сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-943

В.В.Курышкин*, Н.В.Сидорков*, Э.Э.Энтральго

КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ВЕРОЯТНОСТИ КООРДИНАТ И ИМПУЛЬСОВ

* Ордена Дружбы народов Университет дружбы народов имени П.Лумумбы

1985

Введение

В работе [1] рассматривался пример нерелятивистской бесспиновой квантовой механики, в которой каждому квантовому состоянию $\psi(t)$ соответствует нормированное неотрицательное координатно-импульсное распределение $F_\psi(q,p,t)$. Свойства распределения F_ψ в такой теории позволяют интерпретировать величину $F_\psi(q,p,t)\,dq\,dp$ как вероятность попадания системы, находящейся в состоянии $\psi(t)$, в область фазового пространства $[q,p;\ q+dq,p+dp]$.

Построение обсуждавшейся в [1] теории основывалось на введении специфического правила соответствия [2] (правила построения квантовых операторов $\hat{A}(t)$ по известным классическим функциям $A(q,p,t)$), представляющего собой линейное отображение $\hat{A}(t)=O_{\{\varphi_\kappa\}}(A(q,p,t))$, параметрически зависящее от набора вспомогательных ("субквантовых") функций $\varphi_\kappa(\xi,t)$ ($\xi\in R_\xi$ – вспомогательное пространство, изоморфное пространству конфигураций R_q).

В работе [1] было показано, что исследуемая теория включает в себя (при надлежащих выборах функций $\{\varphi_\kappa\}$) как классическую статистическую теорию, так и основную часть общепринятой квантовой механики, а решение задач в рамках ее формализма может приводить к разумным (качественным в силу недоопределенности $\{\varphi_\kappa\}$) результатам.

Поэтому вполне понятен интерес к обобщению изложенной в [1] процедуры квантования на случай систем со спином, релятивистских систем, теории поля и т.п. Такое обобщение может быть проведено с помощью предложенной в [3] переформулировки правила соответствия [2], приводящего к теории с соответствием $\psi\to F_\psi\geq 0$, на основе линейного оператора $\hat{F}(q,p,t)$, определяющего координатно-импульсное распределение как $F_\psi=(\psi|\hat{F}\psi)$ и по этой причине называемого [3,4] оператором вероятности координат и импульсов.

Отдельные вопросы, связанные с квантованием на основе оператора вероятности координат и импульсов, обсуждались в работах [3–6].

В настоящей статье рассматриваются общие свойства оператора вероятности и возможные методы его построения, связанные с особенностями исходной классической теории и алгебры, выбранной для проведения процедуры квантования.

ний $\bar{f}_\psi = (\psi/\hat{f}\psi)/(\psi/\psi)$, для которых автоматически выполняется соотношение (5б) (подробнее см., например, [4,5]).

2. Оператор вероятности координат и импульсов

Требования I и II к процедуре квантования, сформулированные в предыдущем параграфе в виде соотношений (4) и (5), позволяют доказать следующее

Утверждение. Любая процедура квантования, использующая линейное отображение $\hat{A}(t) = O(A(q,p,t))$ и приводящая к Q -теории с соответствием $\psi \to F_\psi \geq 0$, содержит в себе линейный, параметрически зависящий от q , p и t, оператор $\hat{F}(q,p,t) \in \mathcal{A}$, обладающий свойством нормировки и неотрицательности

$$\int \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = \hat{1}\ , \qquad (\psi/\hat{F}(q,p,t)\psi) \geq 0\ , \qquad (6а)$$

для любых $q,p \in R_{qp}$, t и $\psi \in \mathcal{L}$, и определяющий всю совокупность операторов физических величин согласно правилу соответствия

$$\hat{A}(t) = O_{\hat{F}}(A(q,p,t)) = \int A(q,p,t)\,\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp \in \mathcal{A}\ . \qquad (6б)$$

Достаточность существования оператора $\hat{F}$ вытекает из следующих рассуждений. При построении квантовых операторов по правилу (6) справедливость соотношений (4) очевидна. Вычисляя значения (2а) операторов (6б) в произвольных состояниях $\psi \in \mathcal{L}$, приходим к (5б), где

$$F_\psi(q,p,t) = (\psi/\hat{F}(q,p,t)\psi)\,/\,(\psi/\psi)\ . \qquad (7)$$

Наконец из свойств (6а) оператора $\hat{F}$ следуют свойства (5а) координатно-импульсного распределения (7).

