объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-958

В.К.Мельников

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Направлено в журнал "Математический сборник"

1985

В настоящей работе речь идет о нелинейных эволюционных уравнениях, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора $\mathcal{L}-\eta I$ вида

$$\mathcal{L}-\eta I=\begin{vmatrix} L-\varkappa\partial_y-\eta & v \\ w & \partial_x \end{vmatrix}, \tag{I}$$

где ∂_x и ∂_y – операторы дифференцирования соответственно по пространственным переменным x и y, оператор L определяется равенством

$$L=\partial_x^{\kappa_0+2}+\sum_{\kappa=0}^{\kappa_0} u_\kappa \partial_x^\kappa, \quad \kappa_0\geq 0, \tag{2}$$

коэффициенты u_0, ..., u_{κ_0}, v, w являются функциями координат x, y и времени t, параметры $\varkappa$ и η принимают, вообще говоря, комплексные значения, а матрица $I=diag(1,0)$. Как уже отмечалось ранее /I-2/, среди этих уравнений имеется несколько важных с прикладной точки зрения.

Применение метода обратной задачи рассеяния к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений имеет уже почти двадцатилетнюю историю, начинающуюся с пионерской работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры /3/. За это время метод обратной задачи рассеяния был применен к интегрированию значительного числа различных нелинейных эволюционных уравнений. Полученные в этом направлении новые результаты опубликованы в большом числе статей и нескольких монографиях. Более того, в последние годы идеи метода обратной задачи рассеяния были успешно использованы для нахождения точных решений некоторых нелинейных эволюционных уравнений с двумя и более пространственными переменными /4-8/. Однако оператор $\mathcal{L}-\eta I$ вида (I), (2) с этой целью впервые был использован сравнительно недавно в работах автора /9-I2/. При этом оказалось, что решение обратной задачи рассеяния для этого оператора имеет свои существенные особенности. Их причиной является то обстоятельство, что для оператора $\mathcal{L}-\eta I$ не удается написать интегральное уравнение, аналогичное уравнению Гельфанда – Левитана /I3/. Этот факт является одной из причин, по которым метод "одевания" /5/ оказался непригодным для нахождения решений рассматриваемых здесь нелинейных эволюционных уравнений. Используемая в настоящей работе система уравнений (I.I), (I.2) сходна с системами уравнений, которые получаются из интегральных уравнений типа Гельфанда – Левитана с помощью преобразования Фурье – Лапласа. Однако в данном случае при получении системы (I.I), (I.2) были использованы другие соображения.

Структура статьи такова. С помощью решений системы (I.I), (I.2) находятся коэффициенты и собственные функции оператора $\mathcal{L}-\eta I$. Далее показывается, что найденные собственные функции являются также собственными функциями некоторого оператора эволюции $\mathcal{T}$ вида

$$\mathcal{T}=\partial_t+\mathcal{A}, \tag{3}$$

где ∂_t – оператор дифференцирования по t, а $\mathcal{A}$ – дифференциальный по x оператор, коэффициенты которого также определяются с помощью решений системы (I.I), (I.2). Этого факта оказывается достаточно для доказательства утверждения, что построенные с помощью решений системы (I.I), (I.2) операторы $\mathcal{L}-\eta I$ и $\mathcal{T}$ вида (I)-(3) удовлетворяют операторному соотношению

$$[\mathcal{T},\mathcal{L}-\eta I]=\mathcal{B}\cdot(\mathcal{L}-\eta I), \tag{4}$$

где $\mathcal{B}$ – дифференциальный по x оператор, коэффициенты которого явно определяются с помощью решений системы (I.I), (I.2). При указанном ниже выборе операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ операторное соотношение (4) эквивалентно системе нелинейных эволюционных уравнений относительно коэффициентов оператора $\mathcal{L}-\eta I$. Отсюда следует, что решение системы (I.I), (I.2) позволяет найти явное решение получаемых с помощью (4) нелинейных эволюционных уравнений.

§ I. Система (I.I), (I.2) и свойства ее решений

Исходным пунктом наших рассмотрений является приводимая ниже система линейных алгебраических уравнений. С ее помощью будут получены явные выражения для решений интересующих нас нелинейных эволюционных уравнений.

Итак, рассмотрим систему

$$(\mathbb{1}+B)X^{+}+J^{+}\lambda=0, \tag{I.I}$$

$$(\mathbb{1}+B)X^{-}=J^{-}\lambda, \tag{I.2}$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица порядка r_0+2r_1, а B – квадратная матрица того же порядка с элементами $B_{r,s}$. Мы будем предполагать, что отличные от нуля элементы матрицы B имеют вид

$$B_{r,s}=\begin{cases}\dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x+\tau_r y]}{\omega_r-\sigma_s}, & 1\le r\le r_0,\ 1\le s\le r_0+r_1,\\[2mm] -\dfrac{f_r}{\sigma_r^{K_0+2}-\omega_s^{K_0+2}}, & r_0<r\le r_0+r_1<s\le r_0+2r_1,\\[2mm] \dfrac{f_r\exp[(\omega_r-\sigma_s)x]}{\omega_r-\sigma_s}, & 1\le s\le r_0+r_1<r\le r_0+2r_1.\end{cases} \tag{I.3}$$

Все остальные элементы матрицы B предполагаются равными нулю, т.е.

$$B_{r,s}=0\text{, если }\begin{cases}1)\ 1\le r\le r_0,\ r_0+r_1<s\le r_0+2r_1,\\ 2)\ r_0<r\le r_0+r_1,\ 1\le s\le r_0+r_1,\\ 3)\ r_0+r_1<r,s\le r_0+2r_1.\end{cases} \tag{I.4}$$

Вектор λ имеет r_0+2r_1 компоненты λ_r вида

$$\lambda_r=\begin{cases}f_r\exp(\omega_r x+\tau_r y)\text{, если } 1\le r\le r_0,\\ f_r\text{, если } r_0<r\le r_0+r_1,\\ f_r\exp(\omega_r x)\text{, если } r_0+r_1<r\le r_0+2r_1.\end{cases} \tag{I.5}$$

При этом величины $f_1,\dots,f_{r_0+2r_1},\omega_1,\dots,\omega_{r_0},\omega_{r_0+r_1+1},\dots,\omega_{r_0+2r_1},\sigma_1,\dots,\sigma_{r_0+r_1},\tau_1,\dots,\tau_{r_0}$ считаются заданными и являются параметрами системы (I.I),(I.2). От координат x, y все они не зависят. Мы будем предполагать, что при $r=1,\dots,r_0$ выполняется условие

$$\omega_r^{K_0+2}-\sigma_r^{K_0+2}=\varkappa\tau_r, \tag{I.6}$$

где $\varkappa$ – параметр, входящий в определение оператора $\mathcal{L}-\eta I$ вида (I). Векторы X^+ и X^- соответственно с компонентами X_1^+, ..., $X^+_{r_0+2r_1}$ и X_1^-, ..., $X^-_{r_0+2r_1}$ являются неизвестными и подлежат определению с помощью решения системы (I.I),(I.2). Эти векторы обладают рядом замечательных свойств. Именно с их помощью будут построены решения рассматриваемых здесь нелинейных эволюционных уравнений. Наконец, матрицы J^+ и J^- являются проекторами в (r_0+2r_1)-мерном векторном пространстве, причем матрица J^+ проектирует на подпространство, образуемое векторами, у которых равны нулю все компоненты с номерами $r=r_0+1$, ..., r_0+r_1, а матрица J^- проектирует на дополнительное подпространство, т.е. на подпространство, образуемое векторами, у которых отличны от нуля только компоненты с номерами $r=r_0+1$, ..., r_0+r_1. Другими словами, справедливы равенства

$$J^+=\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0,1,\dots,1),$$

$$J^-=\mathrm{diag}(0,\dots,0,1,\dots,1,0,\dots,0), \tag{I.7}$$

где первые группы соответственно единиц и нулей имеют длину r_0, а вторые и третьи – имеют длину r_1.

Пусть $\mathcal{E}$ и J_0 – квадратные матрицы порядка r_0+2r_1, имеющие вид

$$\mathcal{E}=\begin{vmatrix}\mathbb{1}_{r_0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{r_1}\\ 0 & \mathbb{1}_{r_1} & 0\end{vmatrix},\quad J_0=\begin{vmatrix}\mathbb{1}_{r_0} & 0 & 0\\ 0 & \mathbb{1}_{r_1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}, \tag{I.8}$$

где 1_{r_0} и 1_{r_1} – единичные матрицы соответственно порядка r_0 и r_1.
Положим

$$J_1 = J^+ - J_0 J^+ ,\quad J_0' = J_0 J^+ ,\quad J_1' = J_1 + J^- \qquad (I.9)$$

Согласно (I.7)-(I.9) справедливы равенства

$$J^+ = \mathcal{E} J_0 \mathcal{E} ,\quad J^- = J_0 - J_0 J^+ ,\quad J_1 = \mathcal{E} J^- \mathcal{E} . \qquad (I.10)$$

Пусть, далее, ω, σ, τ – диагональные матрицы порядка r_0+2r_1 вида

$$\begin{aligned}
&\omega = diag(\omega_1, \ldots, \omega_{r_0}, \sigma_{r_0+1}, \ldots, \sigma_{r_0+r_1}, \omega_{r_0+r_1+1}, \ldots, \omega_{r_0+2r_1}),\\
&\sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_0}, \sigma_{r_0+1}, \ldots, \sigma_{r_0+r_1}, \omega_{r_0+r_1+1}, \ldots, \omega_{r_0+2r_1}),\\
&\tau = diag(\tau_1, \ldots, \tau_{r_0}, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0).
\end{aligned} \qquad (I.11)$$

На основании (I.6) матрицы ω, σ, τ удовлетворяют соотношению

$$\omega^{\kappa_0+2} - \sigma^{\kappa_0+2} = \kappa \tau . \qquad (I.12)$$

Положим

$$\omega_0 = J^+ \omega ,\quad \sigma_0 = J_0 \sigma . \qquad (I.13)$$

Возьмем, далее, вектор l с r_0+2r_1 компонентами l_r вида

$$l_r = \begin{cases} exp(-\sigma_r x), \text{ если } 1 \le r \le r_0+r_1 ,\\ 1, \text{ если } r_0+r_1 < r \le r_0+2r_1 . \end{cases} \qquad (I.14)$$

С помощью (I.3)-(I.5), (I.7)-(I.11),(I.13) и (I.14) легко убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial B}{\partial x} = \omega_0 B - B\sigma_0 = J^+ \lambda \tilde{l} J_0 ,\quad \frac{\partial B}{\partial y} = \tau B ,\\
&\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \omega_0 \lambda ,\quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \tau \lambda ,\quad \frac{\partial l}{\partial x} = -\sigma_0 l ,
\end{aligned} \qquad (I.15)$$

где знак " ~ " означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора – столбца к вектору – строке, а произведение $\lambda \tilde{l}$ вектора – столбца λ на вектор – строку $\tilde{l}$ понимается как произведение матриц и является квадратной матрицей порядка r_0+2r_1 с элементами $\lambda_r l_s$, $1 \le r$, $s \le r_0+2r_1$.

Предположим теперь, что в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$ выполнено неравенство

$$D = det(1 + B) \ne 0 . \qquad (I.16)$$

С помощью решения системы (I.1), (I.2) определим величины $K_n^\pm$ и $W_n^\pm$, полагая

$$K_n^\pm = \tilde{l} \sigma^n J_0 X^\pm ,\quad W_n^\pm = \tilde{l} J_0 \frac{\partial^n X^\pm}{\partial x^n} . \qquad (I.17)$$

Так, определенные величины $K_n^\pm$ и $W_n^\pm$ связаны соотношениями

$$K_n^\pm = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} W_{n-m}^\pm , \qquad (I.18)$$

$$W_n^\pm = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \frac{\partial^m K_{n-m}^\pm}{\partial x^m} . \qquad (I.19)$$

Действительно, на основании (I.15) и (I.17) правая часть $R_n^\pm$ равенства (I.18) может быть записана в виде

$$R_n^\pm = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha C_m^\alpha \tilde{l} \sigma^\alpha J_0 \frac{\partial^{n-\alpha} X^\pm}{\partial x^{n-\alpha}} .$$

Изменив порядок суммирования, получаем

$$R_n^\pm = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{m=\alpha}^{n} (-1)^{m-\alpha} C_n^m C_m^\alpha \tilde{l} \sigma^\alpha J_0 \frac{\partial^{n-\alpha} X^\pm}{\partial x^{n-\alpha}} .$$

Далее, в силу равенства

$$\sum_{m=\alpha}^{n} (-1)^{m-\alpha} C_n^m C_m^\alpha = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha = n ,\\ 0, \text{ если } \alpha < n , \end{cases}$$

находим, что $R_n^\pm = \tilde{l} \sigma^n J_0 X^\pm$, т.е. с учетом (I.17) отсюда следует справедливость соотношения (I.18). Аналогичным образом проверяется справедливость соотношения (I.19).

