

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P2-85-974

В.А.Бейлин*, А.В.Радюшкин

**БОРЕЛЕВСКИЕ ПРАВИЛА СУММ
ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДОВ ЧАРМОНИЯ
В КХД**

Направлено в журнал "Ядерная физика"

* Ростовский государственный университет

1985

I. В в е д е н и е

Успехи квантовой хромодинамики сегодня в значительной степени определяются успехами в приложениях метода правил сумм^{/1-3/}, вполне доказавшего свою плодотворность в расчетах масс, ширин распадов и формфакторов мезонов в широком интервале Q^2 /4-15/. Однако эффективность метода ПС существенно зависит от конкретной математической формы ПС. Введенные в^{/3/} борелевские ПС оказались необходимым инструментом для расчетов констант взаимодействия и формфакторов легких мезонов. Переход к борелевским ПС осуществляется оператором:

$$\hat{B} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Q^2 = nM^2}} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left[-\frac{d}{dQ^2} \right]^n, \quad (1)$$

и в дальнейшем исследуется зависимость от параметра M^2 (см. также^{/16,17/}). Для описания же характеристик тяжелых систем работают в основном с ПС для моментов исходных амплитуд, где

$$\hat{M}_n = \frac{1}{n!} \left[-\frac{d}{dQ^2} \right]^n \Big|_{Q^2=Q_0^2}, \quad (2)$$

проследивая зависимость от n . В последнее время появился ряд работ^{/17-19/}, где показано, что экспоненциальные (борелевские) моменты в ПС для систем типа чармония эффективнее, чем ПС для моментов типа (2) - в том смысле, что слабее проявляется зависимость от такого существенного параметра, как масса кварка m_q , лучше сходимость ряда по степенным поправкам. В данной работе мы предлагаем класс ПС для 3-точечных амплитуд, описывающих радиационные распады чармония. Такие ПС позволяют также проводить оценки ширин радиационных распадов высших состояний чармония и являются практически не зависящими от выбора m_c , одновременно определяя параметр обрезания континуума S_0 . Аналогично нашей предыдущей работе^{/9/}, мы строим ПС для отношения 3-точечных амплитуд и соответствующих 2-точечных амплитуд с последующим разложением этого отношения. Результаты оказываются весьма стабильными и близки к результатам^{/9,11,14,15/}.

Объясненский институт
ядерных исследований
библиотека

В разделе 2 мы рассматриваем необходимые борелевские ПС для 2-точечных функций, в 3 - описываем ПС для $\eta'_c \rightarrow 2\gamma$, в 4 - изучаем распад $\eta_c \rightarrow 2\gamma$, в разделе 5 анализируем ширину $\psi' \rightarrow \eta'_c \gamma$, раздел 6 посвящен вопросу о $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$, в Заключении мы проводим сравнительный анализ различных форм ПС.

2. Борелевские правила сумм для двухточечных амплитуд

Правила сумм для 2-точечных амплитуд, соответствующих корреляторам вида

$$\Pi^\Gamma(q) = i \int e^{-i4x} \langle 0 | T \{ j^\Gamma(x) j^\Gamma(0) \} | 0 \rangle dx \equiv T^\Gamma(q) A_{(q^2)}^{(3)}$$

(здесь индекс Γ аккумулирует все индексы тока, $T^\Gamma(q)$ - кинематическая структура), получены и исследовались во многих работах - см.^{2, 3, 19-21/}. В большинстве случаев это ПС, полученные с использованием (2). В^{19, 22/} изучались ПС для функций (3), использующие борелевские моменты (формула (1)), однако эти работы в основном были посвящены вопросам сходимости ряда по высшим степенным поправкам и точности определения массы чармония из ПС. Были также получены удобные формулы перехода от степенных моментов к экспоненциальным, использующие комбинации функций Уиттекера^{18/}. Мы, однако, не будем пользоваться этими соотношениями, а выразим соответствующие коэффициенты через некие базисные интегралы, которыми проще пользоваться в конкретных вычислениях. Будем также учитывать непертурбативные вклады в амплитуды лишь $\sim \langle 0 | G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle$ и не рассматривать члены $\sim O(\alpha_s)$. Соответствующие G^2 -члены для векторной и псевдоскалярной 2-точечных амплитуд легко получить, пользуясь известным методом расчета^{20/}, или извлечь из^{20, 21/}. Учтем, что

$$\hat{B} [J_n(m_c^2, Q^2) / (Q^2)^m] = \frac{m_c^{2n}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \sum_{k=0}^{m-1} C_k^{m-1} \frac{(-1)^k}{(M^2)^{m-k-1}}$$

$$\int_0^1 dx (x\bar{x})^k \left\{ \frac{(n+k-1)!}{(m_c^2)^{n+k}} - \exp\left[-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right] \cdot \Psi \right\},$$

$$\text{где } J_n = \int_0^1 dx / (m_c^2 + Q^2 x\bar{x})^n, \quad \bar{x} = 1-x, \quad \Psi = 1/m_c^2 (M^2 x\bar{x})^{n+k-1} + (n+k-1)/(m_c^2)^2 (M^2 x\bar{x})^{n+k-2} + \dots + (n+k-1)! / (m_c^2)^{n+k-1} M^2 x\bar{x}.$$

Далее, используя приближение узких резонансов и обрезая континуум обещеприятным способом, запишем для 2-точечной псевдоскалярной амплитуды:

$$M_{\eta_c}^4 h^2 + M_{\eta_c}^4 e^{-\frac{M_{\eta_c}^2 - M_{\eta_c}^2}{M^2}} h'^2 = \frac{3}{8\pi^2} m_c^4 e^{\frac{M_{\eta_c}^2}{M^2}} \left\{ A_h^0 + A_h^{(GG)} \right\} \quad (4)$$

