения, свободные от этих недостатков, были предложены в работах /4-7/. Анализ решений показал, что среди них можно выбрать решение, воспроизводящее основные закономерности низкоэнергетического $\pi\pi$ -рассеяния (резонансная δ_1^1 - фаза, большая положительная δ_0^0 -фаза, малая отрицательная δ_0^2 -фаза) /6/.

К недостаткам метода дисперсионных уравнений можно отнести то, что он не связан явно с конкретным предположением о виде взаимодействия. Решения этих уравнений многопараметрические, и для согласия с экспериментом необходимо привлекать дополнительные физические соображения. В частности, важным оказывается учет высокоэнергетических эффектов (коротковолнового отталкивания).

Метод паде-аппроксимации привлекателен тем, что допускает использование в конкретных теоретико-полевых моделях, а, следовательно, связан с вполне определенной динамикой. Впервые этот метод применительно к $\pi\pi$ -взаимодействиям был использован Бессисом и Пустерлой /8/ для лагранжиана $\mathcal{L}_{\pi\pi} = -g(\vec{\pi}^2)^2$. Позже паде-аппроксимации для σ -модели /9/ изучались Бадеваном и Б.Ли [10]. Хотя вычисленные ими массы известных резонансов соответствовали реальным, для длин $\pi\pi$ -рассеяния, а также для ширин резонансов получаются результаты, весьма далекие от эксперимента. Наилучшее приближение к эксперименту дает модель, лагранжиан которой содержит ρ -мезонное поле [11]. При этом, однако, приходится с самого начала отказаться от динамического объяснения ρ -мезона.

В последнее время большое число работ было посвящено описанию $\pi\pi$ -взаимодействий в рамках квантовой теории поля с лагранжианами кирального типа (см., например, [12] там же ссылки на более ранние работы). Поскольку такая теория является неперенормируемой, при вычислении вкладов высших порядков теории возмущений в наблюдаемые эффекты возникает множество неопределенных параметров, которые нельзя устранить перенормировкой конечного числа физических величин. Использование в указанных работах суперпропагаторного метода [13, 14] и принципа минимальных сингулярностей [15, 16] позволило фиксировать эти параметры и получить конечные и однозначные результаты.

Однако суперпропагаторный метод не является единственно возможным; существует ряд других способов (см., например, обзоры [17]), позволяющих корректно обращаться с лагранжианами кирального типа. Возникает вопрос: насколько результаты расчетов наблюдаемых величин зависят от выбора того или иного способа вычисления. Нам кажется, что в низкоэнергетических эффектах такая зависимость должна проявляться крайне слабо, а согласие получаемых результатов с экспериментальными данными в большой степени обусловливается правильным выбором исходного лагранжиана (по-видимому, достаточно, чтобы борновское приближение удовлетворяло низкоэнергетическим теоремам алгебры токов). В пользу этого говорят отчасти расчеты, проведенные нами в настоящей главе.

Что касается эффектов в области средних энергий, то от указанных методов трудно ожидать правильного описания, поскольку параметр разложений в теории возмущений $E/4\pi F_\pi$ становится порядка единицы, а, следовательно, вкладами высших порядков пренебрегать нельзя.

Для того чтобы получить разумные результаты, в рамках суперпропагаторного подхода наряду со способом вычисления вкладов отдельных диаграмм приходится принимать и вполне определенный способ выхода за рамки теории возмущений (паде-аппроксимация). Только в этом случае удается получить хорошее согласие с экспериментальными данными для фаз $\pi\pi$ -рассеяния. Что касается других эффектов пионной физики, то, как нам кажется, подход в целом является неудовлетворительным для описания их в области средних энергий. В частности, указанный метод хорошо воспроизводит поведение электромагнитного формфактора пиона в околопороговой области /18/, но совершенно неправильно передает это поведение вблизи ρ -мезонного резонанса.

В настоящей работе рассматривается модель $\pi\pi$ -взаимодействий с лагранжианом типа $(\pi\partial\pi)^2$. Как и киральные модели, эта модель относится к неперенормируемому типу. Мы ставим следующую задачу: во-первых, разработать процедуру, позволяющую обращаться с этой моделью как с перенормируемой, а значит, позволяющую получать при расчетах наблюдаемых эффектов однозначные результаты во всех порядках теории возмущений; во-вторых, выбрать эту процедуру так, чтобы она обеспечивала нам выход за рамки обычной теории возмущений и давала возможность последовательно рассматривать эффекты $\pi\pi$ - взаимодействий в области энергий $E \leq 1$ ГэВ.

В § 2 мы покажем, что эта задача может быть решена с помощью принципа суммирования Редмонда-Боголюбова-Логунова-Ширкова[19], примененного к некоторому набору однопетлевых диаграмм, и последующей перегруппировки ряда теории возмущений. В § 3 в рамках этой модели будет проведен фазовый анализ амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния и вычислены фазы и длины рассеяния. В § 4 мы изучим поведение электромагнитного формфактора пиона в области передач $-0,2 < t < 1,0$ ГэВ^2, которое предсказывается моделью в низшем порядке теории возмущений.