Положим теперь

$$u_{\kappa_0+2} \equiv 1 , \qquad (I.20)$$

а далее, используя решение системы (I.1), (I.2), определим функции u_{κ_0+1}, ..., u_0 посредством рекуррентного соотношения

$$u_\kappa = K^+_{\kappa_0-\kappa+1} - \sum_{p=0}^{\kappa_0-\kappa+1} \sum_{q=0}^{p} u_{p+\kappa+1} C^\kappa_{q+\kappa} \frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q} . \qquad (I.21)$$

Нетрудно убедиться, что согласно (I.17),(I.18),(I.20) и (I.21) имеем

$$\begin{aligned}
&u_{\kappa_0+1} \equiv 0 ,\quad u_{\kappa_0} = -(\kappa_0+2) \frac{\partial W_0^+}{\partial x} ,\\
&u_{\kappa_0-1} = \frac{\kappa_0-1}{2} \frac{\partial u_{\kappa_0}}{\partial x} - (\kappa_0+2) \frac{\partial W_1^+}{\partial x} - u_{\kappa_0} W_0^+ .
\end{aligned} \qquad (I.22)$$

Возьмем теперь оператор L вида (2), коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентному соотношению (I.21). Определим далее функции v и w посредством равенств

$$v = \tilde{l} J_1 X^+ ,\quad w = -W_0^- . \qquad (I.23)$$

Тогда справедлива следующая

Теорема I. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$ выполнено неравенство (I.16), то решение X^+, X^- системы (I.1), (I.2) в этой окрестности удовлетворяет соотношениям

$$\left(L - \varkappa \frac{\partial}{\partial y}\right) X^+ + v X^- = \sigma^{K_0+2} X^+, \tag{I.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} X^- + \omega X^+ = 0. \tag{I.25}$$

Доказательство этой теоремы распадается на несколько этапов, некоторые из которых ради удобства выделены в самостоятельные утверждения.

<u>Лемма I.</u> Если X^+ удовлетворяет уравнению (I.I), а величины W_n^+ определены посредством (I.I7), то при любом $n \geq 0$ справедливо соотношение

$$(1 + B)\frac{\partial^n X^+}{\partial x^n} + S_n + \omega^n J^+ \lambda = 0, \tag{I.26}$$

где $S_0 \equiv 0$, а при $n > 0$ имеем

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{m} \omega^\alpha J^+ \lambda C_m^\alpha \frac{\partial^{m-\alpha} W_{n-m-1}^+}{\partial x^{m-\alpha}}. \tag{I.27}$$

Доказательство. При $n = 0$ справедливость (I.26) очевидна. Предположим, что это соотношение справедливо при всех $n \leq n'$, $n' \geq 0$. Покажем, что отсюда следует справедливость (I.26) при $n = n'+1$. Действительно, дифференцируя равенство (I.26) по x при $n = n'$, на основании (I.I5) и (I.I7) получаем соотношение

$$(1 + B)\frac{\partial^{n'+1} X^+}{\partial x^{n'+1}} + J^+ \lambda W_{n'}^+ + \frac{\partial}{\partial x} S_{n'} + \omega^{n'+1} J^+ \lambda = 0$$

С другой стороны, в силу (I.I5) и (I.27) имеем

$$S_{n+1} = \frac{\partial S_n}{\partial x} + J^+ \lambda W_n^+.$$

Отсюда следует справедливость (I.26) при $n = n'+1$.

Лемма доказана.

<u>Лемма 2.</u> Если матрицы B, ω, σ и функция v определены с помощью (I.3),(I.4),(I.II) и (I.23),то решение X^+ уравнения (I.I) удовлетворяет равенству

$$\left(\omega^{K_0+2} B - B \sigma^{K_0+2}\right) X^+ = -J^- \lambda v + \sum_{K=0}^{K_0+1} \omega^K J^+ \lambda K_{K_0-K+1}^+. \tag{I.28}$$

Доказательство. Положим

$$\omega^{K_0+2} B - B \sigma^{K_0+2} = \omega_0^{K_0+2} B - B \sigma_0^{K_0+2} + \Delta, \tag{I.29}$$

где

$$\Delta = \left(\omega^{K_0+2} - \omega_0^{K_0+2}\right) B - B\left(\sigma^{K_0+2} - \sigma_0^{K_0+2}\right).$$

Согласно (I.3), (I.4),(I.II) и (I.I3) получаем, что у матрицы Δ равны нулю все элементы, кроме тех, которые стоят на пересечении строк с номерами r_0+1, ..., r_0+r_1 и столбцов с номерами $r_0+r_1+1, \dots, r_0+2r_1$. Расположенный здесь минор Δ_0 имеет вид

$$\Delta_0 = \alpha^{K_0+2} B_0 - B_0 \beta^{K_0+2},$$

где B_0 – расположенный аналогичным образом минор матрицы B, а

$$\alpha = diag(\sigma_{r_0+1}, \dots, \sigma_{r_0+r_1}),$$

$$\beta = diag(\omega_{r_0+r_1+1}, \dots, \omega_{r_0+2r_1}).$$

Отсюда на основании (I.3) и (I.7) следует, что последние r_1 столбцов матрицы Δ совпадают между собой и равны вектору $-J^-\lambda$. С учетом (I.23) это значит, что

$$\Delta X^+ = -J^- \lambda v. \tag{I.30}$$

Далее, воспользуемся тождеством

$$\omega_0^{K_0+2} B - B \sigma_0^{K_0+2} = \sum_{K=0}^{K_0+1} \omega_0^K (\omega_0 B - B \sigma_0) \sigma_0^{K_0-K+1}.$$

Поскольку в силу (I.I3), (I.I5) и (I.I7) справедливо равенство

$$(\omega_0 B - B \sigma_0) \sigma_0^{K_0-K+1} X^\pm = J^+ \lambda K_{K_0-K+1}^\pm,$$

то с учетом (I.I3) получаем

$$\left(\omega_0^{K_0+2} B - B \sigma_0^{K_0+2}\right) X^\pm = \sum_{K=0}^{K_0+1} \omega^K J^+ \lambda K_{K_0-K+1}^\pm. \tag{I.3I}$$

Таким образом, из равенств (I.29)-(I.3I) следует справедливость (I.28).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Умножим равенство (I.26) на u_n и просуммируем по n от нуля до K_0+2. В результате,согласно определению оператора L, получаем соотношение

$$(1 + B) L X^+ + S + \sum_{n=0}^{K_0+2} \omega^n J^+ \lambda u_n = 0, \tag{I.32}$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{K_0+2} u_n S_n. \tag{I.33}$$

Далее, дифференцируя уравнение (I.I) по y, с учетом (I.I5) находим, что

$$(1 + B)\frac{\partial X^+}{\partial y} + \tau B X^+ + \tau \lambda = 0.$$

Умножим теперь это равенство на $\varkappa$ и вычтем из (I.32). После несложных преобразований, основанных на (I.I2) и (I.20), получаем соотношение

$$(1+B)\left(L-\varkappa\frac{\partial}{\partial y}\right)X^+ + S - \varkappa\tau B X^+ + \sum_{k=0}^{k_0+1}\omega^k J^+\lambda u_k + \sigma^{k_0+2}J^+\lambda = 0. \tag{I.34}$$

Умножим, наконец, уравнение (I.I) слева на матрицу σ^{k_0+2} и вычтем полученный результат из (I.34). В силу (I.I2) имеем

$$(1+B)\left[\left(L-\varkappa\frac{\partial}{\partial y}\right)X^+ - \sigma^{k_0+2}X^+\right] + S - \left(\omega^{k_0+2}B - B\sigma^{k_0+2}\right)X^+ + \sum_{k=0}^{k_0+1}\omega^k J^+\lambda u_k = 0.$$

С помощью (I.28) и уравнения (I.2) это равенство преобразуется к виду

$$(1+B)\left[\left(L-\varkappa\frac{\partial}{\partial y}\right)X^+ + \upsilon X^- - \sigma^{k_0+2}X^+\right] + R + S = 0,$$

где

$$R=\sum_{k=0}^{k_0+1}\omega^k J^+\lambda\left(u_k - K^+_{k_0-k+1}\right).$$

С другой стороны, изменив порядок суммирования в выражении (I.33), на основании (I.27) находим, что

$$S=\sum_{k=0}^{k_0+1}\sum_{p=0}^{k_0-k+1}\sum_{q=0}^{p}\omega^k J^+\lambda u_{p+k+1} C^k_{q+k}\frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Отсюда согласно (I.2I) следует, что $R+S=0$. Это значит, что в силу (I.I6) справедливо (I.24).

Продифференцируем теперь уравнение (I.2) по x. С помощью (I.5), (I.7),(I.I5), (I.I7) и (I.23) находим, что

$$(1+B)\frac{\partial X^-}{\partial x} - \omega J^+\lambda = 0,$$

т.е. с учетом (I.I) имеем

$$(1+B)\left(\frac{\partial X^-}{\partial x}+\omega X^+\right)=0.$$

Отсюда на основании (I.I6) следует справедливость (I.25).

Следствие I. Из доказанной теоремы следует, что при указанном выше выборе коэффициентов оператора $\mathcal{L}-\eta I$ вектор $X_r=(X^+_r, X^-_r)$

удовлетворяет уравнению $(\mathcal{L}-\eta_r I)X_r=0$, если при $r=1,\dots,r_0+r_1$ положить $\eta_r=\sigma_r^{k_0+2}$, а при $r=r_0+r_1+1,\dots,r_0+2r_1$ считать $\eta_r=\omega_r^{k_0+2}$.