где M^2 - борелевский параметр, m_c - масса c -кварка,

$$A_h^0 = \frac{1}{2} \int_{\frac{1-v_0}{2}}^{\frac{1+v_0}{2}} \exp\left\{-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right\} \frac{1-4x\bar{x}}{(x\bar{x})^3} dx, \quad v_0 = \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{S_0}};$$

$$A_h^{(GG)} = \frac{\langle 0 | \frac{d_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \pi^2}{9m_c^4} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right\} \left\{ 5 + 11 \frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}} - 2 \frac{m_c^4}{(M^2 x\bar{x})^2} \right\} dx.$$

Аналогично, для векторной 2-точки получаем:

$$M_\psi^2 g^2 + M_{\psi'}^2 \exp\left\{-\frac{M_{\psi'}^2 - M_\psi^2}{M^2}\right\} g'^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ A_g^0 + A_g^{(GG)} \right\}, \quad (5)$$

$$\text{где } A_g^0 = \frac{1}{2} \int_{\frac{1-v_0}{2}}^{\frac{1+v_0}{2}} \exp\left\{-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right\} \frac{1-2x\bar{x}-8(x\bar{x})^2}{(x\bar{x})^2} dx,$$

$$A_g^{(GG)} = - \frac{\langle 0 | \frac{d_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \pi^2}{3m_c^2 M^2} \int_0^1 e^{-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}} \left(1 + \frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right) dx.$$

В ПС (4) и (5) M^2 является непрерывным параметром, поэтому, дифференцируя (4) и (5) по $1/M^2$, можно получить ПС для определения h' и g' . Действуя таким образом, находим:

$$g'^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_c^2}{M_{\psi'}^2} \frac{1}{M_{\psi'}^2 - M_\psi^2} e^{\frac{M_{\psi'}^2}{M^2}} \left\{ A_{g'}^0 + A_{g'}^{(GG)} \right\}, \quad (6)$$

$$\text{где } A_{g'}^0 = \frac{m_c^2}{2} \int_{\frac{1-v_0}{2}}^{\frac{1+v_0}{2}} \exp\left\{-\frac{m_c^2}{M^2 x\bar{x}}\right\} \left[(1-2x\bar{x}-8(x\bar{x})^2) \frac{1}{(x\bar{x})^3} - \frac{M_\psi^2}{m_c^2 (x\bar{x})^2} \right] dx,$$

$$A_{g_i}^{(GG)} = \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \pi^2}{3m_c^2} \int_0^1 \exp\left(\frac{m_c^2}{M^2 x \bar{x}}\right) \left[1 + \frac{m_c^2}{M^2 x \bar{x}} - \frac{m_c^4}{M^4 (x \bar{x})^2} + \frac{M_{\psi}^2}{m_c^2} \left(\frac{m_c^2}{M^2} + \frac{m_c^4}{M^4 (x \bar{x})^2} \right) \right] dx \quad (7)$$

и где $h^2 = \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{m_c}{M_{\eta_c}} \right)^4 \frac{1}{M_{\eta_c}^2 - M_{\eta_c'}^2} \exp\left\{ \frac{M_{\eta_c'}^2}{M^2} \right\} \left\{ A_{h'}^0 + A_{h'}^{(GG)} \right\}$,

$$A_{h'}^0 = \frac{m_c^2}{2} \int_{\frac{1-\nu_0}{2}}^{\frac{1+\nu_0}{2}} e^{-m_c^2/M^2 x \bar{x}} (1-4x\bar{x}) \left(\frac{1}{(x\bar{x})^4} - \frac{M_{\eta_c}^2}{m_c^2 (x\bar{x})^3} \right) dx,$$

$$A_{h'}^{(GG)} = \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \pi^2}{9m_c^2} \int_0^1 e^{-\frac{m_c^2}{M^2 x \bar{x}}} \left[-\frac{6}{x\bar{x}} + \frac{15m_c^2}{M^4 (x\bar{x})^2} - \frac{2m_c^4}{M^4 (x\bar{x})^3} - \frac{M_{\psi}^2}{m_c^2} \left(5 + 11 \frac{m_c^2}{M^2 x \bar{x}} - 2 \frac{m_c^4}{M^4 (x\bar{x})^2} \right) \right] dx$$

Отметим, что такой прием (дифференцирование по $1/M^2$) используется не впервые (см., например /23/). Конечно, при этом ухудшается стабильность ПС, сужая "рабочую" область по M^2 , однако мы и не будем отдельно анализировать (6) и (7), а используем их в комбинации с ПС для 3-точечных амплитуд, что позволит получить информацию о радиационных распадах высших состояний чармония с неплохой точностью.

3. Борелевские правила сумм для распада $\eta_c' \rightarrow 2\gamma$

Впервые ПС для расчета $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ с использованием степенных моментов при $Q^2 = 0$ были получены в /10/. Там же была отмечена сильная зависимость ПС от выбора m_c . Процедура, предложенная в /10/ для ослабления этой зависимости, лишь немного ее уменьшила, не фиксируя одновременно параметра S_0 . Аналогичный вариант ПС использован и в /12,13/.

Выпишем борелевские ПС для процесса $\eta_c \rightarrow 2\gamma$:

$$h F_{\eta_c} + \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\eta_c}} e^{-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{M^2}} h' F_{\eta_c'} = \frac{2}{\pi} \frac{m_c}{M_{\eta_c}} e^{\frac{M_{\eta_c}^2}{M^2}} \left\{ A_{\eta_c}^0 + A_{\eta_c}^{(GG)} \right\} \quad (8)$$

где F_{η_c} определяет ширину $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$, аналогично $F_{\eta_c'}$ связана с $\Gamma(\eta_c' \rightarrow 2\gamma)$.