§ 2. Частичное суммирование однопетлевых диаграмм

При формулировке квантово-полевой модели необходимо, по-видимому, учитывать два факта:

1) лагранжиан взаимодействия модели должен правильно описывать низкоэнергетические эффекты;

2) процедура построения S -матрицы по заданному лагранжиану должна обеспечивать возможность правильного описания и в области средних энергий.

Мы будем исходить из следующего лагранжиана взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\pi\pi}(x) = - f_\pi^2 : \left\{ \vec{\pi}^2(x)\, \delta_{ij} - \pi_i(x)\pi_j(x) \right\} \partial_\mu \pi_i(x) \partial^\mu \pi_j(x) : \qquad (2.1)$$

Лагранжиан (2.1) является первым членом разложения кирально-инвариантного лагранжиана в координатах Гюрсея[20].

По индексу расходимости модель (2.1) относится к неперенормируемому типу. Для того, чтобы фиксировать произвол в вычитательных константах, мы проведем частичное суммирование некоторого набора однопетлевых диаграмм, после чего перегруппируем ряд теории возмущений так, что модель станет перенормируемой.

Для решения этой задачи удобно рассмотреть модель, эквивалентную (2.I)

$$\mathcal{L}_{\pi\rho}(x) = -\sqrt{2}\, f_\pi : \pi_i(x)\, \partial_\mu \pi_j(x)\, \rho^\mu_k(x) : \varepsilon_{ijk}, \tag{2.2}$$

где $\rho^\mu_k(x)$ – поле промежуточной векторной "частицы", обладающей "функцией распространения"

$$R^{\mu\nu}_{0(jk)}(x-y) = i\, g^{\mu\nu} \delta_{jk}\, \delta(x-y)\,. \tag{2.3}$$

В том, что эти модели действительно эквивалентны, проще всего убедиться, записав S -матрицу для лагранжиана (2.2) в виде

$$S = T_\pi T_\rho \exp\left\{ -i\sqrt{2}\, f_\pi \int d^4x\; \pi_i(x)\, \partial_\mu \pi_j(x)\, \rho^\mu_k(x)\, \varepsilon_{ijk} \right\},$$

символами T_π и T_ρ мы обозначили операции хронологического упорядочения полей $\pi_i(x)$ и $\rho^\mu_k(x)$ соответственно. Выполняя всевозможные спаривания ρ -полей, получим с учетом (2.3)

$$S = T_\pi N_\rho \exp\Big\{ -i f_\pi^2 \int d^4x \left[\vec{\pi}^2(x)\, \delta_{ij} - \pi_i(x)\pi_j(x) \right] \partial_\mu \pi_j(x)\, \partial^\mu \pi_i(x)$$

$$- i\sqrt{2}\, f_\pi \int d^4x\; \pi_i(x)\, \partial_\mu \pi_j(x)\, \rho^\mu_k(x)\, \varepsilon_{ijk} \Big\}. \tag{2.4}$$

Мы видим, что множества диаграмм Фейнмана, полученных по лагранжианам (2.I) и (2.2), будут совпадать (т.е. модели (2.I) и (2.2) будут эквивалентны), если для лагранжиана (2.2) мы отбросим:

а) диаграммы, содержащие внешние ρ -линии;

б) диаграммы, приводящие при "сжатии" внутренних ρ -линий к "головастикам" $\left(\sim \mathcal{D}^\pi_c(0)\right)$.

Последний класс диаграмм не должен учитываться, так как исходный лагранжиан (2.I) выбирается в нормальной форме. Далее мы будем иметь дело с моделью (2.2), не оговаривая всякий раз, что с учетом правил (а) и (б) она эквивалентна модели (2.I). *Естественно, если нам удастся добиться перенормируемости модели (2.2),* модель (2.I) автоматически будет перенормируема.

Заметим, что лагранжиан (2.2) не имеет непосредственно физического смысла, а переход от модели (2.I) к (2.2) - всего лишь формальный прием, позволяющий применить уже известные нам методы суммирования и перегруппировки ряда теории возмущений[/2I/].

Рассмотрим для лагранжиана (2.2) следующую цепочку диаграмм:

$R^{\mu\nu}_{ij}(p) =$ 

$$= R^{\mu\nu}_{0(ij)} + R^{\mu\lambda}_{0(ik)} \Pi^{\lambda\rho}_{kl} R^{\rho\nu}_{0(lj)} + \dots \qquad (2.5)$$