Предположим теперь, что входящие в систему (I.I), (I.2) величины $f_1,\dots,f_{r_0+2r_1}$ зависят от времени t так, что выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial t}+c\left(\omega_0^{n_0+2}-\sigma_0^{n_0+2}\right)f=0, \tag{I.35}$$

где f – вектор с компонентами $f_1,\dots,f_{r_0+2r_1}$, величина $c\in\mathbb{C}$ и является константой, т.е. от x, y, t не зависит, а целое число $n_0\geq 0$. О параметрах ω_r, σ_r, τ_r будем предполагать, что они от t не зависят. Предположим, далее, что в некоторой окрестности точки $x=x_0$, $y=y_0$, $t=t_0$ выполнено неравенство (I.I6). Используя решение X^+ системы (I.I), определим оператор A вида

$$A=\partial_x^{n_0+2}+\sum_{n=0}^{n_0}a_n\partial_x^n,\quad n_0\geq 0, \tag{I.36}$$

полагая, что

$$a_{n_0+2}\equiv 1, \tag{I.37}$$

а коэффициенты a_{n_0+1}, a_{n_0}, ..., a_0 находятся с помощью аналогичного (I.2I) рекуррентного соотношения

$$a_n=K^+_{n_0-n+1}-\sum_{p=0}^{n_0-n+1}\sum_{q=0}^{p}a_{p+n+1}C^n_{q+n}\frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}. \tag{I.38}$$

Нетрудно убедиться, что в силу (I.38) получаем

$$a_{n_0+1}\equiv 0,\quad a_{n_0}=-(n_0+2)\frac{\partial W_0^+}{\partial x},$$
$$a_{n_0-1}=\frac{n_0-1}{2}\frac{\partial a_{n_0}}{\partial x}-(n_0+2)\frac{\partial W_1^+}{\partial x}-a_{n_0}W_0^+. \tag{I.39}$$

Положим теперь

$$T=\frac{\partial}{\partial t}+cA. \tag{I.40}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. Если в некоторой окрестности точки $x=x_0$, $y=y_0$, $t=t_0$ выполнено неравенство (I.I6), а оператор T вида (I.40) определен посредством равенств (I.36)-(I.39), то решение X^+ уравнения (I.I) в рассматриваемой окрестности удовлетворяет соотношению

$$TX^+=c\,\sigma_0^{n_0+2}X^+. \tag{I.41}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (I.I) по t. В силу (I.35) имеем

$$(1+B)\frac{\partial X^+}{\partial t} - c\left(\omega_0^{n_0+2} - \sigma_0^{n_0+2}\right)\left(BX^+ + J^+\lambda\right) = 0.$$

Далее, умножим равенство (I.26) на a_n и просуммируем по n от нуля до n_0+2. В результате получим

$$(1+B)AX^+ + S^+ + \sum_{n=0}^{n_0+2} \omega^n J^+\lambda\, a_n = 0,$$

где величина S^+ связана с определенными посредством (I.27) величинами S_n соотношением

$$S^+ = \sum_{n=1}^{n_0+2} a_n S_n. \tag{I.42}$$

Из этих равенств на основании (I.I), (I.I3),(I.37) и (I.40) вытекает соотношение

$$(1+B)\left(TX^+ - c\,\sigma_0^{n_0+2}X^+\right) + c\left(R^+ + S^+\right) = 0,$$

где

$$R^+ = \sum_{n=0}^{n_0+1}\omega^n J^+\lambda\, a_n - \left(\omega_0^{n_0+2}B - B\sigma_0^{n_0+2}\right)X^+.$$

Определенная таким образом величина R^+ с помощью (I.3I) преобразуется к виду

$$R^+ = \sum_{n=0}^{n_0+1}\omega^n J^+\lambda\left(a_n - K^+_{n_0-n+1}\right).$$

С другой стороны, изменив порядок суммирования в выражении (I.42), согласно (I.27) находим, что

$$S^+ = \sum_{n=0}^{n_0+1}\sum_{p=0}^{n_0-n+1}\sum_{q=0}^{p}\omega^n J^+\lambda\, a_{p+n+1} C^n_{q+n}\frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

С учетом (I.I6) и (I.38) отсюда следует справедливость соотношения (I.4I).

Теорема доказана.

Следствие 2. Из равенства (I.4I) в силу (I.8) и (I.I3) вытекает, что определенная посредством(I.23) функция v удовлетворяет эволюционному уравнению

$$Tv = \frac{\partial v}{\partial t} + cAv = 0. \tag{I.43}$$

Возьмем теперь оператор Q вида

$$Q = \sum_{n=0}^{n_0+1} Q_n\partial_x^n, \tag{I.44}$$

где

$$Q_{n_0+1} = -\omega, \tag{I.45}$$

а коэффициенты Q_{n_0}, ..., Q_0 определены в соответствии с рекуррентным соотношением

$$Q_n = K^-_{n_0-n+1} - \sum_{p=0}^{n_0-n}\sum_{q=0}^{p} Q_{p+n+1}C^n_{q+n}\frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}. \tag{I.46}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Определенный с помощью равенств (I.23), (I.36)-(I.38) и (I.44)-(I.46) оператор

$$Q' = \partial_x \cdot Q + \omega A \tag{I.47}$$

имеет нулевой порядок, т.е. является оператором умножения на функцию.

Доказательство. Полагая $Q_{n_0+2}\equiv 0$, мы видим, что для доказательства теоремы нам нужно убедиться, что при $n=1,\dots,n_0+2$ справедливо равенство

$$Q'_n = Q_{n-1} + \frac{\partial Q_n}{\partial x} + \omega a_n = 0. \tag{I.48}$$

При $n = n_0+2$ справедливость этого равенства следует из (I.37) и (I.45). Предположим теперь, что равенство (I.48) справедливо при всех n, удовлетворяющих неравенству $n' < n \le n_0+2$, где $1\le n' < n_0+2$. Покажем, что отсюда следует его справедливость при $n=n'$. Действительно, согласно (I.I7) и (I.25) имеем

$$K^-_{n+1} + \frac{\partial}{\partial x}K^-_n + \omega K^+_n = 0.$$

С учетом этого равенства на основе (I.38) и (I.46) получаем соотношение

$$Q'_{n'} = -\sum_{p=0}^{n_0-n'+1}\sum_{q=0}^{p} Q'_{p+n'+1}C^{n'}_{q+n'}\frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Правая часть этого соотношения равна нулю в силу предположения индукции. Значит, и левая часть равна нулю, т.е. равенство (I.48) справедливо и при $n=n'$.

Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Теорема 4. Если в некоторой окрестности точки $x=x_0, y=y_0, t=t_0$ выполнено неравенство (I.I6), а оператор Q определен посредством равенств (I.44)-(I.46), то в рассматриваемой окрестности решение X^+, X^- системы (I.I), (I.2) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial X^-}{\partial t} + cQX^+ = c\,\sigma_0^{n_0+2}X^-. \tag{I.49}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (I.2) по t. С учетом (I.35) получаем

$$(1+B)\frac{\partial X^-}{\partial t} - c(\omega_0^{n_0+2} - \sigma_c^{n_0+2})(BX^- - J^-\lambda) = 0.$$

Далее, умножим равенство (I.26) на Q_n и просуммируем по n от нуля до n_0+1. В результате убеждаемся в справедливости равенства

$$(1+B)QX^+ + S^- + \sum_{n=0}^{n_0+1} \omega^n J^+ \lambda Q_n = 0,$$

где величина S^- выражается через определенные посредством (I.27) величины S_n с помощью соотношения

$$S^- = \sum_{n=1}^{n_0+1} Q_n S_n. \tag{I.50}$$

Из этих равенств согласно (I.2), (I.I0) и (I.I3) вытекает соотношение

$$(1+B)\left(\frac{\partial X^-}{\partial t} + cQX^+ - c\,\sigma_0^{n_0+2}X^-\right) + c(R^- + S^-) = 0,$$

где

$$R^- = \sum_{n=0}^{n_0+1} \omega^n J^+ \lambda Q_n - (\omega_0^{n_0+2}B - B\,\sigma_0^{n_0+2})X^-.$$

На основании (I.3I) получаем, что

$$R^- = \sum_{n=0}^{n_0+1} \omega^n J^+ \lambda \left(Q_n - K^-_{n_0-n+1}\right).$$

С другой стороны, изменив порядок суммирования в выражении (I.50), в силу (I.27) находим, что

$$S^- = \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{p=0}^{n_0-n} \sum_{q=0}^{p} \omega^n J^+ \lambda Q_{p+n+1} C_{q+n}^{n} \frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Поскольку $K_0^- = W_0^- = -\omega = Q_{n_0+1}$, то отсюда с учетом (I.46) вытекает равенство $R^- + S^- = 0$, на основе которого в соответствии с (I.I6) следует справедливость соотношения (I.49).

Теорема доказана.

Следствие 3. Возьмем теперь оператор J вида

$$J = \frac{\partial}{\partial t} + A, \text{ где } A = c\begin{vmatrix} A & 0 \\ Q & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда из теорем 2 и 4 следует, что при указанном выше определении операторов A и Q вектор $X_r = (X_r^+, X_r^-)$ является решением уравнения $(J - \eta_r)X_r = 0$, если при $r = 1,\dots,r_0+r_1$ положить $\eta_r = \sigma_r^{K_0+2}$, а при $r = r_0+r_1+1,\dots,r_0+2r_1$ считать $\eta_r = 0$.

§ 2. Собственные функции оператора $\mathcal{L} - \eta I$ и их свойства

Найденные в предыдущем параграфе решения уравнения $(\mathcal{L} - \eta_r I)X_r = 0$ позволяют построить два однопараметрических семейства решений этого уравнения, играющие важную роль в дальнейшем. Более точно, справедлива следующая

Теорема 5. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство (I.I6), а коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ вида (I), (2) определены с помощью (I.20)-(I.23), то пара функций

$$\varphi = \exp(\zeta x)\left\{1 + \sum_{r=1}^{r_0+r_1} X_r^+ \frac{\exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r}\right\}, \tag{2.1}$$

$$\psi = \exp(\zeta x)\sum_{r=1}^{r_0+r_1} X_r^- \frac{\exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r}\Big\} \tag{2.2}$$

удовлетворяет в этой окрестности системе уравнений

$$\left(L - \varkappa\frac{\partial}{\partial y} - \zeta^{K_0+2}\right)\varphi + v\psi = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \omega\varphi = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. Дифференцируя выражение (2.I) n раз по x, легко убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = \exp(\zeta x)\left\{\zeta^n + \sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{\partial^n X_n^+}{\partial x^n}\frac{\exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r} + S_n\right\}, \tag{2.5}$$

где $S_0 \equiv 0$, а при $n > 0$ согласно (I.I7) имеем

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{m} \zeta^\alpha C_m^\alpha \frac{\partial^{m-\alpha} W^+_{n-m-1}}{\partial x^{m-\alpha}}. \tag{2.6}$$

Умножим теперь равенство (2.5) на u_n и просуммируем по n от нуля до K_0+2. В результате несложных преобразований получаем соотношение

$$(L - \zeta^{K_0+2})\varphi = \exp(\zeta x)\Big\{S + \sum_{K=0}^{K_0+1}(u_K - K^+_{K_0-K+1})\zeta^K + \sum_{r=1}^{r_0+r_1}\frac{\exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r}(L - \sigma_r^{K_0+2})X_r^+\Big\},$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{K_0+2} u_n S_n. \tag{2.7}$$

С учетом (I.24) из этого соотношения следует, что определенная посредством равенства

$$\phi = \left(L - \varkappa\frac{\partial}{\partial y} - \zeta^{K_0+2}\right)\varphi + v\psi$$

величина ϕ может быть представлена в виде

$$\phi = exp(\zeta x)\Big\{ S + \sum_{K=0}^{K_0+1} (u_K - K^+_{K_0-K+1})\zeta^K \Big\}.$$

Далее, изменив порядок суммирования в выражении (2.7), на основании (2.6) находим, что

$$S = \sum_{K=0}^{K_0+1} \zeta^K \sum_{p=0}^{K_0-K+1} \sum_{q=0}^{p} u_{p+K+1} C^K_{q+K} \frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Отсюда в силу (I.2I) следует, что $\phi = 0$, т.е. справедливость (2.3) доказана.

С другой стороны, дифференцируя выражение (2.2) по x , с помощью (I.23) убеждаемся, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = exp(\zeta x)\Big\{ -\omega + \sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{\partial X^-_r}{\partial x} \frac{exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r} \Big\}.$$

Отсюда на основе (I.25) следует справедливость (2.4).

Теорема доказана.

Следствие 4. Из этой теоремы следует, что определенная посредством равенств (2.I) и (2.2) пара функций φ и ψ является решением $\chi = (\varphi, \psi)$ уравнения $(\mathcal{L} - \eta I)\chi = 0$ при $\eta = \zeta^{K_0+2}$.

Замечание I. С помощью (I.23)-(I.25) нетрудно убедиться, что пара функций

$$\varphi = \sum_{r=1}^{r_1} \frac{X^+_{r_0+r_1+r}}{\zeta^{K_0+2} - \omega^{K_0+2}_{r_0+r_1+r}}, \quad \psi = 1 + \sum_{r=1}^{r_1} \frac{X^-_{r_0+r_1+r}}{\zeta^{K_0+2} - \omega^{K_0+2}_{r_0+r_1+r}} \qquad (2.8)$$

также удовлетворяет системе (2.3), (2.4), т.е. определяет решение $\chi = (\varphi, \psi)$ уравнения $(\mathcal{L} - \eta I)\chi = 0$ при $\eta = \zeta^{K_0+2}$. Это есть второе однопараметрическое семейство решений этого уравнения.