$$A_{\eta_c}^0 = \int_{\frac{1-\nu_0}{2}}^{\frac{1+\nu_0}{2}} dx e^{-\frac{m_c^2}{M^2 x \bar{x}}} \frac{x-\bar{x}}{x\bar{x}} \ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) dx;$$

$$A_{\eta_c}^{(GG)} = -\varphi \left\{ \int_0^1 e^{-\frac{\alpha}{x\bar{x}}} \left[(2\alpha + \frac{\alpha^2}{2}) \frac{1}{(x\bar{x})^2} - (1 - \frac{15}{2}\alpha) \frac{1}{x\bar{x}} + \frac{3}{2} \right] dx - 4\alpha^2 \int_0^1 \exp(-\alpha/x\bar{x}) \frac{1}{x^3 y} dx dy \right\}; \quad \alpha = \frac{m_c^2}{M^2}, \quad \varphi = \frac{\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a | 0 \rangle \pi^2}{9(4m_c^2)^2}.$$

Дифференцируя (8) по $1/M^2$, можно получить ПС для определения $F_{\eta_c'}$. Фиксируя F_{η_c} , можно затем более точно определить $F_{\eta_c'}$, т.к. подавление вкладов высших резонансов несколько хуже для экспоненциальных моментов, чем для степенных.

Таким образом, получаем:

$$h' F_{\eta_c'} = \frac{2}{\pi} \frac{m_c}{M_{\eta_c'}} \frac{1}{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2} e^{\frac{M_{\eta_c}^2}{M^2}} \left\{ A_{\eta_c'}^0 + A_{\eta_c'}^{(GG)} \right\}, \quad (9)$$

где

$$A_{\eta_c'}^0 = m_c^2 \int_{\frac{1-\nu_0}{2}}^{\frac{1+\nu_0}{2}} e^{-\alpha/x\bar{x}} \frac{x-\bar{x}}{(x\bar{x})^2} \ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) dx - M_{\eta_c}^2 A_{\eta_c}^0;$$

$$A_{\eta_c'}^{(GG)} = \varphi \left\{ \int_0^1 e^{-\alpha/x\bar{x}} \left[\frac{1}{(x\bar{x})^2} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\alpha} \right) \bar{z}_1 - \left(2 + \frac{3}{2\alpha^2} \right) \bar{z}_2 \right) + \frac{1}{x\bar{x}} \left(- \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{15}{2\alpha} \right) \bar{z}_1 + \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{6}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \bar{z}_2 \right) + \frac{3}{2\alpha^2} \bar{z}_1 - \frac{3}{\alpha^3} \bar{z}_2 \right] dx - 4\bar{z}_1 \int_0^1 \exp(-\alpha/x\bar{x}) \frac{1}{x^3 y} dx dy \right\},$$

и обозначено: $\bar{z}_1 = \alpha^2 M_{\eta_c}^2 + 2\alpha m_c^2$, $\bar{z}_2 = m_c^2 \alpha^2$.

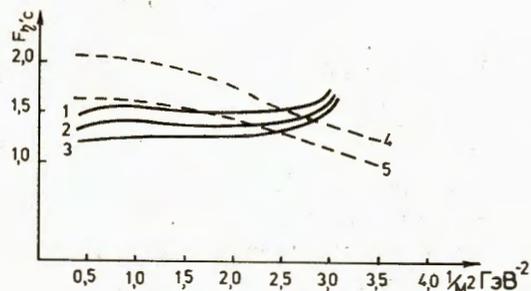
Попробуем оценить величину $F_{\eta_c'}$ из (9), полагая

$$m_c = 1,28 \text{ ГэВ}, \quad M_{\eta_c} = 2,981 \text{ ГэВ}, \quad M_{\eta_c'} = 3,592 \text{ ГэВ},$$

$h' = 0,072$ (весьма близко к эксперименту) и варьируя S_0 .

С точностью до членов $O(\alpha_s)$, считая численно встречающиеся интегралы (они все могут быть сведены к двум базисным интегралам

$\int_0^1 e^{-d/\sqrt{x}} dx$ и $\int_0^1 \frac{dx}{x} e^{-d/\sqrt{x}}$), получаем графики 4 и 5 на рис. 1, отличающиеся выбором S_0 . Видно, что ПС(9) практически не позволяют зафиксировать величину F_{η_c} из-за отсутствия стабильного по S_0 и M^2 плато.



Р и с. 1. Графики 1-3 - результаты ПС(10) для $\sqrt{S_0} = 3,8; 3,9; 4,0$ ГэВ соответственно; 4, 5 - результаты ПС(9) для $\sqrt{S_0} = 3,9; 4,0$ ГэВ; $m_c = 1,28$ ГэВ.

Возьмем теперь вместо экспериментального значения h' ПС(6), т.е. извлечем корень из обеих сторон приближенного равенства (6) и разделим на него ПС(9). После разложения полученного отношения в правой части, получаем:

$$F_{\eta_c} = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\eta_c}'}{m_c} (M_{\eta_c}^2 - M_{\eta_c}^2)^{-1/2} A_{\eta_c}^0 (A_{h'}^0)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{A_{\eta_c}^{(GG)}}{A_{\eta_c}^0} - \frac{A_{h'}^{(GG)}}{2A_{h'}^0} \right\} \quad (10)$$

Чтобы полностью сократить экспоненты вида $e^{M_{\eta_c}^2/M^2}$, в функциях $A_{h'}^{(GG)}$ и $A_{\eta_c}^0$ параметр α заменяется на (2α) .

После численной обработки ПС(10) получаем графики 1-3 на рис. 1. Анализируя их, можно сделать вывод, что наиболее четко выделяется плато по M^2 при $\sqrt{S_0} \approx 4$ ГэВ, и величина F_{η_c} фиксируется в пределах:

$$F_{\eta_c} = 1,3 - 1,5.$$

Используя формулу

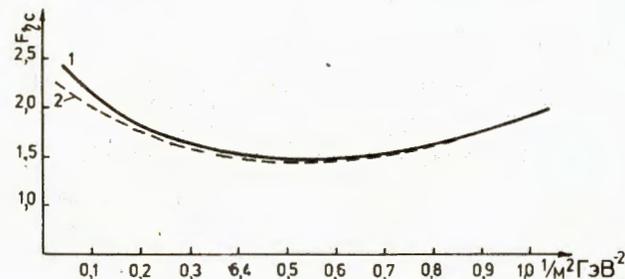
$$\Gamma(P \rightarrow 2\gamma) = (3Q^2\alpha)^2 |F_P|^2 M_P / 64\pi, \quad (11)$$

находим: $\Gamma(\eta_c' \rightarrow 2\gamma) = (3,3 \pm 0,4)$ ГэВ.