Для доказательства необходимости существования оператора $\hat{F}$ рассмотрим характеристическую функцию распределения F_ψ , существующую согласно требованию 2:

$$\tilde{F}(u,v,t) = (2\pi)^{-2N}\int F_\psi(q,p,t)\,e^{-i(uq+vp)}\,dq\,dp\ .$$

Используя соотношение (5б) и отображение (3), перепишем ее в виде:

$$\tilde{F}(u,v,t) = \langle (2\pi)^{-2N} e^{-i(uq+vp)} \rangle_\psi = (\psi/O((2\pi)^{-2N} e^{-i(uq+vp)})\psi)/(\psi/\psi)\ .$$

Восстанавливая по $\tilde{F}$ исходное распределение, имеем:

$$F_\psi(\xi,\eta,t) = (\psi|\int du\,dv\, e^{i(u\xi+v\eta)}\,O((2\pi)^{-2N} e^{-i(uq+vp)})\psi)/(\psi/\psi)$$

что с учетом линейности (4) отображения $O(\dots)$ приводит к соотношению (7), где

$$\hat{F}(\xi,\eta,t) = O(\delta(\xi-q)\,\delta(\eta-p)) \in \mathcal{A}\ . \qquad (8)$$

Записывая теперь отображение (3) в виде

$$\hat{A}(t) = O(A(q,p,t)) = O\left(\int A(\xi,\eta,t)\,\delta(\xi-q)\,\delta(\eta-p)\,d\xi\,d\eta\right)$$

и используя линейность (4), приходим к правилу (6б) с оператором (8). Наконец из соотношения (7) и условий (5а) требования 2 следуют свойства (6а) оператора (8), что и доказывает утверждение.

Отметим, что согласно соотношению (7) значения оператора $\hat{F}$, понимаемые в смысле квантовых значений (2а), при любых $\psi \in \mathcal{L}$ совпадают на всем пространстве R_{qp} со значениями плотности вероятности координат и импульсов F_ψ , т.е. с точки зрения Q -теории $\hat{F}$ есть оператор вероятности. При этом из (8) следует, что в силу отображения (6) сам оператор вероятности $\hat{F}$ соответствует классической δ- функции фазового пространства.

3. Принципы статистического, динамического и канонического соответствия

Согласно утверждению предыдущего параграфа, линейная процедура квантования, приводящая к Q -теории с соответствием $\psi \to F_\psi \geq 0$, при заданных пространстве $\mathcal{L}$ и алгебре $\mathcal{A}$ в $\mathcal{L}$ однозначно определяется оператором вероятности координат и импульсов $\hat{F}(q,p,t) \in \mathcal{A}$, устанавливающим соответствие (6б) между объектами $A(q,p,t)$ и $\hat{A}(t)$, изображающими одну и ту же физическую величину A в C - и Q -теориях (статистическое соответствие).

Однако для установления явного вида самого оператора $\hat{F}$ (в заданной алгебре) свойств (6а) нормировки и неотрицательности недостаточно. Поэтому возникает задача о доопределении оператора вероятности на основе некоторых требований, предъявляемых к отображению (6б) в дополнение к условиям (6а).

Для этого, следуя работе [5], рассмотрим изменение значений физических величин A со временем. В C -теории, в силу соотношений (1),

$$d_t\langle A\rangle_x = \left(\partial_t A(q,p,t) + \{H(q,p,t), A(q,p,t)\}\right)\big|_{(q,p)=x}\ ; \quad (9)$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ - классическая скобка Пуассона. В Q -теории, в силу соотношений (2),

$$d_t\langle A\rangle_\psi = \left(\psi/(\partial_t \hat{A}(t) + \tfrac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{A}(t)]_-)\psi\right)/(\psi/\psi)\ , \quad (10)$$

где $[\cdot,\cdot]_-$ - коммутатор. Сравнивая C -соотношения (1а) и (9) с соответствующими Q -соотношениями (2а) и (I0), вполне логично потребовать, чтобы отображение (3) распространялось и на объекты, определяющие, согласно общим правилам вычисления значений (Iа) и (2а), изменения значений физических величин со временем, т.е.

$$\partial_t \hat{A}(t) + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{A}(t)]_- =$$
$$= O\left(\partial_t A(q,p,t) + \{H(q,p,t), A(q,p,t)\}\right). \qquad \text{(II)}$$

Совокупность равенств (II) отражает [5,7] принцип динамического соответствия в процедуре квантования (в отличие от статистического соответствия, отражаемого равенствами (6)).

При построении Q -теории с соответствием $\psi \to F_\psi \geq 0$ возможность записи линейного отображения (3) в виде правила (6б) с оператором вероятности $\hat{F}$ приводит равенства (II) к совокупности условий, предъявляемых к оператору вероятности. Эти условия удобно записать в виде

$$-\int A(q,p,t)\cdot\partial_t \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp + O_{\hat{F}}\left(\{H(q,p,t), A(q,p,t)\}\right) =$$
$$= \frac{i}{\hbar}\left[O_{\hat{F}}(H(q,p,t)),\ O_{\hat{F}}(A(q,p,t))\right]_- \qquad \text{(I2а)}$$

для всех $A \in H \cup \{A\}_{exp}$, где $O_{\hat{F}}(\cdots)$ означает отображение (6).