Определенная посредством (2.I) и (2.2) пара функций φ , ψ зависит от времени t . Именно, справедлива следующая

Теорема 6. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство (I.I6), а операторы T и Q взяты в соответствии с (I.36)-(I.40) и (I.44) - (I.46), то определенная посредством (2.I) и (2.2) пара функций φ , ψ удовлетворяет в этой окрестности системе уравнений

$$(T - c\zeta^{n_0+2})\varphi = 0, \qquad (2.9)$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - c\zeta^{n_0+2}\Big)\psi + cQ\varphi = 0. \qquad (2.I0)$$

Доказательство. Продифференцируем равенство (2.I) по t . В результате имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = exp(\zeta x)\sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{\partial X^+_r}{\partial t} \frac{exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r}.$$

Далее, умножим равенство (2.5) на a_n и просуммируем по n от нуля до n_0+2 . С учетом (I.36) находим, что

$$A\varphi = exp(\zeta x)\Big\{ \sum_{n=0}^{n_0+2} a_n\zeta^n + \sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r} AX^+_r + S^+ \Big\},$$

где

$$S^+ = \sum_{n=1}^{n_0+2} a_n S_n. \qquad (2.II)$$

Отсюда на основании (I.37) и (I.4I) вытекает, что величина

$$\phi = (T - c\zeta^{n_0+2})\varphi$$

может быть представлена в виде

$$\phi = c\, exp(\zeta x)\Big\{ \sum_{n=0}^{n_0+1} (a_n - K^+_{n_0-n+1})\zeta^n + S^+ \Big\}.$$

С другой стороны, изменив порядок суммирования в выражении (2.II), с помощью (2.6) получаем

$$S^+ = \sum_{n=0}^{n_0+1} \zeta^n \sum_{p=0}^{n_0-n+1} \sum_{q=0}^{p} a_{p+n+1} C^n_{q+n} \frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Отсюда в силу (I.38) следует, что $\phi = 0$. Таким образом, справедливость (2.9) доказана.

Продифференцируем теперь по t равенство (2.2). Очевидно, что имеет место равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = exp(\zeta x)\sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{\partial X^-_r}{\partial t} \frac{exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r}.$$

Далее, умножим равенство (2.5) на Q_n и просуммируем по n от нуля до n_0+1 . В результате согласно (I.44) получаем

$$Q\varphi = exp(\zeta x)\Big\{ \sum_{n=0}^{n_0+1} Q_n\zeta^n + \sum_{r=1}^{r_0+r_1} \frac{exp(-\sigma_r x)}{\zeta - \sigma_r} QX^+_r + S^- \Big\},$$

где

$$S^- = \sum_{n=1}^{n_0+1} Q_n S_n. \qquad (2.I2)$$

Отсюда на основании (I.49) следует, что величина

$$\Psi = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - c\zeta^{n_0+2}\Big)\psi + cQ\varphi$$

может быть записана в виде

$$\Psi = c\, exp(\zeta x)\Big\{ \sum_{n=0}^{n_0+1} (Q_n - K^-_{n_0-n+1})\zeta^n + S^- \Big\}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в выражении (2.I2). Пользуясь (2.5) находим, что

$$S^- = \sum_{n=0}^{n_0} \zeta^n \sum_{p=0}^{n_0-n} \sum_{q=0}^{p} Q_{p+n+1} C_{q+n}^{n} \frac{\partial^q W^+_{p-q}}{\partial x^q}.$$

Отсюда согласно (I.I7),(I.23),(I.45) и (I.46) вытекает равенство $\Psi = 0$, что означает справедливость (2.I0).

Теорема доказана.

Замечание 2. С помощью (I.4I) и (I.46) нетрудно убедиться, что задаваемая посредством (2.8) пара функций φ, ψ удовлетворяет системе уравнений

$$T\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + cQ\varphi = 0. \tag{2.I3}$$

Возьмем теперь оператор P вида

$$P = \sum_{n=0}^{n_0+1} P_n \partial_x^n, \tag{2.I4}$$

такой, что оператор

$$P' = A\cdot v + P\partial_x \tag{2.I5}$$

имеет нулевой порядок, т.е. является оператором умножения на функцию. Очевидно, что при таком выборе оператора P справедливо равенство $P' = Av$. Возьмем, далее, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вида

$$\mathcal{A} = c\begin{vmatrix} A & 0 \\ Q & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B} = c\begin{vmatrix} 0 & -P \\ Q & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.I6}$$

Справедлива следующая

Теорема 7. Если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство (I.I6), то определенные с помощью решения системы (I.I), (I.2) операторы $\mathcal{L} - \eta I$ и $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно вида (I) и (2.I6) удовлетворяют в этой окрестности операторному соотношению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A}, \mathcal{L} - \eta I] = \mathcal{B}\cdot(\mathcal{L} - \eta I). \tag{2.I7}$$

Доказательство. Соотношение (2.I7), очевидно, эквивалентно матричному равенству

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.I8}$$

где

$$\alpha = \frac{\partial L}{\partial t} + c\varkappa \frac{\partial A}{\partial y} + c[A, L] + c(P\cdot w - vQ), \tag{2.I9}$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial t} + c(A\cdot v + P\partial_x), \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial t} - c(wA + \partial_x\cdot Q). \tag{2.20}$$

На основании (2.3),(2.4),(2.9),(2.I0) и (2.I3) нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\Delta \chi = 0, \tag{2.2I}$$

где $\chi = (\varphi, \psi)$ есть определенное посредством (2.I), (2.2) или (2.8) решение уравнения $(\mathcal{L} - \eta I)\chi = 0$. С учетом (2.I8) равенство (2.2I) эквивалентно системе

$$\alpha\varphi + \beta\psi = 0, \quad \gamma\varphi = 0. \tag{2.22}$$

Из равенства (2.I) следует, что для любой точки x, y, t, принадлежащей рассматриваемой окрестности, найдется ζ, такое, что $\varphi \neq 0$ в этой точке. Поскольку в силу (2.22) имеем $\gamma\varphi = 0$, то отсюда следует, что $\gamma = 0$. Далее, согласно (2.8) получаем, что

$$\varphi \to 0, \quad \psi \to 1 \quad \text{при } |\zeta| \to \infty$$

в любой точке x, y, t из названной выше окрестности. Отсюда в соответствии с первым из равенств (2.22) вытекает, что $\beta = 0$, и, следовательно, справедливо соотношение

$$\alpha\varphi = 0. \tag{2.23}$$

С помощью (2), (I.36),(I.44),(2.I4) и (2.I9) нетрудно убедиться, что **дифференциальный по x оператор α имеет порядок m_0 не выше $K_0 + n_0 + 1$**, т.е.

$$\alpha = \sum_{m=0}^{m_0} \alpha_m \partial_x^m, \quad 0 \le m_0 \le K_0 + n_0 + 1. \tag{2.24}$$

Положим $\varphi_m(x, \zeta) = \varphi(x, e_m\zeta)$, где $\varphi(x, \zeta)$ определено посредством (2.I), а $e_m = \exp\left(i\frac{2\pi m}{m_0+1}\right)$, $m = 0, 1, \ldots, m_0$. В силу (2.23) и (2.24) справедлива система равенств

$$\sum_{\mu=0}^{m_0} \alpha_\mu \frac{\partial^\mu \varphi_m}{\partial x^\mu} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, m_0. \tag{2.25}$$

Определитель

$$\Phi = \det\left|\frac{\partial^\mu \varphi_m}{\partial x^\mu}\right|, \quad \mu, m = 0, 1, \ldots, m_0,$$

системы (2.25) на основании (2.I) и (2.5) допускает представление $\Phi = C\zeta^\nu$, где $\nu = \frac{1}{2}(m_0 - 1)m_0$, а величина C при $|\zeta| \to \infty$ стремится к отличной от нуля константе. Отсюда следует, что для любой точки x, y, t, принадлежащей рассматриваемой окрестности, найдется ζ, такое, что $\Phi \neq 0$ в этой точке. Это значит, что $\alpha = 0$ в произвольной точке x, y, t, принадлежащей названной выше окрестности.

Теорема доказана.

Замечание 3. Рассмотрим определенные посредством (2.I) и (2.2) функции φ, ψ. Пусть φ_r и ψ_r равно значениям этих функций при $\zeta = \omega_r$, $r = 1, \ldots, r_0$ и $r = r_0 + r_1 + 1, \ldots, r_0 + 2r_1$. Тогда в силу уравнений системы (I.I), (I.2) при $r = 1, \ldots, r_0$ справедливы равенства

$$X_r^+ = -\varphi_r f_r \exp(\tau_r y), \quad X_r^- = -\psi_r f_r \exp(\tau_r y), \qquad (2.26)$$

а при $r = r_0 + r_1 + 1, \ldots, r_0 + 2r_1$ имеем

$$X_r^+ = -\varphi_r f_r, \quad X_r^- = \psi_r f_r. \qquad (2.27)$$

Далее, возьмем определенную с помощью (2.8) пару функций φ, ψ, и пусть φ_r, ψ_r равно значениям этих функций при $\zeta = \sigma_r$, $r = r_0 + 1, \ldots, r_0 + r_1$. Тогда на основании (I.I), (I.2) при $r = r_0 + 1, \ldots, r_0 + r_1$ выполняются соотношения (2.27).

§ 3. Нелинейные эволюционные уравнения

В предыдущем параграфе мы установили, что если в некоторой окрестности точки $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство (I.I6), то определенные ранее с помощью решений системы (I.I), (I.2) операторы L, A, P, Q и функции v, w удовлетворяют в рассматриваемой окрестности операторным соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial t} + c\varkappa \frac{\partial A}{\partial y} + c[A, L] + c(P \cdot w - vQ) = 0, \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c(A \cdot v + P\partial_x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - c(wA + \partial_x \cdot Q) = 0. \qquad (3.2)$$

Из равенств (3.2) на основании (I.36) следует, что

$$P = -v\partial_x^{n_0+1} + p, \quad Q = -w\partial_x^{n_0+1} + q,$$

где p, q – операторы порядка не выше n_0. Отсюда вытекает, что порядок оператора $P \cdot w - vQ$ всегда не превосходит n_0. Таким образом, в том случае, когда порядок оператора A не превосходит порядок оператора L, т.е., когда $K_0 \geq n_0$, порядок оператора $P \cdot w - vQ$ также не превосходит K_0. С учетом (3.I) отсюда следует, что порядок оператора $[A, L]$ не превосходит K_0. Это значит, что операторы A, L в рассматриваемом случае образуют пару Лакса. Хорошо известно, что в этой ситуации коэффициенты оператора A выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L и их производные по x соответствующего порядка. Далее, требование, чтобы операторы $A \cdot v + P\partial_x$, $wA + \partial_x \cdot Q$ имели нулевой порядок, однозначно определяет операторы P, Q, причем их коэффициенты выражаются билинейно через коэффициенты оператора A, функции v, w и их производные по x. Отсюда следует, что при $K_0 \geq n_0$ система операторных соотношений (3.I), (3.2) эквивалентна системе дифференциальных уравнений в частных производных. При этом в эволюционные уравнения для v и w сами функции v, w входят линейно, а в остальные уравнения функции v, w входят билинейно.