4. Распад $\eta_c \rightarrow 2\gamma$

Определив F_{η_c} , можно более детально исследовать поведение ПС(8).

Используя "стандартный" вариант ПС, т.е. подставляя экспериментальные значения для h и h' ($\approx 0,12$), получаем после обработки кривые, представленные на рис. 2. Здесь мы уже используем значение $F_{\eta_c} = 1,4$.



Р и с. 2. 1, 2 - результаты из ПС(8) для $\sqrt{S_0} = 3,9; 4,0$ ГэВ соответственно; $m_c = 1,28$ ГэВ.

Видно также, что зависимость от S_0 весьма слабая, особенно начиная с $1/M^2 \approx 0,4$ ГэВ⁻². Привлекая теперь ПС(4), деля на них ПС(8) и разлагая отношение, находим следующие ПС:

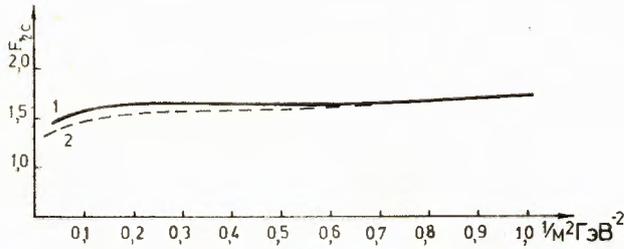
$$\frac{F_{\eta_c} + \frac{M_{\eta_c}'}{M_{\eta_c}} \frac{h'}{h} \exp\left\{-\frac{M_{\eta_c}^2 - M_{\eta_c}^2}{M^2}\right\} F_{\eta_c}'}{\left(1 + \frac{M_{\eta_c}^4}{M_{\eta_c}^4} \frac{h'^2}{h^2} \exp\left\{-2\frac{M_{\eta_c}^2 - M_{\eta_c}^2}{M^2}\right\}\right)^{1/2}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\eta_c}}{m_c} A_{\eta_c}^0 (A_{h'}^0)^{-1/2} \cdot \left\{ 1 + \frac{A_{\eta_c}^{(GG)}}{A_{\eta_c}^0} - \frac{A_{h'}^{(GG)}}{2A_{h'}^0} \right\} \quad (12)$$

Здесь также $A_{h'}^{(GG)}$ и $A_{h'}^0$ вычисляются при замене α на 2α . Соответствующие графики представлены на рис. 3. В этом случае, как и для ПС(10), наиболее широкое плато наблюдается при $\sqrt{S_0} \approx 4$ ГэВ. Теперь для F_{η_c} находим:

$$F_{\eta_c} = 1,65 \pm 0,15.$$

С помощью формулы (11) имеем:

$$\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma) = (3,9 \pm 0,3) \text{ каВ}. \quad (13)$$



Р и с. 3. 1,2 -предсказание ПС(12) при $\sqrt{s_0} = 3,9$ и $4,0$ ГэВ,
с $m_c = 1,28$ ГэВ.

Отметим следующее обстоятельство: все наши расчеты проводятся с точностью до членов $O(\alpha_s)$. Однако, как показывает результат работы /9/, при использовании ПС вида (10) или (12), одновременно минимизируются $O(\alpha_s)$ -поправки, что связано с вычитанием однотипных α_s -вкладов в 3-точечные и 2-точечные амплитуды. Поэтому мы полагаем погрешность (13), связанную с отбрасыванием $O(\alpha_s)$ -членов, $\leq 10\%$.

5. Анализ распада $\psi' \rightarrow \eta_c \gamma$

Правила сумм, из которых можно определить матричный элемент перехода $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$, без учета степенных поправок были получены в первой из работ /II/. Известна также формула /15/, связывающая ширины $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$, $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ и $\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$. Степенные поправки к этому процессу впервые были рассчитаны в /8/ (см. также /II, I4/). В этих работах анализировались ПС для моментов амплитуд в точке $Q^2 = 0$ и использовались экспериментальные значения для матричных элементов переходов

$$F_{\psi' \eta_c} \quad \text{и} \quad F_{\psi' \eta_c'} (\approx F_{\eta_c' \psi}).$$

Запишем теперь борелевские ПС в виде:

$$g^R F_{\psi \eta_c} + g^h \frac{M_{\eta_c}}{M_{\eta_c'}} \exp\left[-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{M_1^2}\right] F_{\eta_c' \psi} + g^h \frac{M_{\psi'}}{M_{\psi}^2} F_{\psi' \eta_c} \cdot \exp\left[-\frac{M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2}{M_2^2}\right] + g^h \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\eta_c}} \cdot \frac{M_{\psi'}}{M_{\psi}^2} \exp\left[-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{M_1^2} - \frac{M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2}{M_2^2}\right] F_{\psi' \eta_c'} =$$

$$= \frac{3}{2\pi^2} \frac{m_c}{M_{\psi}^2 M_{\eta_c}} \exp\left[\frac{M_{\eta_c}^2}{M_1^2} + \frac{M_{\psi}^2}{M_2^2}\right] \{A_{\psi}^0 + A_{\psi}^{(66)}\},$$

где: $A_{\psi}^0 = m_c^2 \int_{(1-v_0)/2}^{(1+v_0)/2} \exp\left[-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x\bar{x}}\right] \frac{x-\bar{x}}{(x\bar{x})^2} \ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) dx,$

$$A_{\psi}^{(66)} = -\frac{m_c^2}{2} \varphi \left\{ \int_0^1 \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x\bar{x}}\right) \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(x\bar{x})^4} + \frac{1}{(x\bar{x})^3} (-3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}) + \frac{1}{(x\bar{x})^2} (5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 12\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}) \right] dx \right\}; \alpha_1 = \frac{m_c^2}{M_1^2}, \alpha_2 = \frac{m_c^2}{M_2^2}.$$