Сразу же отметим, что условия (I2а) требуют определенного согласования изменений гамильтониана системы и оператора вероятности во времени. Так из (6б) и (I2а) при $A = H$ следует:

$$\int H(q,p,t)\cdot\partial_t \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = 0, \quad \partial_t \hat{H}(t) = \int \partial_t H(q,p,t)\cdot\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp \qquad \text{(I2б)}$$

и $\partial_t \hat{H}(t) = 0$, если $\partial_t H(q,p,t) \equiv 0$.

Отметим еще, что, если

$$\int A(q,p,t)\cdot\partial_t \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = 0, \qquad A \in \{A\}_{exp}, \qquad \text{(I3а)}$$

то условия (I2а) означают соответствие между C - и Q -скобками Пуассона для H и любой $A \in \{A\}_{exp}$. Такое соответствие можно попытаться обобщить (при выполненных условиях (I3а)), потребовав еще и выполнения равенств

$$O_{\hat{F}}\left(\{A(q,p,t), B(q,p,t)\}\right) = \frac{i}{\hbar}\left[O_{\hat{F}}(A(q,p,t)),\ O_{\hat{F}}(B(q,p,t))\right]_- \qquad \text{(I3б)}$$

для любой пары $A, B \in \{A\}_{exp}$.

Совокупность равенств (I3) отражает принцип канонического соответствия, широко используемый в современных процедурах квантования (каноническое квантование). Следует подчеркнуть, что принцип канонического соответствия может быть, по-видимому, соблюден лишь при инвариантных относительно трансляций времени исходных C -теориях и некоммутативных алгебрах $\mathcal{A}$.

4. Процедура квантования с оператором вероятности

Используя результаты предыдущих параграфов, можно сформулировать процедуру перехода от C -теории к Q -теории с соответствием $\psi \to F_\psi \geq 0$ следующим образом.

Пусть а) известны функции $H(q,p,t)$ и $\{A(q,p,t)\}_{exp}$, изображающие в C -теории гамильтониан H и множество физических величин $\{A\}_{exp}$, значения каждой из которых доступны экспериментальному измерению, и пусть б) задано некоторое комплексное векторное пространство $\mathcal{L}$ и алгебра $\mathcal{A}$ линейных в нем операторов.

Тогда операторы $\hat{H}(t)$ и $\{\hat{A}(t)\}_{exp}$ в Q -теории с пространством состояний $\mathcal{L}$ определятся правилом соответствия:

$$\hat{A}(t) = \int A(q,p,t)\,\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp \in \mathcal{A}, \qquad \text{(I4)}$$

где $A \in H \cup \{A\}_{exp}$, $\hat{F}(q,p,t)$ - неотрицательный в $\mathcal{L}$ оператор вероятности координат и импульсов, т.е.

$$\hat{F}(q,p,t) = \sum_n \hat{f}^{+}_n(q,p,t)\,\hat{f}_n(q,p,t), \qquad \hat{f}_n(q,p,t) \in \mathcal{A}, \qquad \text{(I5)}$$

n - некоторый (собирательный) индекс суммирования.

Оператор $\hat{F}$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = \hat{1} \in \mathcal{A} \qquad \text{(I6)}$$

и системе интегральных уравнений

$$-\int A(q,p,t)\,\partial_t \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp + \int \{H(q,p,t), A(q,p,t)\}\,\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp =$$
$$= \frac{i}{\hbar}\int H(q,p,t)\,A(q',p',t)\left[\hat{F}(q,p,t),\ \hat{F}(q',p',t)\right]_- dq'dp'dq\,dp \qquad \text{(I7)}$$

с $A \in H \cup \{A\}_{exp}$, вытекающей из (I2а) и отражающей принцип динамического соответствия.

Следовательно, для проведения процедуры квантования (I4) с оператором вероятности следует прежде всего решить систему уравнений (I7) относительно оператора $\hat{F}$, имеющего структуру (I5), удовлетворяющего нормировке (I6) и сохраняющего смысл интегралов (I4).

При этом могут реализоваться три различных случая:

I. Задача не имеет решения. Это означает, что рассматриваемая C -теория не квантуется методом оператора вероятности при выбранных $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ (аналог теоремы Паули в квантовой теории поля).

2. Задача имеет единственное решение, т.е. C -теория проквантована и искомая Q -теория построена.