В том случае, когда порядок оператора A превосходит порядок оператора L, т.е., когда $K_0 < n_0$, выберем согласно /10/ операторы

A_0, P_0, Q_0 вида

$$A_0 = \partial_x^{n_0+2} + \sum_{n=0}^{n_0} a_n \partial_x^n, \quad P_0 = \sum_{n=0}^{n_0+1} p_n \partial_x^n, \quad Q_0 = \sum_{n=0}^{n_0+1} q_n \partial_x^n$$

так, чтобы операторы $A_0 \cdot v + P_0 \partial_x$ и $wA_0 + \partial_x \cdot Q_0$ имели нулевой порядок, а оператор $[A_0, L] + P_0 \cdot w - vQ_0$ имел порядок не выше K_0. При этом коэффициенты операторов A_0, P_0, Q_0 выражаются полиномиально через коэффициенты оператора L, функции v, w и их производные по x соответствующего порядка. Затем положим $A = A_0 + a$, $P = P_0 + p$, $Q = Q_0 + q$. Нетрудно убедиться, что в силу (3.I), (3.2) порядок оператора a не превосходит $n_0 - K_0 - 1 \geq 0$, а порядок операторов p, q не выше $n_0 - K_0 - 2$, если $n_0 > K_0 + 1$, и $p = q = 0$, если $n_0 = K_0 + 1$. Далее, согласно (3.I), (3.2) получаем, что операторы $a \cdot v + p\partial_x$, $wa + \partial_x \cdot q$ имеют нулевой порядок, а порядок оператора $\varkappa \frac{\partial}{\partial y}(A_0 + a) + [a, L] + p \cdot w - vq$ не превосходит K_0. Эти требования, очевидно, определяют коэффициенты оператора a с точностью до констант интегрирования, которые находятся из условия $a \equiv 0$ при $u_0 = \ldots = u_{K_0} = v = w \equiv 0$, т.е. при $f_1 = \ldots = f_{r_0 + 2r_1} = 0$. После этого операторы p, q определяются однозначно. При этом коэффициенты операторов a, p, q будут выражаться через коэффициенты операторов A_0, L и функции v, w. Однако, как нетрудно понять, выражения для коэффициентов этих операторов будут получаться интегрированием по x некоторых полиномов от коэффициентов оператора L и их производных по x, y, а также интегралов от таких полиномов. Таким образом, в случае $n_0 > K_0$ система операторных соотношений (3.I), (3.2) эквивалентна система интегро-дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $u_0, \ldots, u_{K_0}, v, w$ оператора L. Введением дополнительных неизвестных, а именно, коэффициентов оператора a, эта система сводится к системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов операторов L и a.

Система (3.I), (3.2) обладает важной симметрией. Для нахождения этой симметрии нам потребуется следующая

Теорема 8. Если оператор A вида (I.36) удовлетворяет условию $A^* = (-1)^{n_0} A$, а $w = \varepsilon \bar{v}$, где величина ε не зависит от x, то определенные соответственно посредством (2.I5) и (I.47) операторы P и Q связаны соотношением

$$Q = (-1)^{n_0+1} \varepsilon P^*. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Положим

$$Q = -w\partial_x^{n_0+1} + \sum_{n=0}^{n_0} q_n \partial_x^n \qquad (3.4)$$

и найдем коэффициенты q_n, потребовав, чтобы оператор $wA + \partial_x \cdot Q$ имел нулевой порядок. С помощью этого требования коэффициенты q_n определяются однозначно, причем

$$q_{n_0} = \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{3.5}$$

а при $0 < n \le n_0$ справедливо равенство

$$q_{n_0-n} = (-1)^n \frac{\partial^{n+1} w}{\partial x^{n+1}} - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}(w a_{n_0-n+m+1}). \tag{3.6}$$

Представим теперь оператор A в виде

$$A = \partial_x^{n_0+2} + \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^{n_0-n} \partial_x^n \cdot \hat{a}_n. \tag{3.7}$$

Очевидно, что коэффициенты $\hat{a}_n$ определены однозначно. Полагая

$$P = -\partial_x^{n_0+1} \cdot v - \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^{n_0-n} \partial_x^n \cdot p_n, \tag{3.8}$$

потребуем, чтобы оператор $A \cdot v + P\partial_x$ имел нулевой порядок. Этим требованием коэффициенты p_n определяются однозначно, причем

$$p_{n_0} = \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.9}$$

а при $0 < n \le n_0$ справедливо равенство

$$p_{n_0-n} = (-1)^n \frac{\partial^{n+1} v}{\partial x^{n+1}} - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m}(v \hat{a}_{n_0-n+m+1}). \tag{3.10}$$

В том случае, когда выполняется условие $A^* = (-1)^{n_0} A$, имеем $\hat{a}_n = \bar{a}_n$ при $0 \le n \le n_0$. Отсюда на основании (3.5), (3.6), (3.9) и (3.10) следует справедливость равенства $q_n = \varepsilon p_n$, $0 \le n \le n_0$, если положить $w = \varepsilon \bar{v}$, где ε не зависит от x. Согласно (3.4) и (3.8) отсюда вытекает справедливость соотношения (3.3).

Теорема доказана.

<u>Следствие 5.</u> На основании (3.6) и (3.10) получаем, что операторные соотношения (3.2) эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} + cAv = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - c\tilde{A} w = 0, \tag{3.11}$$

где оператор $\tilde{A}$ определяется равенством

$$\tilde{A} = (-1)^{n_0} \partial_x^{n_0+2} + \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n \partial_x^n \cdot a_n. \tag{3.12}$$

Из равенства (3.12) следует, что, если оператор A удовлетворяет соотношению $A^* = (-1)^{n_0} A$, то справедливо равенство $\tilde{A} = (-1)^{n_0} \bar{A}$. Отсюда следует, что, если величина c удовлетворяет условию $\bar{c} = (-1)^{n_0+1} c$, то система уравнений (3.11) обладает инвариантным многообразием $w = \varepsilon \bar{v}$, где ε – константа, т.е. от x, y, t не зависит. Далее, если дополнительно потребовать, чтобы ε удовлетворяло условию $\bar{\varepsilon} = (-1)^{k_0+1}\varepsilon$, то при $\bar{\varkappa} = (-1)^{k_0+1}\varkappa$ операторное соотношение (3.1) согласно (3.3) допускает связь $L = (-1)^{k_0} L^*$.

Таким образом, нами доказана следующая

<u>Теорема 9.</u> Если величины c, $\varkappa$ и оператор A, входящие в систему (3.1), (3.2), удовлетворяют условиям

$$\bar{c} = (-1)^{n_0+1} c, \quad \bar{\varkappa} = (-1)^{k_0+1} \varkappa, \quad A^* = (-1)^{n_0} A, \tag{3.13}$$

то система (3.1), (3.2) имеет инвариантное многообразие

$$L^* = (-1)^{k_0} L, \quad w = \varepsilon \bar{v}, \tag{3.14}$$

где константа ε подчиняется требованию

$$\bar{\varepsilon} = (-1)^{k_0+1} \varepsilon. \tag{3.15}$$

Аналогичным образом доказывается следующая

Теорема 10. Если определенный посредством (3.12) оператор $\tilde{A}$ таков, что $\tilde{A} = (-1)^{n_0} A$, а $w = \varepsilon v$, где величина ε не зависит от x, то удовлетворяющие соответственно условиям (2.15) и (1.47) операторы P и Q связаны соотношением

$$Q = (-1)^{n_0+1} \varepsilon \tilde{P}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Действительно, в силу условия $\tilde{A} = (-1)^{n_0} A$ на основании (3.7) имеем $\hat{a}_n = a_n$ при $0 \le n \le n_0$. Отсюда согласно (3.5), (3.6), (3.9) и (3.10) следует, что при $0 \le n \le n_0$ справедливо равенство $q_n = \varepsilon p_n$, если $w = \varepsilon v$, а ε не зависит от x. Таким образом, с учетом (3.4) и (3.8) убеждаемся в справедливости соотношения (3.16).

Теорема доказана.

Из уравнений (3.11) следует, что если выполняется соотношение $\tilde{A} = (-1)^{n_0} A$ и n_0 – нечетное целое число, то система (3.11) имеет инвариантное многообразие $w = \varepsilon v$, где величина ε не зависит от x, y, t. Далее, согласно (3.16) операторное соотношение (3.1) в этих условиях допускает связь $\tilde{L} = (-1)^{k_0} L$, если k_0 – нечетное целое число. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 11. Если входящий в соотношения (3.1), (3.2) оператор A удовлетворяет условию $\tilde{A} = (-1)^{n_0} A$, а k_0 и n_0 – нечетные целые числа, то система (3.1), (3.2) обладает инвариантным многообразием

$$\tilde{L} = (-1)^{k_0} L, \quad w = \varepsilon v, \tag{3.17}$$

где величина ε от x, y, t не зависит.

Отметим, что как показывают приводимые ниже примеры, все наиболее интересные системы уравнений, получаемых с помощью соотношений (3.1), (3.2), относятся к указанным выше симметричным случаям. Начнем с простейшего случая $k_0 = n_0 = 0$. Полагая $L = A = \partial_x^2 + u$, на основании (3.4)–(3.10) находим, что

$$P = -\partial_x \cdot v - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = -w\partial_x + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.18}$$

С учетом этих равенств система (3.1), (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\varkappa \frac{\partial u}{\partial y} - 2c\frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\left(uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - c\left(uw + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{3.19}$$

При $c = \varkappa = i$ система (3.19) в соответствии с теоремой 9 имеет инвариантное многообразие $u = \bar{u}$, $w = \pm i\bar{v}$. Движение на этом многообразии описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial y} \pm 2\frac{\partial}{\partial x}|v|^2 = 0, \quad i\frac{\partial v}{\partial t} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.20}$$

Система (3.20) описывает взаимодействие длинной волны с пакетом коротких волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу.

Далее, при $K_0 = n_0 = 1$ имеем $L = A = \partial_x^3 + u_1\partial_x + u_0$. Отсюда согласно (3.4)-(3.10) следует, что

$$P = -\partial_x^2 \cdot v - \partial_x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u_1 v,$$
$$Q = -w\partial_x^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\partial_x - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - u_1 w.$$

На основе этих равенств система (3.1), (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + c\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial y} - 3c\frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} + c\varkappa\frac{\partial u_0}{\partial y} - 3c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}w\right) = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u_1\frac{\partial v}{\partial x} + u_0 v\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + c\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 w) - u_0 w\right) = 0.$$

В соответствии с теоремой II при $c = \varkappa = 1$ эта система имеет инвариантное многообразие $u_1 = u$, $u_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$, $w = \pm v$. Движение на этом многообразии подчиняется системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 3\frac{\partial}{\partial x}v^2, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}v = 0. \tag{3.21}$$

Система описывает взаимодействие двух типов длинных волн, распространяющихся на плоскости x, y под углом друг к другу.

Наконец, при $K_0 = 1$ и $n_0 = 0$ положим $L = \partial_x^3 + u_1\partial_x + u_0$, $A = \partial_x^2 + \frac{2}{3}u_1$. С учетом (3.18) получаем, что соотношение (3.1) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\left(2u_0 - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{2}{3}c\varkappa\frac{\partial u_1}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{3}u_1^2 - 2vw\right) = 0.$$

Положим теперь $u_1 = \frac{3}{2}u$, $u_0 = \frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial x} + ip$. В результате приведенная выше система примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4}{3}ic\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} - ic\varkappa\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{4}c\frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8vw\right) = 0.$$

Исключив отсюда p, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{4}{3}c^2\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{c^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8vw\right) = 0. \tag{3.22}$$

Легко проверяется, что два уравнения, вытекающие из соотношений (3.2), в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\left(uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - c\left(uw + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{3.23}$$

При $c = i$ и $\varkappa = -\frac{1}{4}$ система (3.22), (3.23) имеет инвариантное многообразие $u = \bar{u}$, $w = \pm\bar{v}$. Движение на нем определяется системой уравнений

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8|v|^2\right)\right] = 0,$$
$$i\frac{\partial v}{\partial t} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.24}$$

Заменим теперь в этой системе t на y и y на t. В результате получим систему

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8|v|^2\right)\right] = 0,$$
$$i\frac{\partial v}{\partial y} = uv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.25}$$

Заметим, что при $v \equiv 0$ система (3.25) сводится к уравнению Кадомцева – Петвиашвили /14/. Отметим также, что несколько систем нелинейных эволюционных уравнений, получаемых с помощью операторных соотношений (3.1), (3.2) при других значениях целочисленных параметров K_0 и n_0, содержатся в работах /1,2/.

Для того, чтобы получаемые с помощью решений системы (1.1),(1.2) операторы L, A, P, Q и функции v, w обладали указанными выше симметриями, необходимо на входящие в систему (1.1), (1.2) параметры f_r, ω_r, σ_r, τ_r наложить определенные требования. Сделать это можно несколькими способами. Некоторые из них рассмотрены ниже.