Применяя снова дифференцирование по $1/M_1^2$ (или $1/M_2^2$), можно извлечь информацию о $F_{\psi' \eta_c'}$. При этом мы будем полагать $F_{\psi' \eta_c} \approx F_{\eta_c' \psi} \approx 0,14$ (экспериментальная величина). Дело в том, что зафиксировать по отдельности $F_{\psi' \eta_c'}$ и $F_{\eta_c' \psi}$ не удастся - вышеприведенные ПС не содержат деталей перехода $\psi' \rightarrow \eta_c \gamma$, имеющего чисто релятивистскую природу и, по-видимому, имеющего ненулевую ширину лишь вследствие наличия глюонных компонент в волновой функции (см. /24/).

Дифференцируя по $1/M_2^2$, записываем "стандартные" ПС:

$$g^h \frac{M_{\eta_c}}{M_{\eta_c'}} F_{\psi' \eta_c'} + g^h \frac{M_{\eta_c}}{M_{\eta_c'}} \exp\left[\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{M_1^2}\right] F_{\psi' \eta_c} = \quad (15)$$

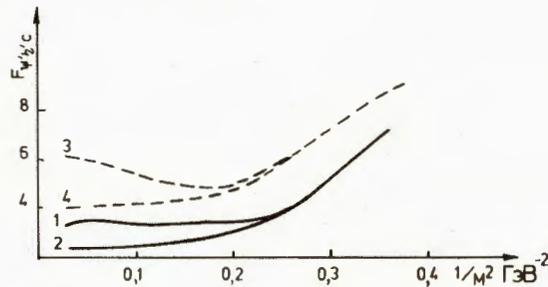
$$= \frac{3}{2\pi^2} \frac{m_c}{M_{\psi'}^2 M_{\eta_c'}} \frac{1}{M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2} \exp\left[\frac{M_{\psi'}^2}{M_2^2} + \frac{M_{\eta_c'}^2}{M_1^2}\right] \{A_{\psi'}^0 + A_{\psi'}^{(66)}\},$$

$$A_{\psi'}^0 = m_c^4 \int_{\frac{1-v_0}{2}}^{\frac{1+v_0}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x\bar{x}}\right) \frac{x-\bar{x}}{(x\bar{x})^3} \ln\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) dx - M_{\psi}^2 A_{\psi}^0.$$

$$\text{и} \quad A_{\psi'}^{(66)} = -\frac{m_c^4}{2} \varphi \int_0^1 e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{x\bar{x}}} \left\{ \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(x\bar{x})^5} + \frac{1}{(x\bar{x})^4} (-3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 5\alpha_1 - \alpha_2 - 4\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}) + \frac{1}{(x\bar{x})^3} (11\alpha_1 + 3\alpha_2 - 1 + 12\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}) + 8\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} - 4\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} + \frac{1}{(x\bar{x})^2} (3 - 24\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + 12\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}) \right\} dx$$

$$-\frac{M_\psi^2}{m_c^2} \left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(x\bar{x})^4} + \frac{1}{(x\bar{x})^3} \left(-3(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) + \frac{1}{(x\bar{x})^2} \left(5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 12 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) \right] dx.$$

В дальнейшем для упрощения анализа мы полагаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{a}{2}$. При экспериментальном значении $g' \approx 0,075$ результаты обработки ПС(15) представлены кривыми 3 и 4 на рис.4.



Р и с. 4. 1,2 — графики для ПС(17), 3,4 — для ПС(15) при $\sqrt{s_0} = 3,9; 4,0$ ГэВ; соответственно, $m_c = 1,28$ ГэВ.

Величина $F_{\psi \to \eta_c}$ определяется с погрешностью $> 10\%$ (не учитывая еще погрешность от неучета α_s -членов) и сильно зависит от величины s_0 . При $\sqrt{s_0} \approx 4$ ГэВ,

$$F_{\psi \to \eta_c} = 5,5 \pm 0,6. \quad (16)$$

Определим теперь, аналогично (10), правила сумм с подстановкой ПС для 2-точек. Найдем из (15), (6) и (7):

$$F_{\psi \to \eta_c} + \frac{h}{h'} \frac{M_{\eta_c}}{M_{\eta_c'}} \exp \left[\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{2m_c^2} a \right] F_{\psi \to \eta_c'} = 6 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\psi} m_c^2} \cdot \left(\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{M_{\psi}^2 - M_{\psi'}^2} \right)^{1/2} A_{\psi}^0 (A_g^0, A_{h'}^0)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{A_{\psi}^0}{A_{\psi'}^0} - \frac{A_g^0}{2A_g^0} - \frac{A_{h'}^0}{2A_{h'}^0} \right\}. \quad (17)$$

Результаты для $F_{\psi \to \eta_c}$ из ПС(17) соответствуют графикам 1 и 2 на

рис.4. Можно сказать, что $\sqrt{s_0} \approx 4$ ГэВ практически точно обрезает континуум высших состояний, и для матричного элемента получаем:

$$F_{\psi \to \eta_c} = 3,3 \pm 0,2. \quad (18)$$

Заметим, что и (16) и (18) попадают в экспериментально разрешенную область значений: $\Gamma(\psi \to \eta_c \gamma) = (0,27 \pm 2,8)$ кэВ^{25/}. Мы предпочитаем значение (18). Такое доверие к ПС(17) основано на том простом факте, что помимо наличия плато вообще и возможности выбора между различными плато при вариациях s_0 , мы требуем устойчивости результатов при изменениях m_c . Ясно, что схема ренормировок, используемая при вычислении α_s -вкладов, фиксирует определение m_c , однако мы получаем оценки матричных элементов с точностью до членов $O(\alpha_s)$ (еще раз упомянем, что ПС(16) ввиду сокращения однотипных α_s -членов от ПС(15), (6) и (7) весьма слабо меняется при включении α_s -поправок^{9/}). Все вышеупомянутые графики получены при $m_c = 1,28$ ГэВ. При изменении m_c от 1,28 ГэВ до $m_c = 1,44$ ГэВ, предсказания ПС(15) меняются на 30-40%, в то время как ПС(17) — всего на 5-10%.