3. Задача имеет некоторое множество решений. В этом случае можно попытаться сузить множество решений либо системой дополнительных уравнений

$$\int A(q,p,t)\,\partial_t \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = 0, \qquad \int \{A(q,p,t), B(q,p,t)\}\,\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int A(q,p,t)\,B(q',p',t)\,[\hat{F}(q,p,t), \hat{F}(q',p',t)]_-\,dq'dp'dq\,dp \qquad (18)$$

с $A, B \in \{A\}_{exp}$, следующих из (13а,б) и отражающих принцип канонического соответствия, либо расширением множества $\{A\}_{exp}$ в (17), и одновременно в (18), до некоторого множества $\{A\}' \supset \{A\}_{exp}$.

В заключение отметим, что процедура квантования с оператором вероятности а) всегда сохраняет множество динамических инвариантов исходной C -теории во множестве динамических инвариантов получаемой Q -теории и б) существенно зависит от гамильтониана системы, т.е. при заданной алгебре $\mathcal{A}$ может оказаться различной для двух физических систем, описываемых в одной и той же C -теории.

5. Оператор вероятности на коммутативных алгебрах

Если задача (14)-(17) имеет некоторое решение $\hat{F}(q,p,t)$ в коммутативной алгебре $\mathcal{A}$, то оно не может удовлетворять системе уравнений (18). На самом деле, при $A = q_j$ и $B = p_j$ второе соотношение из (18) в силу коммутативности $[\hat{F}(q,p,t), \hat{F}(q',p',t)]_- = [\hat{F}(q,p,t), \hat{A}(t)]_- \equiv 0$ противоречит условию нормировки (16). Следовательно, при квантовании с оператором вероятности принцип канонического соответствия несовместим с коммутативной алгеброй.

Расширяя множество $\{A(q,p,t)\}_{exp}$ до множества аналитических на R_{qp} функций, из (17) после интегрирования по частям с учетом произвольности $A(q,p,t)$ и коммутативности алгебры получим уравнение

$$\partial_t \hat{F}(q,p,t) + \{H(q,p,t), \hat{F}(q,p,t)\} \equiv 0. \qquad (19а)$$

Вводя теперь в рассмотрение распределение

$$F_\psi(q,p,t) = (\psi(t)/\hat{F}(q,p,t)\psi(t)) \,/\, (\psi(t)/\psi(t)), \qquad (19б)$$

из определения (2а), конструкции (15) и нормировки (16) имеем

$$\langle A\rangle_{\psi(t)} = \int A(q,p,t)F_\psi(q,p,t)\,dq\,dp, \quad F_\psi(q,p,t) \geq 0, \quad \int F_\psi(q,p,t)\,dq\,dp = 1. \qquad (20а)$$

Наконец, дифференцируя распределение (19б) по времени с учетом коммутативности операторов в (2б) и (19а), получим уравнение Лиувилля:

$$\partial_t F_\psi(q,p,t) + \{H(q,p,t), F_\psi(q,p,t)\} = 0. \qquad (20б)$$

Соотношения (20) показывают, что квантование C -теории на основе оператора вероятности в коммутативной алгебре приводит к Q -теории, совпадающей с классической статистической теорией.

6. Оператор вероятности координат и импульсов на алгебре бозе-операторов

Рассмотрим квантование C -теории с $2N$ классическими образующими (q_j, p_j) на алгебре $\mathcal{A}_B(N)$ бозе-операторов, взаимно-сопряженные образующие (a_j, a_j^+) которой удовлетворяют соотношениям

$$[a_j, a_l^+]_- = \delta_{jl}\hat{1}, \qquad [a_j, a_l]_- = 0, \qquad j,l = \overline{1,N}. \qquad (21а)$$

Перейдем к самосопряженным образующим бозе-алгебры $X_j = (a_j - a_j^+)/i\sqrt{2}$ и $Y_j = (a_j + a_j^+)/\sqrt{2}$. Тогда

$$[X_j, Y_l]_- = -i\delta_{jl}\hat{1}, \qquad [X_j, X_l]_- = [Y_j, Y_l]_- = 0. \qquad (21б)$$

Перестановочные соотношения (21) позволяют записать оператор $\hat{F}$ и операторы $\hat{f}_n$ из (15) в упорядоченной форме, например:

$$\hat{F}(q,p,t) = \int F(q,p,\xi,\eta,t)\cdot e^{i(\xi X + \eta Y)}\,d\xi\,d\eta \in \mathcal{A}_B(N), \qquad (22а)$$

$$\hat{f}_n(q,p,t) = \int f_n(q,p,\xi,\eta,t)\cdot e^{i(\xi X + \eta Y)}\,d\xi\,d\eta \in \mathcal{A}_B(N), \qquad (22б)$$