§ 4. Присоединенная система и свойства ее решений

При исследовании симметрий операторов L, A, P, Q и функций v, w важную роль играет получаемая следующим образом система. Возьмем матрицу $\mathcal{E}'$ вида

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} J', \quad J' = J_0' + \varepsilon J_1', \tag{4.1}$$

где матрицы $\mathcal{E}$, J_0', J_1' определены посредством (1.8), (1.9), а величина ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon^2 = (-1)^{K_0+1}. \tag{4.2}$$

Заменим теперь в системе (1.1), (1.2) вектор f и матрицы ω, σ, τ на вектор $\hat{f}$ и матрицы $\hat{\omega}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ вида

$$\hat{f} = \mathcal{E}' \bar{f}, \quad \hat{\omega} = -\mathcal{E}\bar{\sigma}\mathcal{E}, \quad \hat{\sigma} = -\mathcal{E}\bar{\omega}\mathcal{E}, \quad \hat{\tau} = \bar{\tau}. \tag{4.3}$$

Заменим, далее, в этой системе векторы $X^{\pm}$ соответственно на векторы $J\hat{X}^{\pm}$, где

$$J = J_0 + \varepsilon J_1, \tag{4.4}$$

а матрицы J_0 и J_1 определены с помощью равенств (1.8) и (1.9). В результате получим систему вида

$$(\mathbb{1} + \hat{B})\hat{X}^{+} + J^{+}\hat{\lambda} = 0, \tag{4.5}$$

$$(\mathbb{1} + \hat{B})\hat{X}^{-} = J^{-}\hat{\lambda}, \tag{4.6}$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица порядка $r_0 + 2r_1$, а $\hat{B}$ – квадратная матрица того же порядка с элементами $\hat{B}_{r,s}$. При этом отличные от нуля элементы матрицы $\hat{B}$ согласно (4.1)–(4.4) имеют вид

$$\hat{B}_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{\bar{f}_r \exp[(-\bar{\sigma}_r + \bar{\omega}_s)x + \bar{\tau}_r y]}{-\bar{\sigma}_r + \bar{\omega}_s}, & 1 \le r, s \le r_0, \\[2ex] \dfrac{\bar{f}_r \exp[(-\bar{\sigma}_r + \bar{\omega}_{r_1+s})x + \bar{\tau}_r y]}{-\bar{\sigma}_r + \bar{\omega}_{r_1+s}}, & 1 \le r \le r_0 < s \le r_0 + r_1, \\[2ex] -\dfrac{\bar{f}_{r_1+r}}{-\bar{\omega}_{r_1+r}^{K_0+2} + \bar{\sigma}_{s-r_1}^{K_0+2}}, & r_0 < r \le r_0 + r_1 < s \le r_0 + 2r_1, \\[2ex] \dfrac{\bar{f}_{r-r_1} \exp[(-\bar{\sigma}_{r-r_1} + \bar{\omega}_s)x]}{-\bar{\sigma}_{r-r_1} + \bar{\omega}_s}, & 1 \le s \le r_0,\ r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1, \\[2ex] \dfrac{\bar{f}_{r-r_1} \exp[(-\bar{\sigma}_{r-r_1} + \bar{\omega}_{r_1+s})x]}{-\bar{\sigma}_{r-r_1} + \bar{\omega}_{r_1+s}}, & r_0 < s \le r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Все остальные элементы матрицы $\hat{B}$, очевидно, равны нулю. Далее, компоненты $\hat{\lambda}_r$ вектора $\hat{\lambda}$ имеют вид

$$\hat{\lambda}_r = \begin{cases} \bar{f}_r \exp(-\bar{\sigma}_r x + \bar{\tau}_r y), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ \varepsilon \bar{f}_{r_1+r}, & \text{если } r_0 < r \le r_0 + r_1, \\ \bar{f}_{r-r_1} \exp(-\bar{\sigma}_{r-r_1} x), & \text{если } r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Возьмем диагональную матрицу F вида

$$F = \operatorname{diag}(f_1 \exp(\tau_1 y), \dots, f_{r_0} \exp(\tau_{r_0} y), f_{r_0+1}, \dots, f_{r_0+2r_1}). \tag{4.9}$$

Тогда в силу (1.4) и (4.7) справедливо равенство

$$\hat{B}\mathcal{E}\bar{F} = \varepsilon \bar{F} B^{*}. \tag{4.10}$$

Далее, возьмем вектор $\hat{\ell}$ с $r_0 + 2r_1$ компонентами $\hat{\ell}_r$ вида

$$\hat{\ell}_r = \begin{cases} \exp(\bar{\omega}_r x), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ \exp(\bar{\omega}_{r_1+r} x), & \text{если } r_0 < r \le r_0 + r_1, \\ 1, & \text{если } r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Согласно (1.5), (1.8), (1.14), (4.4), (4.7)–(4.9) и (4.11) имеем

$$\bar{\lambda} = \bar{F}\mathcal{E}\hat{\ell}, \quad \hat{\lambda} = \mathcal{E}\bar{F}J\bar{\ell},$$

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial x} = \hat{B}\mathcal{E}\bar{\omega}_0\mathcal{E} - \mathcal{E}\bar{\sigma}_0\mathcal{E}\hat{B} = J^{+}\hat{\lambda}\tilde{\hat{\ell}}J_0, \quad \frac{\partial \hat{B}}{\partial y} = \bar{\tau}\hat{B}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial x} = -\mathcal{E}\bar{\sigma}_0\mathcal{E}\hat{\lambda}, \quad \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial y} = \bar{\tau}\hat{\lambda}, \quad \frac{\partial \hat{\ell}}{\partial x} = \mathcal{E}\bar{\omega}_0\mathcal{E}\hat{\ell}.$$

Из равенства (4.10) следует, что определители D и $\hat{D}$ матриц $\mathbb{1} + B$ и $\mathbb{1} + \hat{B}$ связаны соотношением

$$\hat{D} = \bar{D}. \tag{4.13}$$

Отсюда следует, что если в некоторой точке $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$ выполнено неравенство (1.16), то в этой же точке имеем $\hat{D} \ne 0$. Возьмем теперь решение $\hat{X}^{\pm}$ системы (4.5), (4.6) и с его помощью определим величины $\hat{K}_n^{\pm}$ и $\hat{W}_n^{\pm}$, полагая

$$\hat{K}_n^{\pm} = \tilde{\hat{\ell}}\hat{\sigma}^n J_0 \hat{X}^{\pm}, \quad \hat{W}_n^{\pm} = \tilde{\hat{\ell}} J_0 \frac{\partial^n \hat{X}^{\pm}}{\partial x^n}.$$

Используя эти величины, определим операторы $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ аналогично тому, как были определены ранее операторы L, A, P, Q. Определим далее, функции $\hat{v}$ и $\hat{w}$ посредством равенств

$$\hat{v} = \varepsilon \tilde{\hat{\ell}} J_1 \hat{X}^{+}, \quad \hat{w} = -\hat{W}_0^{-}.$$

Предположим теперь, что входящие в равенства (1.12) и (1.35) величины $\varkappa$ и c удовлетворяют условиям (3.13). Тогда нетрудно убедиться, что определенные согласно (4.3) матрицы $\hat{\omega}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ и вектор $\hat{f}$ удовлетворяют соотношениям

$$\hat{\omega}^{K_0+2} - \hat{\sigma}^{K_0+2} = \varkappa \hat{\tau}, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + c\left(\hat{\omega}_0^{n_0+2} - \hat{\sigma}_0^{n_0+2}\right)\hat{f} = 0, \tag{4.15}$$

где

$$\hat{\omega}_0 = J^+ \hat{\omega}, \quad \hat{\sigma}_0 = J_0 \hat{\sigma}. \tag{4.16}$$

На основе (4.14)-(4.16) получаем, что определенные с помощью решений системы (4.5), (4.6) операторы $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ и функции $\hat{v}$, $\hat{w}$ удовлетворяют операторным соотношениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + c\varkappa \frac{\partial \hat{A}}{\partial y} + c[\hat{A}, \hat{L}] + c\left(\hat{P}\cdot \hat{w} - \hat{v}\hat{Q}\right) = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + c\left(\hat{A}\cdot \hat{v} + \hat{P}\,\partial_x\right) = 0, \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} - c\left(\hat{w}\hat{A} + \partial_x \cdot \hat{Q}\right) = 0. \end{gathered} \tag{4.17}$$

В этих условиях справедлива следующая

<u>Теорема 12.</u> Если параметры $\varkappa$, c, ε удовлетворяют условиям (3.13) и (4.2), то определенные с помощью решений системы (4.5), (4.6) операторы $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ и функции $\hat{v}$, $\hat{w}$ связаны с определенными ранее операторами L, A, P, Q и функциями v, w соотношениями

$$\hat{v} = \varepsilon \bar{w}, \quad \hat{w} = \varepsilon \bar{v}, \tag{4.18}$$

$$\hat{L} = (-1)^{K_0} L^*, \quad \hat{A} = (-1)^{n_0} A^*, \tag{4.19}$$

$$\hat{P} = (-1)^{n_0+1} \varepsilon Q^*, \quad \hat{Q} = (-1)^{n_0+1} \varepsilon P^*. \tag{4.20}$$

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые факты о свойствах решений системы (1.1), (1.2). Пусть

$$\mu_r = \begin{cases} \frac{1}{2}(\omega_r - \sigma_r), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ -\frac{1}{2}\sigma_r, & \text{если } r_0 < r \le r_0 + r_1, \\ \frac{1}{2}\omega_r, & \text{если } r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1, \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\nu_r = \begin{cases} \frac{1}{2}(\omega_r + \sigma_r), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ \frac{1}{2}\sigma_r, & \text{если } r_0 < r \le r_0 + r_1, \\ \frac{1}{2}\omega_r, & \text{если } r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.22}$$

Возьмем, далее, векторы z и ρ соответственно с $r_0 + 2r_1$ компонентами z_r и ρ_r вида

$$z_r = \begin{cases} f_r^{1/2} \exp\left(\mu_r x + \frac{1}{2}\tau_r y\right), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ f_r^{1/2} \exp(\mu_r x), & \text{если } r_0 < r \le r_0 + 2r_1, \end{cases} \tag{4.23}$$

$$\rho_r = \begin{cases} f_r^{1/2} \exp\left(\nu_r x + \frac{1}{2}\tau_r y\right), & \text{если } 1 \le r \le r_0, \\ f_r^{1/2} \exp(\nu_r x), & \text{если } r_0 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.24}$$

Сделаем теперь в системе (1.1), (1.2) замену

$$X_r^\pm = \rho_r Y_r^\pm, \quad r = 1, \ldots, r_0 + 2r_1. \tag{4.25}$$

В результате получим систему

$$(1 + \theta)Y^+ + J^+ z = 0, \quad (1 + \theta)Y^- = J^- z. \tag{4.26}$$

При этом отличные от нуля элементы $\theta_{r,s}$ матрицы θ имеют вид

$$\theta_{r,s} = \begin{cases} \dfrac{z_r z_s}{\omega_r - \sigma_s}, & 1 \le r \le r_0, \quad 1 \le s \le r_0 + r_1, \\ -\dfrac{z_r z_s}{\sigma_r^{K_0+2} - \omega_s^{K_0+2}}, & r_0 < r \le r_0 + r_1 < s \le r_0 + 2r_1, \\ \dfrac{z_r z_s}{\omega_r - \sigma_s}, & 1 \le s \le r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases} \tag{4.27}$$

Все остальные элементы матрицы θ, очевидно, равны нулю. В силу (4.27) получаем, что решение $Y^\pm$ системы (4.26) будет рациональной функцией $3r_0 + 4r_1$ комплексных параметров z_r, ω_r, σ_r. Отсюда на основании равенств (4.21)-(4.25) вытекает, что определенные посредством (1.17) величины $K_n^\pm$ и $W_n^\pm$ также будут рациональными функциями параметров z_r, ω_r, σ_r. Это значит, что коэффициенты операторов L, A, P, Q и функции v, w зависят рационально от параметров z_r, ω_r, σ_r. Аналогичным образом убеждаемся, что коэффициенты операторов $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ и функции $\hat{v}$, $\hat{w}$ зависят рационально от параметров $\bar{z}_r$, $\bar{\omega}_r$, $\bar{\sigma}_r$.