Сплошной линией мы обозначили функцию $R^{\mu\nu}_{0(ij)}$, пунктирной- пропагатор пиона ; $\Pi^{\lambda\rho}_{kl}(p)$ - оператор поляризации вакуума II порядка для лагранжиана (2.2), имеющий вид

$$\Pi^{\mu\nu}_{ij}(p) = \delta_{ij}\left\{ g^{\mu\nu}\Pi_1(p^2) - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\Pi_2(p^2) \right\}, \qquad (2.6)$$

$$\Pi_1(p^2) = \frac{f_\pi^2 m^2}{4\pi^2}\left\{ c\frac{p^2}{m^2} - \frac{4}{3} - \frac{p^2}{6m^2}\left(1-\frac{4m^2}{p^2}\right)^{3/2} \times \right. \qquad (2.7)$$

$$\left. \times\left[2\,\mathrm{Arcth}\left(1-\frac{4m^2}{p^2}\right)^{-1/2} - i\pi\theta(p^2-4m^2)\right]\right\} = \tilde{C}\frac{p^2}{m^2} + \Pi_2(p^2).$$

Здесь m - масса пиона, C и $\tilde{C}$ - вычитательные константы. Функция $\Pi_1(p^2)$ нормирована условием $\Pi_1(0) = 0$, которое, как мы увидим далее, будет означать отсутствие перенормировки константы связи f_π в низшем порядке перегруппированного ряда теории возмущений.

Мы ставим задачу: существует ли способ суммирования, позволяющий сопоставить ряду (2.5) или его части такую функцию $R_{ij}^{\mu\nu}(p)$, которая, обладая правильными аналитическими свойствами, убывала бы при $|p^2| \to \infty$ не медленнее, чем $O(1/|p^2|)$. Именно такое асимптотическое поведение обеспечит перенормируемость модели (2.2), а, следовательно, и модели (2.I).

Проводя формально перегруппировку ряда (2.5), мы можем представить его в виде

$$R_{ij}^{\mu\nu}(p) = \tilde{R}_{ij}^{\mu\nu}(p) + \tilde{R}_{i\kappa}^{\mu\lambda}(p)\,\tilde{\Pi}_{\kappa l}^{\lambda\rho}(p)\,\tilde{R}_{lj}^{\rho\nu}(p) + \ldots \quad ; \tag{2.8}$$

здесь

$$\tilde{R}_{ij}^{\mu\nu}(p) = \delta_{ij}\, g^{\mu\nu} R(p^2)\,, \tag{2.9}$$

$$R(p^2) = 1 + \Pi_1(p^2) + \Pi_1^2(p^2) + \ldots \quad , \tag{2.10}$$

$$\tilde{\Pi}_{ij}^{\mu\nu}(p) = \delta_{ij}\,\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\,\Pi_2(p^2)\,. \tag{2.11}$$

Очевидно, если удастся просуммировать ряд (2.I0) так, чтобы функция $R(p^2)$ не имела на физическом листе ложных полюсов и убывала бы при $|p^2| \to \infty$ не медленнее, чем $O(1/|p^2|)$, то каждый член ряда (2.8) также сохранит эти свойства. Более того, любая другая диаграмма из ряда теории возмущений для лагранжиана (2.2), вычисленная с помощью функции $\tilde{R}_{ij}^{\mu\nu}(p)$, становится перенормируемой, так как по индексу расходимости модель (2.2) будет эквивалентна скалярной электродинамике /22/.

Для суммирования ряда (2.I0) мы используем процедуру Редмонда-Боголюбова-Логунова-Ширкова /I9/. Тогда

$$R(p^2) = 1 + p^2 \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz\ \rho(z)}{z\,(z - p^2 - i\epsilon)}\,. \tag{2.12}$$

Здесь

$$\mathcal{I}\rho(z) = \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{1 - \Pi_1(z)} \right\}. \tag{2.13}$$

Для того, чтобы функция $R(p^2)$ имела асимптотику $O(1/p^2)$, достаточно удовлетворить следующему условию:

$$1 - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz}{z} \rho(z) = 0. \tag{2.14}$$

Поскольку $\rho(z) \geq 0$, можно надеяться, что подходящим выбором константы вычитания C мы удовлетворим этому требованию.

Здесь уместно сделать следующее замечание. При суммировании собственно-энергетических вкладов в функцию Грина пиона /21/ или любой другой реальной частицы согласно процедуре /19/ мы придем к выражению типа

$$G(p^2) = \frac{1}{m^2 - p^2} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dz\, \rho(z)}{z - p^2 - i\epsilon},$$

где $\rho(z) \geq 0$. Поэтому добиться убывания функции $G(p^2)$ более быстрого, чем у пропагатора $(m^2 - p^2)^{-1}$, можно лишь с помощью введения дополнительных состояний с индефинитной метрикой. Неявно это было сделано нами в работе /21/.

В случае, рассмотренном выше, ситуация несколько изменяется. Фиктивное поле ρ^{μ}_{κ}, которое входит в лагранжиан (2.2), само по себе не имеет физического смысла. Грубо его можно интерпретировать как поле бесконечно тяжелой частицы. Учет вкладов (2.5) – это учет вполне реальных физических состояний. Но поскольку знак "функции распространения" $R^{\mu\nu}_{0(ij)}$ подразумевает (конечно, условно) наличие у этой "частицы" состояний с индефинитной метрикой, требованию (2.14) можно удовлетворить, не вводя в спектральную плотность $\rho(z)$ "духовых" состояний.