$\xi \in R^N$, $\eta \in R^N$, ξX и ηY – скалярные произведения. Подставляя выражения (22) в (15) и используя тождество Вейля, $\exp(A+B) = \exp(-[A,B]/2)\cdot\exp(A)\cdot\exp(B)$ при $[A,[A,B]_-]_- = [B,[A,B]_-]_- = 0$, после несложных преобразований получим

$$F(q,p,\xi,\eta,t) = \sum_n \int f_n^*(q,p,\xi',\eta',t)\, f_n(q,p,\xi+\xi',\eta+\eta',t)\, e^{\frac{i}{2}(\xi\eta' - \xi'\eta)}\,d\xi'd\eta'. \qquad (23)$$

При этом из условия нормировки (16) следует:

$$\int F(q,p,\xi,\eta,t)\,dq\,dp = \delta(\xi)\,\delta(\eta). \qquad (24)$$

Неотрицательность оператора $\hat{F}(q,p,t)$ исследовалась [3,4] в конкретном представлении алгебры $\mathcal{A}_B(N)$ и связанного с ней пространства $\mathcal{L}$: $X_j = \tau_j$, $Y_j = -i\partial_{\tau_j}$, $\psi(\tau) \in \mathcal{L}$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in R^N$. При этом было показано, что любой неотрицательный оператор $\hat{F}(q,p,t)$ может быть задан набором функций $\mu_\alpha(q,p,\xi,t)$, $\xi \in R^N$. Переход между представлениями работ [3,4] и представлением (22а) дает:

$$F(q,p,\xi,\eta,t)=(2\pi)^{-N}e^{-\frac{i}{2}\xi\eta}\sum_{k}\int \mu_k(q,p,\xi',t)\,\mu_k^*(q,p,\xi+\xi',t)\,e^{-i\xi'\eta}\,d\xi' . \qquad (25)$$

Сравнивая (23) и (25), можно показать следующую взаимосвязь:

$$f_n(q,p,\xi,\eta,t)=(2\pi)^{-N}e^{-\frac{i}{2}\xi\eta}\int U_m(q,p,\xi',t)\,\mu_k^*(q,p,\xi-\xi',t)\,e^{i\eta\xi'}\,d\xi', \quad n=mk, \qquad (26)$$

где функции U_m и μ_k подчинены условиям нормировки:

$$\sum_m\int |U_m(q,p,\xi,t)|^2 d\xi = 1, \qquad \sum_k\int \mu_k(q,p,\xi,t)\,\mu_k^*(q,p,\xi',t)\,dq\,dp=\delta(\xi-\xi') \qquad (27)$$

Появление нормированного набора квадратично-интегрируемых функций U_m, не влияющих на результаты квантования, обусловлено неоднозначностью формы (I5): переход от набора $\hat{f}_n \in \mathcal{A}$ к новому набору $\hat{f}'_n = \hat{U}\hat{f}_n$, где $\hat{U}$ – любой унитарный оператор алгебры $\mathcal{A}$, не меняет оператор вероятности (I5).

Для проведения конкретного квантования с $\hat{F}(q,p,t)\in\mathcal{A}_B(N)$ следует подставить оператор вероятности (22а) в динамические (I7) и канонические (I8) уравнения. Это приведет к системе интегральных уравнений, которые необходимо удовлетворить выбором функций $\mu_k(q,p,\xi,t)$.

Наибольший интерес (с точки зрения общепринятой квантовой механики) представляет такое квантование с оператором вероятности, когда между парами классических переменных (q_j, p_j) и парами образующих бозе-алгебры (X_j, Y_j) существует взаимно-однозначное соответствие

$$q_j \rightleftarrows Y_j, \qquad p_j \rightleftarrows X_j, \qquad j=\overline{1,N}, \qquad (28)$$

в том смысле, что оператор $\hat{A}$ зависит от оператора X_j (от оператора Y_j) тогда и только тогда, если классическая функция $A(q,p,t)$ зависит от компоненты импульса p_j (координаты q_j). Замена $X \rightleftarrows Y$ в (28) несущественна, так как сводится к замене $\xi \rightleftarrows \eta$ в ядре (22а).