Используя формулу

$$\Gamma(V_j \rightarrow P_i \gamma) = \frac{\alpha Q^2}{24} |F_{ij}| M_{V_j} \left(\frac{M_{V_j}}{M_{P_i}} \right)^2 \left(1 - \frac{M_{P_i}^2}{M_{V_j}^2} \right)^3 \quad (19)$$

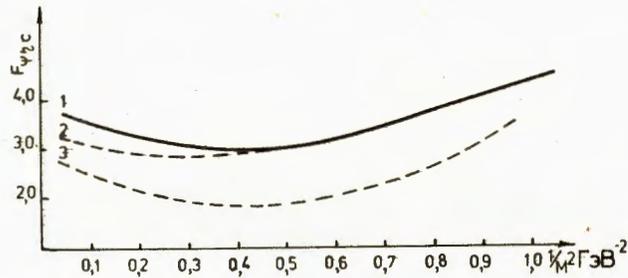
и значения $F_{\psi \to \eta_c}$ из (18), находим

$$\Gamma(\psi \to \eta_c \gamma) = (0,7 \pm 0,2) \text{ кэВ}.$$

Заметим также, что аналогичные ПС, дающие практически тот же результат, получаются при дифференцировании по $1/M_1^2$.

6. Борелевские ПС для распада $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$

Теперь у нас имеются все необходимые параметры для работы с ПС(14), где мы также положим $\alpha_1 = \alpha_2 = a/2$ (такая симметризация практически ($< 10\%$) не меняет результатов, аналогично^{9/}). Естественно, что не во всей области α_1, α_2 наблюдается плато, однако оно четко выделяется в треугольной зоне около диагонали $\alpha_1 = \alpha_2$ шириной $\leq 0,3 \alpha$. Графики представлены на рис. 5, и при $\sqrt{s_0} = 4$ ГэВ определяем $F_{\psi \to \eta_c} = 3,3 \pm 0,4$. Комбинируя теперь ПС(4), (5) и (14), строим новые ПС таким образом:



Р и с. 5. 1,2 -графики для ПС(14) при $\sqrt{s_0} = 3,9$ и $4,0$ ГэВ, $m_c = 1,28$ ГэВ. Кривая 3 - обработка ПС(14) при $\sqrt{s_0} = 4,0$ ГэВ, $m_c = 1,44$ ГэВ.

$$\frac{1}{2} \left\{ F_{\psi\eta_c} + \frac{h'}{h} \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\eta_c}} \exp\left(-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{2m_c^2}\right) F_{\eta_c'\psi} + \frac{g'}{g} \frac{M_{\psi'}}{M_{\psi}} \exp\left(-\frac{M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2}{2m_c^2}\right) F_{\psi'\eta_c} \right\}$$

$$+ \frac{g'}{g} \frac{h'}{h} \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\eta_c}} \frac{M_{\psi'}}{M_{\psi}} \exp\left(-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2 + M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2}{2m_c^2}\right) F_{\psi'\eta_c'} \quad (20)$$

$$= G \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\eta_c'}}{M_{\psi} m_c^2} A_{\psi}^c \left(A_{\eta_c}^c A_{\psi}^c \right)^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{A_{\psi}^c}{A_{\psi}^c} - \frac{A_{\eta_c}^c}{2A_{\eta_c}^c} - \frac{A_{\eta_c}^c}{2A_{\eta_c}^c} \right\}$$

$$\text{где } Z = \left[1 + \frac{M_{\eta_c'}^2}{M_{\eta_c}^2} \exp\left(-\frac{M_{\eta_c'}^2 - M_{\eta_c}^2}{2m_c^2}\right) \frac{h'^2}{h^2} \right]^{-1/2} \left(1 + \frac{M_{\psi'}^2}{M_{\psi}^2} \exp\left(-\frac{M_{\psi'}^2 - M_{\psi}^2}{2m_c^2}\right) \frac{g'^2}{g^2} \right)^{-1/2}$$

В левой части мы используем экспериментальное значение $g \approx 0,125$. При $M_{\psi} = 3,095$ ГэВ, $M_{\psi'} = 3,685$ ГэВ, $m_c = 1,28$ ГэВ для $F_{\psi\eta_c}$ (при $F_{\psi'\eta_c'} = 3,3$) получаем из графиков на рис.6: $F_{\psi\eta_c} = 3,9 \pm 0,2$.

Подставляя далее $F_{\psi\eta_c}$ в (19), найдем:

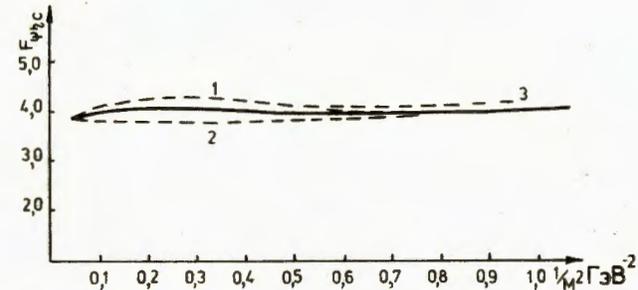
$$\Gamma(\psi/\psi \rightarrow \eta_c \chi) = (2,6 \pm 0,3) \text{ кэВ} \quad (21)$$

Из ПС(14):

$$\Gamma(\psi/\psi \rightarrow \eta_c \chi) = (1,9 \pm 0,4) \text{ кэВ.} \quad (22)$$

Проверим чувствительность наших ПС к изменению m_c , полагая теперь $m_c = 1,44$ ГэВ. Обработывая ПС(14), получаем кривую 3 на рис. 5, а

для ПС(20) - кривую 3 на рис. 6. То есть ПС(14) дают для $F_{\psi\eta_c}$ значение на 30-40% ниже, чем при $m_c = 1,28$ ГэВ (необходимо также учитывать, что и вклады $\sim \alpha_s$ в ПС(14), как и в^{9/}, в этой области $\sim 10\%$), в то время, как ПС(20) сдвигают величину $F_{\psi\eta_c}$ не более, чем на 5% (и α_s -вклады здесь менее существенны - см. выше).