На наш взгляд, указанная выше процедура может служить для динамического объяснения некоторых резонансов. Первоначально формальный объект-поле ρ^{μ}_{κ} означает лишь, что в низшем порядке токи $\bar{\pi}_i \partial_{\mu} \bar{\pi}_j \epsilon_{ijk}$ взаимодействуют точечно. Но, как будет показано далее, суммирование последовательности (2.5) приведет к тому, что это взаимодействие будет идти за счет обмена резонансом с квантовыми числами ρ -мезона.

Вернемся к уравнению (2.14). Поскольку функция зависит от одного произвольного параметра (см. (2.7)), мы можем надеяться, что уравнение (2.14) позволит фиксировать этот параметр.

Численный анализ показывает, что в терминах f_r и C уравнение (2.14) имеет множество решений, сосредоточенных на кривой $C = C(f_r)$, лежащей в области $C > 2$ и $f_r^2 m^2 < 3$. Таким образом, если фиксировать константу связи f_r, параметр C определяется однозначно.

Теперь мы можем сформулировать правила соответствия для перегруппированного ряда теории возмущений, построенного по лагранжиану взаимодействия (2.2):

а) ρ -линии сопоставляется функция $\tilde{R}_{\mu\nu}^{ij}(p)$, определяемая выражениями (2.9), (2.10), (2.12) и условием (2.14);

б) оператору поляризации вакуума второго порядка сопоставляется величина $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{ij}(p)$ (а не $\Pi_{\mu\nu}^{ij}(p)$), определяемая формулой (2.11);

в) при проведении перенормировки модели наряду с контрчленами перенормировки массы и волновых функций в лагранжиан взаимодействия необходимо включить контрчлен $\delta \mathcal{L}_{\pi\pi} = g(\vec{\pi}^2)^2$.

В следующем параграфе для определения константы связи f_r мы проведем фазовый анализ амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния в низшем порядке теории возмущений. Вкладом контрчлена $\delta \mathcal{L}_{\pi\pi}$ мы пренебрежем, считая, что $g \ll 1$.

3. Амплитуда $\pi\pi$ -рассеяния

В низшем порядке по константе связи f_π вклад в $\pi\pi$ -рассеяние дает диаграмма рис. I и две диаграммы, получающиеся из нее перестановкой пионных линий.

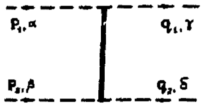

Рис. I

Сплошной линией мы будем обозначать функцию Грина ρ -частицы $R(p^2)$. Амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния (мы используем обозначения книги/4/) можно представить в виде

$$F_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} A + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} B + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} C . \tag{3.1}$$

Здесь

$$A(s,t,u) = \frac{f_\pi^2}{16\pi}\{(s-t)R(u) + (s-u)R(t)\}, \tag{3.2}$$

$$B(s,t,u) = A(t,s,u), \quad C(s,t,u) = B(s,u,t), \tag{3.3}$$

$$s = (p_1+p_2)^2, \quad t = (p_1-q_1)^2, \quad u = (p_1-q_2)^2. \tag{3.4}$$

Введем безразмерные переменные ν и c следующим образом:

$$\frac{s}{m^2} = 4(\nu+1), \quad \frac{t}{m^2} = -2\nu(1-c). \tag{3.5}$$

Перейдем далее от амплитуд A, B, C к изотопическим амплитудам $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Принимая во внимание представление (2.I2) для функции $R(p^2)$ и разлагая изотопические амплитуды по парциальным волнам, получим для последних

$$A^{(0)}_{2\ell}(\nu) = \frac{f_\pi^2 m^2}{16\pi}\int\limits_4^\infty dx\,\rho(xm^2)\left\{-4\delta_{\ell 0} + \frac{2}{\nu}(8\nu+x+4)\,Q_{2\ell}\left(1+\frac{x}{2\nu}\right)\right\}, \tag{3.6}$$

$$A^{(1)}_{2\ell+1}(\nu) = \frac{f_\pi^2 m^2}{16\pi}\int_4^\infty dz\,\rho(zm^2)\left\{\frac{8\nu\,\delta_{\ell 1}}{3[z-4(\nu+1)-i\epsilon]} + \frac{1}{\nu}(8\nu+z+4)\,Q_{2\ell-1}\left(1+\frac{z}{2\nu}\right)\right\}, \qquad (3.7)$$

$$A^{(2)}_{2\ell}(\nu) = -\frac{1}{2}\,A^{(0)}_{2\ell}(\nu). \qquad (3.8)$$

Здесь $Q_\ell(x)$ – присоединенные функции Лежандра. Длины рассеяния получаются из (3.6)-(3.8) по известной формуле

$$a^I_\ell = \lim_{\nu\to 0} \operatorname{Re} A^{(I)}_\ell / \nu^\ell \qquad (3.9)$$