Подставляя оператор (22а) в правило (I4) и требуя, чтобы операторы функций, не зависящих от p_j (от q_j), не зависели от оператора X_j (от оператора Y_j), получим цепочку соотношений:

$$\int F dp_j \sim \delta(\xi_j), \qquad \int F dq_j \sim \delta(\eta_j), \qquad \int F dq_j dp_l \sim \delta(\xi_l)\delta(\eta_j), \ \ldots$$

и так далее до нормировки (24). Отсюда с необходимостью следует:

$$F(q,p,\xi,\eta,t) = \mathcal{V}(\xi,\eta,t)\exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\xi_j q_j}{\alpha_j}+\frac{\eta_j p_j}{\beta_j}\Big)\Big\}, \qquad (29)$$

где α_j и β_j – действительные постоянные соответствующей размерности. Подставляя ядро (29) в интеграл (22а) и далее в канонические уравнения (I8) при $A=q_j$, $B=p_l$ и используя нормировку (I6), получим: $\alpha_j\beta_j=\hbar$, $j=\overline{1,N}$; $\hat{q}_j=\alpha_j Y_j+q_j^0[\mathcal{V}]$, $\hat{p}_j=\beta_j X_j+p_j^0[\mathcal{V}]$ (подробнее см. [6]). Последние соотношения позволяют перейти к новым само-

сопряженным образующим бозе-алгебры $(\hat{q}_j, \hat{p}_j)$, имеющим физический смысл операторов координат и импульсов и удовлетворяющим системе тождественных соотношений:

$$[\hat{q}_j,\hat{p}_l]_- = i\hbar\delta_{jl}\hat{1}, \qquad [\hat{q}_j,\hat{q}_l]_- = [\hat{p}_j,\hat{p}_l]_- = 0, \qquad j,l=\overline{1,N}. \qquad (30\text{а})$$

Подставляя теперь (29) в (22а), после замены переменных имеем:

$$\hat{F}(q,p,t)=(2\pi\hbar)^{-2N}\int \mathcal{U}(\xi,\eta,t)\,e^{\frac{i}{\hbar}[\xi(\hat{p}-p)+\eta(\hat{q}-q)]}\,d\xi\,d\eta \in \mathcal{A}_B(N), \qquad (30\text{б})$$

где $R_{\xi\eta}$ изоморфно R_{qp}. Наконец запись неотрицательного оператора (30б) в форме (22а) с ядром типа (25) окончательно дает:

$$\mathcal{U}(\xi,\eta,t)=e^{\frac{i}{2\hbar}\xi\eta}\sum_k\int \varphi_k^*(\xi',t)\,\varphi_k(\xi+\xi',t)\,e^{\frac{i}{\hbar}\xi'\eta}\,d\xi', \qquad \sum_k\int|\varphi_k(\xi,t)|^2 d\xi = 1. \qquad (30\text{в})$$

Таким образом, квантование C-теории на основе оператора вероятности координат и импульсов в алгебре бозе-операторов при взаимно-однозначном соответствии (28) между классическими и квантовыми образующими приводит к исследовавшейся в [1] Q-теории. Однако теперь набор "субквантовых" функций $\{\varphi_k\}$ связан с функциями $\{A(q,p,t)\}_{exp}$ и $H(q,p,t)$ исходной C-теории системой интегральных уравнений, получаемых после подстановки оператора (30) в условия динамического (I7) и канонического (I8) соответствия.

7. Оператор вероятности собственного момента на алгебре ферми-операторов

Рассмотрим пример квантования C-теории точечной частицы массы m и заряда e в магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}=(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$ трехмерного пространства $\vec{z}=(z_1,z_2,z_3)$. Соответствующая Q-теория с $\psi \to F_\psi \geq 0$ определяется оператором вероятности $\hat{F}(q,p,t)\in\mathcal{A}_B(3)$.

Пусть рассматриваемая частица обладает еще и собственными механическим $\vec{S}=(S_1,S_2,S_3)$ и магнитным $\vec{M}=ge\vec{S}/2mc$ моментами, где g -гиромагнитное отношение, причем $|\vec{S}|=S=Const.$. Тогда к классическим образующим $(\vec{z},\vec{p})$ добавятся еще две, например S_1 и S_2 (так как $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$). Соответственно к образующим $(\hat{\vec{z}},\hat{\vec{p}})$ алгебры $\mathcal{A}_B(3)$ следует также добавить две образующие.