Доказательство теоремы. Согласно правилу Крамера имеем

$$X_r^\pm = \pm \frac{1}{D} \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{e}_r \\ J^\pm \lambda & 1 + B \end{vmatrix}, \quad \hat{X}_r^\pm = \pm \frac{1}{\hat{D}} \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{e}_r \\ J^\pm \hat{\lambda} & 1 + \hat{B} \end{vmatrix},$$

где e_r – единичный вектор с $r_0 + 2r_1$ компонентами, из которых отлична от нуля только r - ая компонента. Отсюда следует, что

$$W_0^\pm = \pm \frac{1}{D} \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{l} J_0 \\ J^\pm \lambda & 1 + B \end{vmatrix}, \quad \hat{W}_0^\pm = \pm \frac{1}{\hat{D}} \det \begin{vmatrix} 0 & \tilde{\hat{l}} J_0 \\ J^\pm \hat{\lambda} & 1 + \hat{B} \end{vmatrix}, \tag{4.28}$$

$$v=\frac{1}{D}\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\ell}J_1\\ J^+\lambda&1+B\end{vmatrix},\quad \hat{v}=\frac{\varepsilon}{\hat{D}}\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\hat{\ell}}J_1\\ J^+\hat{\lambda}&1+\hat{B}\end{vmatrix}, \qquad (4.29)$$

$$w=\frac{1}{D}\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\ell}J_0\\ J^-\lambda&1+B\end{vmatrix},\quad \hat{w}=\frac{1}{\hat{D}}\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\hat{\ell}}J_0\\ J^-\hat{\lambda}&1+\hat{B}\end{vmatrix}. \qquad (4.30)$$

Нетрудно убедиться, что в силу (I.I5) и (4.I2) справедливы равенства

$$\frac{\partial D}{\partial x}=-\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\ell}J_0\\ J^+\lambda&1+B\end{vmatrix},\quad \frac{\partial \hat{D}}{\partial x}=-\det\begin{vmatrix}0&\tilde{\hat{\ell}}J_0\\ J^+\hat{\lambda}&1+\hat{B}\end{vmatrix}.$$

Отсюда согласно (I.22), (I.39) и (4.28) вытекает, что

$$u_{k_0}=(k_0+2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \hat{u}_{k_0}=(k_0+2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln \hat{D},$$

$$a_{n_0}=(n_0+2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln D,\quad \hat{a}_{n_0}=(n_0+2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln \hat{D},$$

т.е. с учетом (4.I3) имеем

$$\hat{u}_{k_0}=\bar{u}_{k_0},\quad \hat{a}_{n_0}=\bar{a}_{n_0}. \qquad (4.31)$$

Рассмотрим теперь матрицы

$$V=\begin{vmatrix}0&\tilde{\ell}J_1\\ J^+\lambda&1+B\end{vmatrix},\quad \hat{W}=\begin{vmatrix}0&\tilde{\hat{\ell}}J_0\\ J^-\hat{\lambda}&1+\hat{B}\end{vmatrix}.$$

Далее, возьмем матрицы

$$\mathcal{E}_1=\begin{vmatrix}1&0\\0&\mathcal{E}\end{vmatrix},\quad F_1=\begin{vmatrix}1&0\\0&F\end{vmatrix}. \qquad (4.32)$$

где матрицы $\mathcal{E}$ и F определены соответственно посредством (I.8) и (4.9). Справедливо равенство

$$\mathcal{E}_1\bar{F}_1V^*\bar{F}_1^{-1}\mathcal{E}_1=\begin{vmatrix}0&\lambda^*J^+\bar{F}^{-1}\mathcal{E}\\ \mathcal{E}\bar{F}J_1\bar{\ell}&1+\mathcal{E}\bar{F}B^*\bar{F}^{-1}\mathcal{E}\end{vmatrix}.$$

На основании (4.I2) находим, что

$$\lambda^*J^+\bar{F}^{-1}\mathcal{E}=\tilde{\hat{\ell}}J_0,\quad \varepsilon\mathcal{E}\bar{F}J_1\bar{\ell}=J^-\hat{\lambda}.$$

Отсюда , в силу (4.I0), следует равенство $\det\hat{W}=\det V^*$, т.е. с учетом (4.29) и (4.30) имеем $\hat{w}=\varepsilon\bar{v}$. Таким образом, одно из равенств (4.I8) доказано.

Рассмотрим, далее, матрицы

$$\hat{V}=\begin{vmatrix}0&\tilde{\hat{\ell}}J_1\\ J^+\hat{\lambda}&1+\hat{B}\end{vmatrix},\quad W=\begin{vmatrix}0&\tilde{\ell}J_0\\ J^-\lambda&1+B\end{vmatrix}.$$

Согласно (4.32) справедливо равенство

$$\mathcal{E}_1\bar{F}_1W^*\bar{F}_1^{-1}\mathcal{E}_1=\begin{vmatrix}0&\lambda^*J^-\bar{F}^{-1}\mathcal{E}\\ \mathcal{E}\bar{F}J_0\bar{\ell}&1+\mathcal{E}\bar{F}B^*\bar{F}^{-1}\mathcal{E}\end{vmatrix}.$$

С помощью (4.I2) получаем

$$\lambda^*J^-\bar{F}^{-1}\mathcal{E}=\tilde{\hat{\ell}}J_1,\quad \mathcal{E}\bar{F}J_0\bar{\ell}=J^+\hat{\lambda}.$$

Это значит, что в соответствии с (4.I0) имеем $\det\hat{V}=\det W^*$, т.е. на основании (4.29) и (4.30) справедливо равенство $\hat{v}=\varepsilon\bar{w}$. Таким образом, второе равенство (4.I8) также доказано.

Воспользуемся теперь соотношениями (3.I), (3.2) и (4.I7). С их помощью на основе предположений теоремы и равенств (4.I8) убеждаемся, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{L}_1-(-1)^{k_0}L_1^*)+c\varkappa\frac{\partial}{\partial y}(\hat{A}-(-1)^{n_0}A^*)+c[\hat{A},\hat{L}_1-(-1)^{k_0}L_1^*]+(-1)^{k_0}c[\hat{A}-(-1)^{n_0}A^*,L_1^*]+c(\hat{P}+(-1)^{n_0}\varepsilon Q^*)\cdot\hat{w}-c\hat{v}(\hat{Q}+(-1)^{n_0}\varepsilon P^*)=0, \qquad (4.33)$$

$$\varepsilon\bar{v}(\hat{A}-(-1)^{n_0}A^*)+\partial_x\cdot(\hat{Q}+(-1)^{n_0}\varepsilon P^*)=0, \qquad (4.34)$$

$$\varepsilon(\hat{A}-(-1)^{n_0}A^*)\cdot\bar{w}+(\hat{P}+(-1)^{n_0}\varepsilon Q^*)\partial_x=0. \qquad (4.35)$$

На основании (3.3I) при $n_0=0$ справедливо второе из равенств (4.I9). Отсюда согласно (4.34) и (4.35) следует, что при $n_0=0$ справедливы оба равенства (4.20). С учетом этих замечаний из соотношения (4.33) следует, что равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{L}_1-(-1)^{k_0}L_1^*)+c[\hat{A},\hat{L}_1-(-1)^{k_0}L_1^*]=0 \qquad (4.36)$$

справедливо при $n_0=0$ и любом $k_0\geqslant 0$. Покажем, что отсюда следует справедливость первого из равенств (4.I9) при любом $k_0\geqslant 0$. Действительно , положим

$$\hat{L}_1-(-1)^{k_0}L_1^*=\sum_{m=0}^{m_0}\alpha_m\partial_x^m,$$

где в силу (4.3I) имеем $m_0<k_0$. Тогда в соответствии с (4.36) имеем $\frac{\partial}{\partial x}\alpha_{m_0}\equiv 0$. Как мы установили ранее, $\bar{\alpha}_{m_0}$ зависит рационально от величин z_r , ω_r , σ_r . Далее, согласно (4.23) имеем

$$\frac{\partial\bar{\alpha}_{m_0}}{\partial x}=\sum_{r=1}^{r_0+2r_1}\frac{\partial\bar{\alpha}_{m_0}}{\partial z_r}z_r\mu_r\equiv 0.$$

Поскольку $\frac{\partial^2\bar{\alpha}_{m_0}}{\partial x\partial z_r}=\frac{\partial^2\bar{\alpha}_{m_0}}{\partial z_r\partial x}\equiv 0$ при $r=1,\dots,r_0+2r_1$, то при любом $s>0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^s \bar{\alpha}_{m_0}}{\partial x^s} = \sum_{r=1}^{r_0+2r_1} \frac{\partial \bar{\alpha}_{m_0}}{\partial z_r} z_r \mu_r^s \equiv 0$$

Отсюда следует, что в области параметров ω_r, σ_r, в которой определенные посредством (4.2I) величины μ_r отличны от нуля и друг от друга, имеем тождества

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_{m_0}}{\partial z_r} \equiv 0, \quad r = 1, \ldots, r_0 + 2r_1 .$$

С учетом того, что при $f_1 = \ldots = f_{r_0+2r_1} = 0$ коэффициент α_{m_0} обращается в нуль, получаем $\alpha_{m_0} \equiv 0$, т.е. соотношение $\hat{L} = (-1)^{K_0} L^*$ справедливо при любом $K_0 \geqslant 0$.

Аналогичным образом доказывается второе из соотношений (4.I9). Действительно, положим

$$\hat{A} - (-1)^{n_0} A^* = \sum_{m=0}^{m_0} \beta_m \partial_x^m ,$$

где согласно (4.3I) имеем $m_0 < n_0$. На основании (4.33)-(4.35) получаем, что $\frac{\partial}{\partial x} \beta_{m_0} \equiv 0$. Отсюда следует, что $\beta_{m_0} \equiv 0$, т.е. соотношение $\hat{A} = (-1)^{n_0} A^*$ справедливо при любом $n_0 \geqslant 0$.

Наконец, с помощью (4.34) и (4.35) убеждаемся, что (4.20) вытекает из (4.I9).

Теорема доказана.

Предположим теперь, что входящие в систему (I.I), (I.2) параметры f_r, ω_r, σ_r, τ_r удовлетворяют соотношениям

$$f_r = \bar{f}_r, \ \sigma_r = -\bar{\omega}_r, \ \tau_r = \bar{\tau}_r, \ r = 1, \ldots, r_0, \qquad (4.37)$$

$$f_{r_0+r} = \varepsilon \bar{f}_{r_0+r_1+r}, \ \sigma_{r_0+r} = -\bar{\omega}_{r_0+r_1+r}, \ r = 1, \ldots, r_1 .$$

Эти соотношения согласуются с условием (I.6) и уравнением (I.35), если величины c, $\varkappa$ и ε удовлетворяют равенствам (3.I3) и (4.2). Тогда на основании теоремы I2 убеждаемся, что в этом случае получаемые с помощью решений системы (I.I), (I.2) операторы L, A, P, Q и функции v, w удовлетворяют соотношениям

$$L = (-1)^{K_0} L^*, \ A = (-1)^{n_0} A^*, \ P = (-1)^{n_0+1} \varepsilon Q^*, \ w = \varepsilon \bar{v}.$$

Предположим дополнительно, что величины $\omega_1, \ldots, \omega_{r_0}$ все разные, при $r_0 + r_1 < r < s \leq r_0 + 2r_1$ выполняется неравенство $\omega_r^{K_0+2} - \omega_s^{K_0+2} \neq 0$, при любых $r = 1, \ldots, r_0$ и $s = 1, \ldots, r_1$ имеем $\omega_r + \bar{\omega}_{r_0+r_1+s} \neq 0$, а при любых $r, s = r_0 + r_1 + 1, \ldots, r_0 + 2r_1$ пусть $\omega_r + \bar{\omega}_s \neq 0$. Наконец, предположим, что величины f_r, ω_r удовлетворяют условиям

$$f_r > 0, \ \operatorname{Re} \omega_r > 0, \ r = 1, \ldots, r_0, \qquad (4.38)$$

$$f_r \neq 0, \ \operatorname{Re} \omega_r < 0, \ [\bar{\omega}_r^{K_0+2} - (-1)^{K_0} \omega_r^{K_0+2}] \varepsilon > 0, \ r = r_0 + r_1 + 1, \ldots, r_0 + 2r_1 .$$