и представимы в виде $(m = 1)$

$$a^0_0 = \frac{f_\pi^2 m^2}{\pi}\int_4^\infty \frac{dz}{z}\rho(z) = \frac{f_\pi^2 m^2}{\pi}, \qquad (3.10)$$

$$a^0_{2\ell} = \frac{f_\pi^2 m^2}{4\pi}\cdot\frac{2^{4\ell}\,\Gamma^2(2\ell+1)}{\Gamma(4\ell+2)}\int_4^\infty \frac{dz\,(z+4)}{z^{2\ell+1}}\rho(z), \quad (\ell>0) \qquad (3.11)$$

$$a^1_1 = \frac{f_\pi^2 m^2}{6\pi}\int_4^\infty dz\,\rho(z)\left\{\frac{1}{z-4} + \frac{(z+4)}{2z^2}\right\}, \qquad (3.12)$$

$$a^1_{2\ell+1} = \frac{f_\pi^2 m^2}{2\pi}\cdot\frac{2^{4\ell}\,\Gamma^2(2\ell+2)}{\Gamma(4\ell+4)}\int_4^\infty \frac{dz\,(z+4)}{z^{2\ell+2}}\rho(z), \quad (\ell>0) \qquad (3.13)$$

$$a^2_{2\ell} = -\frac{1}{2}\,a^0_{2\ell}. \qquad (3.14)$$

Из выражений (3.II) и (3.I4) видно, что в силу неотрицательности функции $\rho(z)$ комбинация длин

$$a_\ell = \left(1+\frac{\lambda}{3}\right)a^0_\ell + \frac{2\lambda}{3}\,a^2_\ell - a^0_\ell \qquad (3.15)$$

(λ – произвольный параметр) удовлетворяет набору неравенств:

$$a_{\ell+2} \leq a_\ell\,\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{4(2\ell+3)(2\ell+5)}, \qquad (3.16)$$

которые также вытекают из унитарности и аналитичности амплитуды рассеяния /23/.

Для вычисления фаз рассеяния мы воспользуемся представлением

$$A_\ell^{(I)}(\nu) = \frac{\eta_\ell^I(\nu)\, e^{2i\delta_\ell^I(\nu)} - 1}{2i\, K(\nu)}, \tag{3.17}$$

где

$$K(\nu) = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{1/2},$$

из которого следует

$$tg\, 2\delta_\ell^I(\nu) = \frac{2K(\nu)\, Re\, A_\ell^I(\nu)}{1 - 2K(\nu)\, Im\, A_\ell^I(\nu)}. \tag{3.18}$$

Напомним, что пока в нашей модели есть один произвольный параметр: константа связи f_r. Параметр C выражается через f_r из условия (2.14). Для нахождения f_r можно воспользоваться формулой (3.10), связывающей константу связи с длиной рассеяния a_0^0. Однако длины $\pi\pi$ -рассеяния экспериментально изучены недостаточно точно, кроме того, экстраполяция экспериментальных данных в области малых энергий (используемая для нахождения длин) весьма неоднозначна. Поэтому мы анализировали данные[24], относящиеся к измерению фазы рассеяния δ_1^1. Наилучшее согласие $(\chi^2/n_д \simeq 2)$ получается при выборе

$$\begin{aligned} f_r^2 m^2 &= 0{,}549, \\ C = C(f_r) &= 2{,}741. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Поведение фаз δ_0^0, δ_0^2 и δ_1^1 показано на рис. 2-4. Из графиков видно, что уже низший порядок перегруппированного ряда теории возмущений для рассмотренной модели дает значения фаз, удовлетворительно согласующиеся с экспериментальными данными.

Для длин рассеяния, выполнив численное интегрирование в выражениях (3.11), (3.12), получаем

$$\begin{aligned} &a_0^0 = 0{,}175; \quad a_0^2 = -0{,}088; \quad a_1^1 = 0{,}050; \\ &a_2^0 = 0{,}86 \cdot 10^{-3}; \quad a_2^2 = -4{,}3 \cdot 10^{-4}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

что не противоречит значениям, допускаемым экспериментом в настоящее время [26].

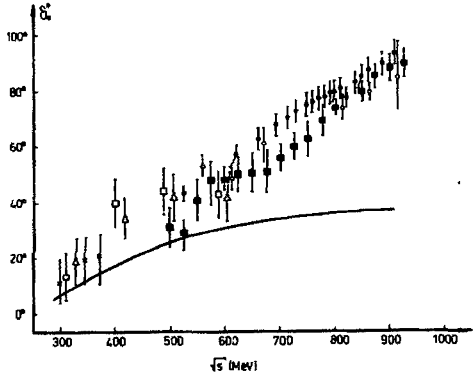

Рис. 2. Фаза δ_0^0. Экспериментальные данные взяты из работы /25/.