Попытаемся провести квантование с оператором вероятности, считая, что операторы моментов и их функций принадлежат алгебре $\mathcal{A}_F(1)$ ферми-операторов с взаимно-сопряженными b и b^+ (либо с самосопряженными $\sigma_1=i(b^+-b)$ и $\sigma_2=(b^++b)$) образующими. т.е.:

$$[b,b^+]_+=\hat{1}, \quad [b,b]_+=0, \quad \text{либо} \quad [\sigma_k,\sigma_l]_+=2\delta_{kl}\hat{1}, \quad k,l=\overline{1,2}. \qquad (31)$$

Для простоты изложения ограничимся стационарным квантованием,

$\partial_t \hat{F} = 0$, и будем рассматривать не полный оператор $\hat{F} \in \mathcal{A}_B(3)\times\mathcal{A}_F(1)$, а его интеграл

$$\hat{F}(s_1,s_2) = \int \hat{F}(\vec{z},\vec{p},s_1,s_2)\,d\vec{z}\,d\vec{p} \quad \in \mathcal{A}_F(1), \qquad (32)$$

определяющий $\hat{A}$ для функций $A(s_1,s_2)$, согласно правилу:

$$\hat{A} = O_{\hat{F}}(A(s_1,s_2)) = \int A(s_1,s_2)\,\hat{F}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 \quad \in \mathcal{A}_F(1), \qquad (33)$$

где интегрирование ведется в круге радиуса S (так как $s_1^2+s_2^2 \leq S^2$).

Для построения оператора вероятности собственного момента (32) запишем условия неотрицательности и нормировки

$$\hat{F}(s_1,s_2) = \sum_n \hat{f}_n^{+}(s_1,s_2)\,\hat{f}_n(s_1,s_2), \qquad \int \hat{F}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 = \hat{1}, \qquad (34)$$

а также условие динамического соответствия для момента $\vec{S}$ и члена в гамильтониане H , зависящего от собственного момента:

$$O_{\hat{F}}(\{S_\alpha, (\vec{M}\vec{\mathcal{H}})\}) = \frac{i}{\hbar}\left[O_{\hat{F}}(S_\alpha), O_{\hat{F}}((\vec{M}\vec{\mathcal{H}}))\right]_- .$$

Подставляя сюда явный вид момента $\vec{M}$, классической скобки Пуассона и отображение $O_{\hat{F}}(\cdot\cdot)$ в форме (33), получим систему уравнений:

$$\int [\vec{S}\times\vec{\mathcal{H}}]\,\hat{F}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 = \frac{i}{\hbar}\int \vec{S}\,(\vec{\mathcal{H}}\vec{S}')\left[\hat{F}(s_1,s_2), \hat{F}(s_1',s_2')\right]_- ds_1 ds_2 ds_1' ds_2' ; \qquad (35)$$

Перестановочные соотношения (3I) алгебры $\mathcal{A}_F(1)$ позволяют записать оператор вероятности в упорядоченной форме, например:

$$\hat{F} = F_0\,\hat{1} + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + iF_3\sigma_1\sigma_2 , \quad F_\mu = F_\mu^* = F_\mu(s_1,s_2). \qquad (36а)$$

При этом из условий неотрицательности и нормировки (34) имеем:

$$F_0 + F_3 \geq 0, \quad F_0^2 - F_3^2 \geq F_1^2 + F_2^2, \quad \int F_0\,ds_1 ds_2 = 1, \quad \int F_\alpha\,ds_1 ds_2 = 0, \qquad (36б)$$

$\alpha = \overline{1,3}$. Вводя обозначения

$$\varphi_{\alpha 0} = \int S_\alpha F_0\,ds_1 ds_2, \quad \varphi_{\alpha\beta} = \int S_\alpha F_\beta\,ds_1 ds_2, \quad \alpha,\beta = \overline{1,3} \qquad (36в)$$

и подставляя оператор (36а) в уравнения (35), с учетом произвольности напряженности магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$ получим систему уравнений:

$$\varphi_{\alpha 0} = 0, \quad -\hbar\varphi_{\gamma\mu} = 2(\varphi_{\alpha\lambda}\varphi_{\beta\rho} - \varphi_{\alpha\rho}\varphi_{\beta\lambda}), \qquad (36г)$$

где $(\alpha\beta\gamma),(\mu\lambda\rho)$ = (I23), (23I), (3I2).

Потребуем теперь, как и в предыдущем параграфе, взаимно-однозначного соответствия между классическими и квантовыми образующими, например, в виде:

$$s_1 \rightleftarrows \sigma_1, \qquad s_2 \rightleftarrows \sigma_2 . \qquad (37)$$

Замена $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$ в правых частях соответствий (37) несущественна, так как сводится к переобозначению $F_1 \rightleftarrows F_2$, $F_3 \rightleftarrows -F_3$ в (36).