Р и с. 6. 1,2 -графики для ПС(20) при $\sqrt{s_0} = 3,9$ и $4,0$ ГэВ, $m_c = 1,28$ ГэВ, Кривая 3 - обработка ПС(20) при $\sqrt{s_0} = 4,0$ ГэВ, $m_c = 1,44$ ГэВ.

Поэтому мы окончательно полагаем:

$$\Gamma(\psi/\psi \rightarrow \eta_c \chi) = (2,6) + 0,4 \text{ кэВ.}$$

7. З а к л ю ч е н и е

Прояснение вопроса о ширинах радиационных распадов чармония есть необходимый этап в исследованиях тяжелых $q\bar{q}$ -систем, тесно связанный с построением потенциальных моделей^{26,27/}, с разработкой методических принципов в приложениях ПС, с проверкой гипотезы Апфельквиста-Политцера^{28/}. Последний вопрос, в свою очередь, связан с конкретным определением величины α_s . В отличие от работ^{13,29/}, принимающих $\alpha_s = 0,2$ (при этом α_s -поправки к формуле Апфельквиста-Политцера $\leq 50-60\%$, как в^{29/}, или $\approx 22 \frac{\alpha_s}{\pi}$, следуя^{30/}), идеология работ^{31/} позволяет более корректно представить теоретическое значение отношения $\Gamma(\eta_c \rightarrow hadr)/\Gamma(\eta_c \rightarrow \chi)$ с точностью до $O(\alpha_s^2)$. При этом $\alpha_s = \alpha_s(Q^*)$, а Q^* (с точностью до $O(\alpha_s)$) определяется так, чтобы α_s не зависела от числа ароматов N_f . Как показано в^{31/}, тем самым фиксируется близкое к минимизированному разложение по α_s . Если при $\alpha_s \approx 0,2$,

$$\frac{\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)}{\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)} = \frac{9}{8} \frac{\alpha_s^2}{\alpha_{QED}^2} (1 + c(\alpha_s)) \approx 845,$$

то при $Q^* = 0,26 M_{\eta_c} / 3I$, $\alpha_s \approx 0,36$ ($\Lambda = 100$ МэВ) и $\Gamma(\eta_c \rightarrow \text{hadr}) / \Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma) \approx 3000$. Взяв $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ из (I3), находим, что по рецепту $3I / \Gamma(\eta_c \rightarrow \text{hadr}) = (14 \pm 2)$ МэВ, что вполне согласуется с экспериментальным значением $\Gamma(\eta_c \rightarrow \text{hadr})_{\text{эксп.}} = (12,4 \pm 4,1)$ МэВ^{32/}. При $\alpha_s = \alpha_s(m_c^2) \approx 0,3$, $\Gamma(\eta_c \rightarrow \text{hadr})_{\text{теор.}} = (9 \pm 1)$ МэВ. С другой стороны, с формулой Апфельквиста-Политцера может быть связано само определение величины α_s , что кажется более естественным, чем предлагаемое в^{29/}, тогда мы получили бы (для $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ из (I3)) для α_s значение в интервале 0,3 - 0,36. Это вполне соответствует определению характерного масштаба для данного процесса $\sim m_c^2$ (см. также^{33/}). Заметим, что ранее полученные оценки $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ найдены при несколько отличающихся значениях параметров и содержат еще существенную зависимость от масс.

Предлагаемый в настоящей работе вариант ПС для 3-точечных амплитуд, содержащих зависимость от m_c , конечно, менее прост для численной обработки, чем ПС для степенных моментов в точке $Q^2 = 0$, здесь глубже спрятана зависимость от m_c (в членах, содержащих α , ψ , ψ_0 , φ). Однако существенным достоинством такого варианта ПС является гораздо более слабая чувствительность к выбору m_c , практическая независимость от величины α_s -поправок, надежное выделение областей стабильности по M^2 , возможность фиксации параметра S_0 и, что также важно, возможность получения неплохих оценок для ширины распадов возбужденных состояний чармония. Математически ситуация кажется ясной - при дифференцировании по $1/M^2$ возрастает роль степенных поправок, и плато может резко "схлопнуться", однако при делении на 2-точечные ПС и разложении с нужной точностью этого отношения, происходит отчасти компенсация G^2 -поправок, вследствие чего появляется возможность фиксирования соответствующих матричных элементов. Хотя, конечно, плато здесь не такое широкое, как для основных переходов и сдвинуто в область больших M^2 (см. рис.1-6). Полученные результаты для $F_{\eta_c' \rightarrow 2\gamma}$ и $F_{\psi' \eta_c'}$ используются далее при обработке ПС для основных переходов, поэтому результат (21) имеет погрешность 10-15%, в отличие от 50%-ной погрешности по оценке^{16/}, и практически не зависит от выбора m_c . Аналогичная компенсация происходит для α_s -членов. Можно сказать, что ПС для 3-точечных амплитуд

содержат в себе помимо информации об интересующих нас матричных элементах еще информацию о вычетах соответствующих токов. Поэтому деление на 2-точечные ПС кажется оправданным - такой прием как бы "вычитает" ненужные детали из ПС для матричных элементов переходов. Можно, конечно, сдвинуться в область $Q^2 \neq 0$ при определении степенных моментов^{16/}, однако это приводит к менее компактным ПС.