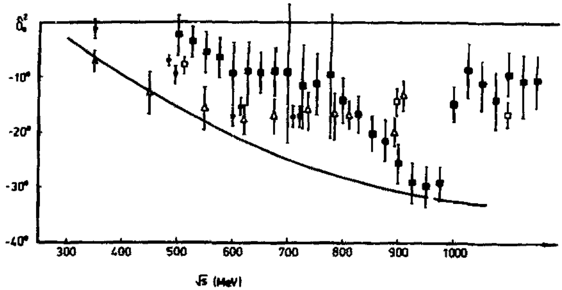

Рис. 3. Фаза δ_0^2. Экспериментальные данные взяты из работы /25/.

$$a_0^0 \in [0{,}1;\ 0{,}6]; \quad a_0^2 \in [-0{,}10;\ -0{,}03]; \quad a_1^1 \in [0{,}032;\ 0{,}052]$$

$$a_2^0 \in [1{,}2\cdot 10^{-3} \div 2{,}4\cdot 10^{-3}]; \quad a_2^2 \in [-3\cdot 10^{-4} \div 7\cdot 10^{-4}]\,. \qquad (3.21)$$

Заметим, что при проведении перенормировки в высших порядках теории возмущений возникает необходимость вводить в лагранжиан взаимодействия контрчлен $\delta \mathcal{L}_{::} = g(\vec{\pi}^2)^2$.

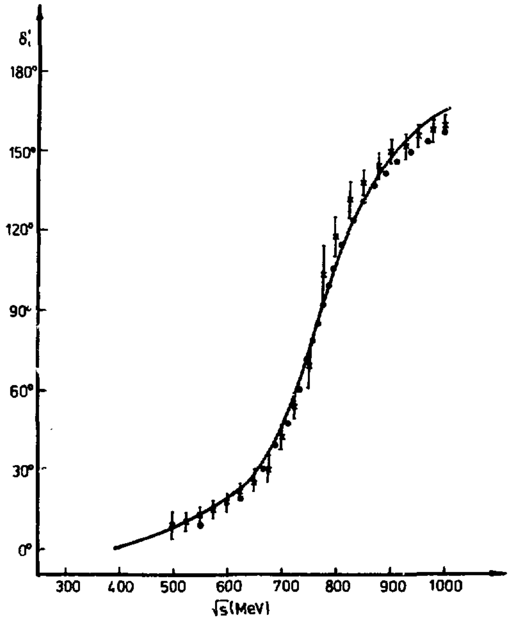

Рис. 4. Фаза δ_1^1. Экспериментальные данные взяты из работ /24/. ∮ -Baton et al, •- Protopoescu et al.

В данной работе мы пренебрегали этим вкладом. Учет члена $\delta\alpha_{rr}$ может исправить некоторое расхождение нашего результата для фазы δ_0^0 с экспериментальными данными.

§ 4. Электромагнитный формфактор пиона

В низшем порядке теории возмущений вклад в электромагнитный формфактор пиона в рамках нашей модели дают следующие диаграммы:

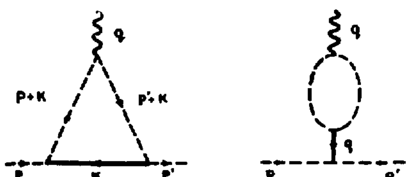

Рис.5

Сплошной линией, как и ранее, мы обозначаем функцию $\tilde{R}^{\pi\nu}_{ij}(p)$. Принимая во внимание представления этой функции (2.9) и (2.12), а также формулу (2.7), легко получить для вкладов в электромагнитный формфактор диаграмм (5 а–б) следующие выражения:

$$\tilde{F}^{(a)}_{\pi}(t) = -\frac{f_1^2}{8\pi^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty} dz\,\rho(z)\int\limits_0^1 d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\;\delta(1-\Sigma\alpha_i)$$

$$\times\Big\{(1+3\alpha_1)\ln\frac{A(z,t)}{A(z,0)}+\alpha_1\Big[(1+\alpha_1)^2-\frac{t}{m^2}(1+\alpha_1+\alpha_2\alpha_3)\Big]A^{-1}(z,t)$$

$$-\alpha_1(1+\alpha_1)^2A^{-1}(z,0)\Big\}, \tag{4.2}$$

где

$$A(z,t)=\alpha_1\frac{z}{m^2}+(1-\alpha_1)^2-\alpha_2\alpha_3\frac{t}{m^2} \tag{4.3}$$

и

$$\tilde{F}^{(б)}_{\pi}(t)=\frac{f_\pi^2m^2}{4\pi^2}\Big\{C\frac{t}{m^2}-\frac{4}{3}-\frac{t}{6m^2}\Big(1-\frac{4m^2}{t}\Big)^{3/2}$$

$$\times\Big[2\,\mathrm{Arcth}\Big(1-\frac{4m^2}{t}\Big)^{-1/2}-i\pi\theta(t-4m^2)\Big]\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dz\,\rho(z)}{z-t-i\varepsilon} \tag{4.4}$$