Тогда справедлива следующая

Теорема I3. Если величины $\varkappa$, c, ε удовлетворяют соотношениям (3.I3) и (4.2), а параметры f_r, ω_r, σ_r, τ_r удовлетворяют условиям (4.37) и (4.38), то при любых вещественных x, y, t выполняется неравенство

$$D = \det(1 + B) > 0. \qquad (4.39)$$

Доказательство. Представим матрицу θ с определенными посредством (4.27) элементами $\theta_{r,s}$ в виде

$$\theta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ a & b & 0 \end{vmatrix}, \qquad (4.40)$$

где α – квадратная матрица порядка r_0, β – прямоугольная матрица с r_0 строками и r_1 столбцами, γ и b – квадратные матрицы порядка r_1, наконец, a – прямоугольная матрица с r_1 строками и r_0 столбцами. В силу (4.37) и (4.38) мы можем выбрать величины z_r так, что при $r = 1, \ldots, r_0$ имеем $z_r > 0$, а при $r = 1, \ldots, r_1$ выполняются соотношения $z_{r_0+r} = -\varepsilon^{1/2} \bar{z}_{r_0+r_1+r}$, $z_{r_0+r_1+r} = -\varepsilon^{1/2} \bar{z}_{r_0+r}$. Отсюда следует, что определенные выше матрицы α, β, γ, a, b удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^* = \alpha, \ \beta^* = -\bar{\varepsilon}^{1/2} a, \ \gamma^* = \varepsilon \gamma, \ a^* = -\bar{\varepsilon}^{1/2} \beta, \ b^* = \bar{\varepsilon} b. \qquad (4.4I)$$

С учетом (4.38) получаем, что эрмитова матрица $1 + \alpha$ определена положительно. Значит, справедливо неравенство $\det(1 + \alpha) > 0$. С помощью этого неравенства на основании (4.40) находим

$$\det(1 + \theta) = \det(1 + \alpha) \cdot \det[1 + b\gamma - a(1 + \alpha)^{-1} \beta\gamma]. \qquad (4.42)$$

Рассмотрим матрицу $R = \varepsilon^{1/2} \gamma [1 + b\gamma - a(1 + \alpha)^{-1} \beta\gamma]$. В соответствии с (4.37),(4.38) и (4.4I) получаем, что матрицы $\varepsilon^{1/2} \gamma$ и $\bar{\varepsilon}^{1/2} b$ эрмитовы и определены положительно. Отсюда следует, что эрмитова матрица $\varepsilon^{1/2} \gamma b \gamma$ также определена положительно. Далее, согласно (4.4I) матрица $R_0 = -\varepsilon^{1/2} \gamma a (1 + \alpha)^{-1} \beta \gamma$ может быть представлена в виде $R_0 = \gamma^* \beta^* (1 + \alpha)^{-1} \beta \gamma$. Следовательно, матрица R_0 является эрмитовой и положительно определенной. Таким образом, матрица R является суммой трех положительно определенных матриц. Значит, имеем $\det R > 0$. Отсюда на основе (4.42) вытекает неравенство $\det(1 + \theta) > 0$. Поскольку матрицы B и θ подобны, то отсюда следует неравенство (4.39).

Теорема доказана.

Полученное таким образом решение системы (3.I), (3.2) определено при всех вещественных значениях x, y, t и представляет собой суперпозицию r_0 уединенных волн одного типа и r_1 уединенных волн другого типа. Волны первого типа описываются уравнениями, порождаемыми операторным соотношением (3.I), если в нем положить $v = w \equiv 0$. Они имеют форму вала и могут распространяться на плоскости x, y в любом направлении. Волны второго типа описываются уравнениями, получаемыми из операторных соотношений (3.I), (3.2) при $\varkappa = 0$. Они также имеют форму вала, но могут распространяться на плоскости x, y только вдоль оси x. Нелинейный характер суперпозиции приводит к искажению этих волн. При стремлении к бесконечности вдоль гребня любой из этих волн искажение рассматриваемой волны стремится к нулю и остается только сдвиг по фазе.

Для того, чтобы полученные с помощью решений системы (I.I),(I.2) операторы L, A, P, Q и функции v, w удовлетворяли второму типу симметрий, поступим несколько иначе. Заменим в системе (I.I), (I.2) вектор f и матрицы ω, σ, τ на вектор $\hat{f}$ и матрицы $\hat{\omega}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ вида

$$\hat{f} = \bar{\varepsilon}' f, \quad \hat{\omega} = -\mathcal{E}\sigma\mathcal{E}, \quad \hat{\sigma} = -\mathcal{E}\omega\mathcal{E}, \quad \hat{\tau} = \tau,$$

где матрицы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ определены посредством (I.8) и (4.I). Заменим, далее, в этой системе векторы $X^{\pm}$ на векторы $\bar{J}\hat{X}^{\pm}$, где матрица J имеет вид (4.4). В результате получим систему

$$(1 + B')\hat{X}^{+} + J^{+}\lambda' = 0, \quad (1 + B')\hat{X}^{-} = J^{-}\lambda'. \tag{4.43}$$

Очевидно, что входящие в эту систему матрица B' и вектор λ' связаны с входящими в систему (4.5), (4.6) матрицей $\hat{B}$ и вектором $\hat{\lambda}$ соотношениями $\hat{B} = \bar{B}'$, $\hat{\lambda} = \bar{\lambda}'$. Отсюда на основании (4.I0) следует, что определители матриц $1 + B$ и $1 + B'$ равны. Возьмем теперь вектор l' с $r_0 + 2r_1$ компонентами l'_r вида

$$l'_r = \begin{cases} \exp(\omega_r x), \text{ если } 1 \le r \le r_0, \\ \exp(\omega_{r_1+r}\, x), \text{ если } r_0 < r \le r_0 + r_1, \\ 1, \text{ если } r_0 + r_1 < r \le r_0 + 2r_1. \end{cases}$$

Определим, наконец, с помощью решений $\hat{X}^{\pm}$ системы (4.43) величины

$$\hat{K}_n^{\pm} = \tilde{l}'\,\hat{\sigma}^n J_0 \hat{X}^{\pm}, \quad \hat{W}_n^{\pm} = \tilde{l}' J_0 \frac{\partial^n \hat{X}^{\pm}}{\partial x^n}.$$

Используя так заданные величины $\hat{K}_n^{\pm}$ и $\hat{W}_n^{\pm}$, определим операторы $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ аналогично тому, как ранее были определены операторы L, A, P, Q. Определим функции $\hat{v}$ и $\hat{w}$ посредством равенств

$$\hat{v} = \bar{\varepsilon} J_1 \hat{X}^{+}, \quad \hat{w} = -\hat{W}_0^{-}.$$

Предположим теперь, что целые числа K_0 и n_0 оба нечетные, а величина ε удовлетворяет условию (4.2). Тогда почти дословным повторением

доказательства теоремы I2 убеждаемся, что в рассматриваемом сейчас случае справедливы равенства

$$\hat{v} = \bar{\varepsilon} w, \quad \hat{w} = \bar{\varepsilon} v, \quad \hat{L} = (-1)^{K_0}\tilde{L}, \quad \hat{A} = (-1)^{n_0}\tilde{A},$$
$$\hat{P} = (-1)^{n_0+1}\bar{\varepsilon}\,\tilde{Q}, \quad \hat{Q} = (-1)^{n_0+1}\bar{\varepsilon}\,\tilde{P}. \tag{4.44}$$

Заметим, что соотношения (4.44) останутся справедливыми и при ином выборе целых чисел K_0 и n_0 при условии замены в системе (4.I7) используемых нами величин $\varkappa$ и c соответственно на $(-1)^{K_0+1}\varkappa$ и $(-1)^{n_0+1}c$. На основании этих равенств получаем, что, если целые числа K_0 и n_0 оба нечетные, $\varepsilon^2 = 1$, а входящие в систему (I.I), (I.2) величины f_r, ω_r, σ_r удовлетворяют условиям

$$\sigma_r = -\omega_r, \; r = 1, \ldots, r_0,$$

$$f_r = \varepsilon f_{r_1+r}, \quad \sigma_r = -\omega_{r_1+r}, \quad r = r_0+1, \ldots, r_0+r_1,$$

то определенные с помощью решений системы (I.I), (I.2) операторы L, A, P, Q и функции v, w удовлетворяют соотношениям

$$L = -\tilde{L}, \quad A = -\tilde{A}, \quad P = \varepsilon\tilde{Q}, \quad w = \varepsilon v.$$

Существуют и другие возможности для получения операторов L, A, P, Q и функций v, w, обладающих указанными выше симметриями. Они основаны на иных требованиях, накладываемых на параметры f_r, ω_r, σ_r, τ_r. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

В заключение отметим, что изложенные в настоящей статье результаты допускают развитие в нескольких направлениях. Прежде всего, входящие в систему (I.I), (I.2) конечные суммы могут быть заменены бесконечными рядами. Далее, второе обобщение состоит в замене входящих в определение системы (I.I), (I.2) сумм интегралами по контуру, лежащему в комплексной плоскости непрерывного индекса s. Возникающие при этом трудности носят не только технический характер и будут рассмотрены детально в отдельной работе.

Наконец, с изучаемыми здесь уравнениями тесно связаны несколько уравнений, которые получаются из рассматриваемых здесь уравнений при замене y на x, либо при поиске не зависящих от y решений этих уравнений. Во втором случае проблема решается просто. Нужно положить $\varkappa = 0$ во всех формулах этой статьи, начиная с определения оператора $\mathcal{L} - \eta I$ вида (I) и условий (I.6). Наоборот, в первом случае приходится модифицировать весь алгоритм нахождения решений, начиная с системы уравнений (I.I), (I.2). Суть этих изменений может быть извлечена из текста настоящей статьи и поэтому подробнее на этом останавливаться не будем.

Литература:

I. Мельников В.К. В сб.: Труды У Международного семинара "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля", Протвино, 1982, т. I, с. 93-114.
2. Mel'nikov V.K. Lett. Math. Phys.,1983, v. 7, No 2, p. 129-136.
3. Gardner C.S. et al. Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, No 19, p. 1095-1097.
4. Дрюма В.С. Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 19, вып. 12, с. 753-755.
5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Функц. анализ. 1974, т. 8, вып. 3, с. 43-53.
6. Satsuma J.J. Phys. Soc. Japan, 1976, v. 40, No 1, p. 286-290.
7. Bordag L.A. et al. Phys. Lett., 1977, v. 63A, No 3, p. 205-206.
8. Захаров В.Е., Манаков С.В. Функц. анализ, 1985, т. 19, вып. 2, с. 11-25.
9. Мельников В.К. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. Труды Международного семинара. Звенигород, 1982, М.: "Наука", 1983, т. 2, с. 308-323.
10. Мельников В.К. Матем. сб., 1983, т. 121(163), № 4(8), с. 469-498.
11. Мельников В.К. В сб.: Труды УП Международного совещания по проблемам квантовой теории поля, ОИЯИ, Д2-84-366, Дубна, 1984, с.56-70.
12. Мельников В.К. В сб.: Ш Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики, ОИЯИ, Д17-84-850, Дубна, 1984, т. 2, с. 79-88.
13. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Изв. АН, сер. матем., 1951, т. 15, № 4, с. 309-360.
14. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, т. 192, № 4, с. 753-756.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1985 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Мельников В.К. Р2-85-958

Об уравнениях, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния

Указан алгоритм для получения точных решений нескольких нелинейных эволюционных уравнений, описывающих взаимодействие волн на плоскости x, y. Алгоритм основан на идеях, порождаемых методом обратной задачи рассеяния, и применим к решению ряда задач математической физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод автора

Mel'nikov V.K. P2-85-958

On Equations Integrable by the Inverse Scattering Method

The algorithm is found for deriving exact solutions for some nonlinear evolution equations describing the wave interaction on the x, y plane. The algorithm is based on the ideas generated by the inverse scattering method. It is applicable to the solution of some problems of mathematical physics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985