Наши результаты для $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ достаточно близки к результатам^{10,12/}, что также отражает тот факт, что в ПС(I2) происходит некий эффективный учет α_s -поправок. Приведенное значение для $\Gamma(\eta_c \rightarrow 2\gamma)$ немного уменьшает оценку $\Gamma(J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma)$ по формуле^{15/} но не позволяет тем не менее опуститься ниже 1,8 кэВ.

Полученные недавно верхние оценки радиационных ширины чармония в релятивистской теории связанных состояний^{34/} хорошо согласуются с нашими расчетами.

Предлагаемая методика работы с ПС для тяжелых кварков, родственная ПС для легких мезонов, позволяет сделать вывод о достаточно надежных результатах для процессов $\eta_c(\eta_c') \rightarrow 2\gamma$ и $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$, $\psi' \rightarrow \eta_c' \gamma$. Полученное противоречие с имеющимися данными можно также считать твердо установленным, что впрямую ставит вопрос как о генерации новых идей в физике чармония, так и о желательном повторении эксперимента.

Авторы благодарят В.А. Нестеренко и С.Н. Николаева за обсуждение деталей работы.

Л и т е р а т у р а

1. Shifman M.A. et al. Phys.Lett. 77B (1978) 80.
2. Novikov V.A. et al. Phys.Rep. 41 (1978) 1.
3. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. Nucl.Phys. B147 (1979) 385.
4. Reinders L.J., Rubinstein N.R., Yazaki S. Nucl.Phys. B186 (1981) 109; B196 (1982) 125.
5. Reinders L.J., Rubinstein N.R., Yazaki S. Phys.Lett. B95 (1980) 103; B97 (1980) 257.
6. Nesterenko V.A., Radyushkin A.V. Phys.Lett., 115B (1982) 410; Нестеренко В.А., Радюшкин А.В. Письма в ЖЭТФ, 35 (1982) 488, ЯФ 39(1984) I287.
7. Радюшкин А.В. Труды УИ семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. Изд.ИФВЭ, Протвино, 1984, I63.
8. Бейлин В.А., Радюшкин А.В. ЯФ 39 (1984) I270.

9. Beilin V.A., Radyushkin A.V. Nucl.Phys. B260 (1985) 61.
10. Reinders L.J. et al. Phys.Lett. 113B (1982) 411.
11. Khodjamirian A.Yu. Phys.Lett. 90B (1980) 460,
Ходжамирян А.Ю. ЯФ 39 (1984) 970.
12. Kirschner R., Schiller A. Z.Phys. C16 (1982) 141.
13. Алiev Т.М. ЯФ 37 (1983) 403.
14. Aliev T.M. Z.Phys. C26 (1984) 275.
15. Shifman M.A. Z.Phys. C4 (1980) 345, C6 (1980) 282.
16. Reinders L.J. et al. Preprint CERN-TH 4079/84.
17. Bertlmann R.A. Acta Phys.Austr. 53 (1981) 305.
18. Bertlmann R.A. Phys.Lett. 106B (1981) 336; 116B (1982) 182;
Nucl.Phys. 204B (1982) 387.
19. Bell J.C., Bertlmann R.A. Nucl.Phys. B177 (1981) 218, B187 (1981)
281.
20. Nikolaev S.N., Radyushkin A.V. Phys.Lett. 110B (1982) 476; 124B
(1983) 243; Nucl.Phys. 213B (1983) 285.
21. Reinders L.J. et al. Phys.Lett. 103B (1981) 103.
22. Bertlmann R.A., Neufeld H. Preprint Uw ThPh-1984-34.
23. Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R. Nucl.Phys. B201 (1982), 492.
24. Shifman M.A., Vysotsky M.I. Z.Phys. C16 (1981) 131.
25. Gaiser J. Preprint SLAC-PUB-2887 (1982).
26. Eichten E. Phys.Rev. D21 (1980) 203.
27. Quigg C, Rosner J.L. Phys.Rep 56 (1979) 169.
28. Appelquist T., Politzer H.D. Phys.Rev.Lett. 341 (1975) 43.
29. Shifman M.A. Proc. Intern. Symp. Photon and Lepton Interact. at
High Energies, Bonn, 1981, 303.
30. Barbieri R. et al. Nucl.Phys. B154 (1979) 535.
31. Brodsky S., Lepage G.V., Mackenzie P.B. Phys.Rev. D28 (1983) 228.
32. Scharre D.L. Proc. Intern. Symp. Photon and Lepton Interact. at
High Energies, Bonn, 1981, 163.
33. Celmaster W., Siverson D. Phys.Rev. D23 (1981) 227.
34. Savrin V.I., Skachkov M.B., Shichanin S.A. JINR Communication
P2-85-62, 1985, Dubna.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1985 года.

Бейлин В.А., Радюшкин А.В. P2-85-974
Борелевские правила сумм
для радиационных распадов чармония в КХД

Предложены борелевские правила сумм для трехточечных корреляторов токов, содержащих c -кварки. На основе этих правил сумм вычислены ширины распадов $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$, $\psi' \rightarrow \eta_c' \gamma$, $\eta_c \rightarrow 2\gamma$, $\eta_c' \rightarrow 2\gamma$. Продемонстрировано, что зависимость результатов от параметра массы c -кварка является слабой. Метод применим и к расчету других радиационных распадов состояний чармония.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Beilin V.A., Radyushkin A.V. P2-85-974
Borelized Sum Rules
for the Radiative Decays of Charmonium in QCD

The borelized sum rules are proposed for the 3-point correlators of the currents composed of the c -quarks. On the basis of these sum rules the widths are calculated of the decays $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$, $\psi' \rightarrow \eta_c' \gamma$, $\eta_c \rightarrow 2\gamma$, $\eta_c' \rightarrow 2\gamma$. It is demonstrated that the results are rather insensitive to the choice of the c -quark mass parameter. The method is applicable also for the calculation of other radiative decays of the charmonium states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985