Формулы (4.2) и (4.4) позволяют получить выражение для среднеквадратичного радиуса пиона. По определению

$$\langle r_\pi^2\rangle = 6\,\tilde{F}'(0),$$

поэтому

$$\langle r_\pi^2\rangle^{(a)}=\frac{f_\pi^2}{8\pi^2m^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}dz\,\rho(z)\int\limits_0^1dx\,\Big\{(1-x)(1+8x-x^2+4x^3)A^{-1}(z,0)$$

$$-x(1+x)^2(1-x)^3A^{-2}(z,0)\Big\}; \tag{4.5}$$

$$\langle r_\pi^2\rangle^{(б)}=\frac{3f_\pi^2}{2\pi^2}\Big(C-\frac{4}{9}\Big). \tag{4.6}$$

Дальнейшие интегрирования в выражениях (4.2), (4.4) и (4.5) проводились численно. При вычислении многократных интегралов (4.2) и (4.5) мы использовали метод Коробова/27/. Как и следовало ожидать, основной вклад в электромагнитный формфактор пиона давала диаграмма (5б), поскольку функция $R(p^2)$ на втором листе римановой поверхности p^2 имеет полюс, характеризующий ρ -мезонный резонанс. Вклад диаграммы (5а) порядка 10%.

Результаты вычислений абсолютных значений формфактора пиона $1+\tilde{F}_\pi(t)$ в области $-0{,}2 < t < 1{,}0$ ГэВ^2 приведены на рисунках 6 и 7. На рис. 6 проведено сравнение полученных значений с данными последних экспериментов/28/ по измерению формфактора в пространственноподобной области передач.

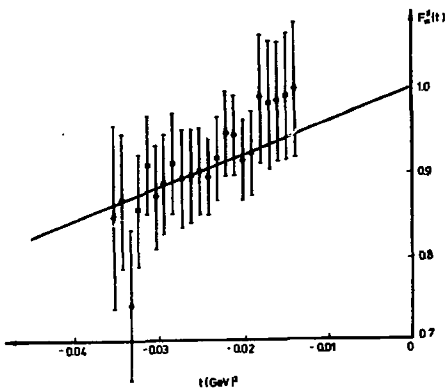

Рис. 6. Формфактор $|1+\tilde{F}_\pi(t)|^2$ в пространственноподобной области. Экспериментальные значения ϕ взяты из работы /28/.

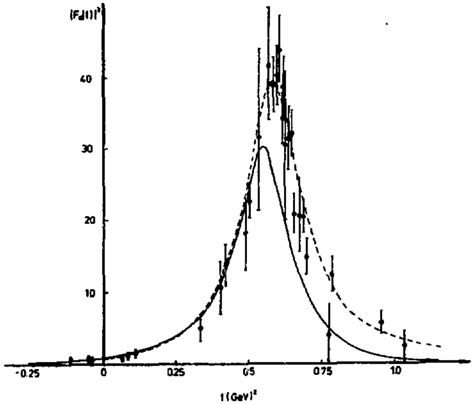

Рис. 7. Формфактор $|1+\tilde{F}_\pi(t)|^2$ в резонансной области. Пунктирной линией показана зависимость, полученная в работе /29/. Экспериментальные данные взяты из работы /29/.

Рис. 7. отражает зависимость формфактора в резонансной области. Для сравнения на этом же рисунке мы привели кривую, полученную в работе /29/ на основании дисперсионных соотношений.

Из графиков видно, что для передач $-0{,}2 < t < 0{,}6$ формулы (2.2) и (2.5) правильно воспроизводят поведение формфактора. В пороговой области результаты также хорошо согласуются с экспериментальными данными, недавно полученными в Дубне /30/. Соответствующие значения приведены в таблице.

$t/4m^2$	$\lvert 1+\tilde{F}_\pi(t)\rvert^{эксп}$	$\lvert 1+\tilde{F}_\pi(t)\rvert^{теор}$
0,85	1,10±0,07	1,15
1,1	1,14±0,06	1,21
1,45	1,30±0,07	1,30

Для среднеквадратичного радиуса получено:

$$\langle r_\pi^2\rangle^{(a)} = 0{,}096\ \Phi^2, \qquad \langle r_\pi^2\rangle^{(б)} = 0{,}410\ \Phi^2,$$

откуда

$$\langle r_\pi^2\rangle = \langle r_\pi^2\rangle^{(a)} + \langle r_\pi^2\rangle^{(б)} = 0{,}506\ \Phi^2, \qquad (4.7)$$

что находится в хорошем согласии с экспериментальными данными/28/:

$$\langle r_\pi^2\rangle^{эксп} = 0{,}61 \pm 0{,}15\ \Phi^2, \qquad (4.8)$$

а также с результатом повторной обработки/31/ этих данных

$$\langle r_\pi^2\rangle^{1/2}_{эксп} = 0{,}71 \pm 0{,}05\ \Phi. \qquad (4.9)$$

§ 5. Заключение

В этой работе мы предложили модель для описания $\pi\pi$ - взаимодействий. Хотя она относилась к неренормируемому типу, удалось построить процедуру, применение которой делало модель перенормируемой. Проведенный анализ показал, что уже низший порядок перегруппированного ряда теории возмущений приводит к значениям фаз и электромагнитного формфактора пиона, удовлетворительно согласующимся с имеющимися экспериментальными данными и дающими ρ -мезонный резонанс при энергии $E \approx 780$ МэВ.