Простейшие следствия соответствия (37), $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{21} = \varphi_{23} = 0$, позволяют разрешить систему уравнений (36г). Это дает:

$$\varphi_{\alpha 0} = \varphi_{31} = \varphi_{32} = 0, \qquad \varphi_{11} = \varphi_{22} = -\varphi_{33} = \frac{\hbar}{2} . \qquad (38)$$

Используя (38) при установлении оператора $\hat{\vec{S}}$ по правилу (33) с оператором вероятности, определяемым соотношениями (36), получим:

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \qquad \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \qquad \hat{S}_3 = -i\frac{\hbar}{2}\sigma_1\sigma_2 . \qquad (39)$$

Соотношения (39) позволяют перейти к новым самосопряженным образующим алгебры $\mathcal{A}_F(1)$, имеющим физический смысл операторов компонент момента ($\hat{S}_1$, $\hat{S}_2$ и связанным с ними $\hat{S}_3 = -2i\hat{S}_1\hat{S}_2/\hbar$) и удовлетворяющим системе тождественных соотношений:

$$[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta]_- = i\hbar\hat{S}_\gamma , \qquad \hat{S}_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4}\hat{1}, \qquad (40а)$$

где $(\alpha\beta\gamma)$ = (I23),(23I),(3I2).

Таким образом, квантование C -теории частицы с собственным моментом на основе оператора вероятности в алгебре $\mathcal{A}_F(1)$ ферми-операторов при взаимно-однозначном соответствии между классическими и квантовыми образующими приводит к Q-теории частицы со спином I/2.

Для соответствующей (40а) записи оператора вероятности удобно перейти к полярным координатам ($s_1 = \rho\cos\varphi$, $s_2 = \rho\sin\varphi$, $\rho \in [0,S]$, $\varphi \in [0,2\pi)$):

$$\hat{F} = \hat{1}\,F_0(\rho) + \hat{S}_1 F_1(\rho)\cos\varphi + \hat{S}_2 F_2(\rho)\sin\varphi + \hat{S}_3 F_3(\rho) . \qquad (40б)$$

Свойства функций $F_\mu(\rho)$ определяются из условий (34) и (35).

Литература

1. Курышкин В.В., Сидорков Н.В., Энтральго Э.Э. Некоторые следствия неотрицательных координатно-импульсных распределений в квантовой механике. ОИЯИ, Р4-85-496, Дубна, I985, I5 с.
2. Курышкин В.В. Известия вузов, I97I, Физика, № II, с. I02–I06.
3. Kuryshkin V.V. The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics, London, John Wiley and Sons, 1977, p. 61–83.
4. Запарованный Ю.И., Курышкин В.В., Лябис И.А. Известия вузов, I978, Физика № 3, с. 80–84.
5. Kuryshkin V.V., Lyabis I.A., Zaparovanny Yu.I. Ann. Fond. L. de Broglie, Paris, 1980, 5, n°2, p. 105–109.
6. Курышкин В.В., Сидорков Н.В. Проблемы статистической физики и теории поля, М., УДН, I982, с. I49–I56.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря I985 года.

Курышкин В.В., Сидорков Н.В., Энтральго Э.Э. Р2-85-943

Квантово-механический оператор вероятности координат и импульсов

Рассматривается процедура квантования с линейным отображением $\hat{A} = 0(A(q,p,t))$ функций классических координат, импульсов и времени на операторы алгебры $\mathfrak{A}$ линейных операторов в комплексном векторном пространстве $\mathfrak{L}$, основанная на использовании оператора вероятности координат и импульсов $\hat{F}(q,p,t) \in \mathfrak{A}$: $\hat{A} = \int A(q,p,t)\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp$, $\int \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = \hat{1}$,

$(\psi/\hat{F}(q,p,t)\psi) \geq 0$ для любых q, p, t и $\psi \in \mathfrak{L}$.

Показано, что процедура квантования с оператором вероятности может быть дополнена соответствием между классическими и квантовыми скобками Пуассона при определенных ограничениях на множество классических функций. Дан метод построения оператора вероятности на алгебрах бозе-операторов и его обобщение на случай алгебр ферми-операторов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Kuryshkin V.V., Sidorkov N.V., Entralgo E.E. P2-85-943

Quantum-Mechanical Coordinate-Momentum Probability Operator

The quantization procedure with a linear reflection $\hat{A} = 0(A(q,p,t))$ of classical coordinate-momentum-time functions at operators of an algebra $\mathfrak{A}$ in a complex vector space $\mathfrak{L}$ based on a coordinate-momentum probability operator $F(q,p,t) \in \mathfrak{A}$ is considered: $\hat{A} = \int A(q,p,t)\hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp$,

$\int \hat{F}(q,p,t)\,dq\,dp = \hat{1}$, $(\psi/\hat{F}(q,p,t)\psi) \geq 0$ for any q, p, t and $\psi \in \mathfrak{L}$.

It is shown that the quantization procedure with a probability operator can be supplemented by a correspondence between classical and quantum Poisson brackets under certain limitation on the classical function multitude. A method to construct the probability operator in Bose algebras and its generalization for Fermi algebras are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985