Основное достоинство модели, на наш взгляд, заключается в том, что метод вычисления вкладов отдельных диаграмм, согласно приведенным выше правилам, служит не только для их регуляризации, но и для частичного выхода за рамки обычной теории возмущений. В моделях $\pi\pi$ -взаимодействий кирального типа параметром разложения является величина $E/4\pi F_\pi$, поэтому низшими порядками можно ограничиваться лишь при описании эффектов в области малых энергий.

В частности, расчеты в рамках модели с кирально-инвариантным лагранжианом, проведенные в работе [18], позволяют правильно описать формфактор пиона лишь в допороговой области.

В нашей модели параметром разложения является величина $\frac{f_\pi^2 m^2}{\pi} \log \frac{E}{2m}$, поэтому уже низший порядок правильно воспроизводит поведение формфактора пиона в области передач $-0{,}2 < t < 0{,}5$ ГэВ^2.

В заключение автор выражает глубокую признательность Г.В.Ефимову за постоянный интерес к работе и целый ряд замечаний критического и конструктивного характера. Автор благодарит также С.Б.Герасимова, С.Дубничку, В.А.Мещерякова и В.Н.Первушина за стимулирующие обсуждения.

Литература

I. G.Chew, S.Mandelstam. Phys. Rev., 119, 467 (1960).

2. Lovelace. Nuovo Cim., 21, 305 (1961).

3. Д.В.Ширков. В кн. "Международная школа по теоретической физике при ОИЯИ", т.2, Дубна, I964.

4. Д.В.Ширков, В.В.Серебряков, В.А.Мещеряков. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., Наука, I967.

5. A.V.Efremov, V.A.Meshcheryakov, D.V.Shirkov, N.Y.Tzu. Nucl. Phys. 22, 202 (1960).

6. В.В.Серебряков, Д.В.Ширков. ЭЧАЯ, т. I, вып. I, стр. I7I, Атомиздат, Москва, I97I.

7. N.Johannesson, D.V.Shirkov, University of Lund preprint (1971).

8. D.Bessis, M.Pusterla. Nuovo Cim. 54A, 243 (1968).

9. M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim.,16, 705 (1960).

IO. J.L.Basdevant, B.Lee. Phys. Rev. D2, 1680 (1970).

II. J.L.Basdevant, J.Zinn-Justin. Phys. Rev. D3, 1865 (1971).

I2. V.N.Pervushin, M.K.Volkov. JINR preprint, E2-7661 (1974).

I3. М.К.Волков. ТМФ 6, 2I (I97I).

I4. M.K.Volkov. Ann. Phys. 49, 202 (1968).

I5. Б.А.Арбузов, А.Т.Филиппов. ЖЭТФ 49, 990 (I965);
Nuovo Cim. 38, 796 (1965);
ЯФ, 8, 365 (I968);
А.Т.Филиппов. Препринт ОИЯИ Е2-4189, Дубна, I968.

I6. H.Lehman, K.Pohlmeyer. Comm. Math. Phys. 20, 101 (1971).

17. Г.В.Ефимов В кн. Тр. ХУ международной конференции по физике высоких энергий. Киев. "Наукова думка", 1972; CERN preprint, TH, 1087 (1969).

18. М.К.Волков, В.Н.Первушин. ЯФ, т. 19, вып. 3, 652 (1974).

19. R.J.Redmond. Phys. Rev., 112, 1404 (1958); Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, Д.В.Ширков. ЖЭТФ 37, 805 (1959)

20. P.Chang and F.Gursey. Phys. Rev. 154, 1752 (1967).

21. В.Г.Малышкин. Препринт ОИЯИ, Р2-7379, Дубна, 1974; M.A.Ivaniv,V.G.Malyshkin.JINR preprint,E2-8375,Dubna(1974).

22. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. 2-е издание, М., Наука, 1973.

23. A.Martin. Nuovo Cim. 47, 265 (1967); 58A, 303 (1968); F.J.Yudurain. Nuovo Cim. 64A, 225 (1969).

24. J.P.Baton et al. Phys. Lett. 33B, 525, 528 (1970); S.D.Protopopesku et al. LBL preprint, 789 (1972).

25. G.Ecker, J.Honerkamp. Nucl. Phys. B52, 211 (1973).

26. H.Pilkuhn et al. Nucl. Phys. B65, 460 (1973).

27. Н.М.Коробов. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963.

28. G.T.Adylov et al. JINR preprint, E1-8047 (1974); Phys. Lett. 51B, 402 (1974).

29. S.Dubnička,V.A.Meshchryakov.JINR preprint,E2-7982,Dubna(1974).

30. С.Ф.Бережнев и др. Препринт ОИЯИ Р1-6934, Дубна, 1973.

31. S.Dubnička, O.V.Dumbrais. JINR preprint, E2-8240 , Dubna (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1975 г.