

Объединенный
институт
ядерных
исследований
Дубна

P2-85-906

С.В.Михайлов, А.В.Радюшкин

СТРУКТУРА ДВУХПЕТЛЕВЫХ ЯДЕР ЭВОЛЮЦИИ
И ЭВОЛЮЦИЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ПИОНА
В МОДЕЛИ $\varphi_{(6)}^3$ И КХД

Направлено в "Nuclear Physics"

1985

I. Введение

Недавние двухпетлевые вычисления ядра эволюции $V(x, y)$ для волновой функции пиона (проведенные как в светоподобной /1,2/, так и в фейнмановской /3/ калибровках) позволяют завершить анализ эксклюзивных процессов, включающих пионы, в следующем за лидирующим порядке в КХД /4-8/. Однопетлевые коэффициентные функции (с расчета которых обычно и начинается анализ последующих порядков) для ряда таких процессов, включая формфактор пиона /9,10/x) и процесс $\gamma^* \gamma^* \rightarrow l^0$ /11/, были вычислены ранее. Следующим этапом является построение решений уравнения эволюции (У.э) для волновой функции пиона (в.ф.п.) на основании вычисленного $V(x, y)$ /1-3/. Здесь мы проанализируем также попытку восстановить решение уравнения эволюции только из общих принципов (наподобие конформной симметрии) /13/, что может сделать ненужным полное вычисление двухпетлевого вклада $V_2(x, y)$ в $V(x, y)$. Однако результат такой реконструкции, как он дан в /13/, отличается от результатов прямых вычислений /1-3/. Следовательно, в КХД подобный подход не работает, хотя, как было отмечено в /13/, результат был проверен численным расчетом в модели $\mathcal{U}_{(6)}$ в 6 измерениях. В действительности все расчеты в $\mathcal{U}_{(6)}$ могут быть легко проведены аналитически /14/. Это дает возможность проведения диаграммного анализа происхождения различных вкладов в $V_2(x, y)$ в $\mathcal{U}_{(6)}$ и в КХД, особенно диаграмм, ответственных за вклады, необъяснимые из общих принципов /13/.

Нашей целью здесь является построение формализма для нахождения решений У.э. на двухпетлевом уровне, базирующемся на диаграммном анализе структуры соответствующих ядер эволюции. Для развития техники подобного анализа мы подробно рассматриваем сначала (в разделе 2) $\mathcal{U}_{(6)}$ модель. В разделе 3 мы анализируем структуру двухпетлевого ядра эволюции в КХД и строим решение У.э. для в.ф.п.

х) Результаты работ /9,10/ не согласуются между собой полностью. Недавно, независимым расчетом было продемонстрировано /12/, что достоверен результат работы /9/. В работе /12/ подробно обсуждается также зависимость результата от схемы факторизации.



2. Двухпетлевое ядро эволюции в скалярной \mathcal{G}_3^3 модели

2.1. Предварительное обсуждение

Для того, чтобы развить диаграммный анализ структуры двухпетлевого ядра эволюции (я.э.), рассмотрим игрушечную модель, основанную на скалярной $g \sum_i \psi_i^* \psi_i \phi$ теории в пространстве-времени 6 измерений. В ней N_f типов "кварков" ψ_i взаимодействуют через обмен вещественным скалярным "глюоном" ϕ . Эта теория имеет ряд общих черт с физически более интересной теорией - КХД в 4 измерениях, т.е. она ренормируема; ее β -функция

$$\beta(g^2) = -\beta_0 \frac{g^4}{(4\pi)^3} + O(g^6), \quad \beta_0 = \frac{2}{3} - \frac{N_f}{6}$$

имеет структуру, близкую к $\beta_{\text{КХД}}$, и, что наиболее важно, собственными функциями соответствующего однопетлевого ядра $V_0(x, y)$ являются те же полиномы Гегенбауэра $x(1-x)C^{2-2x}(2x-1)$, что и в КХД /4-7/. Конечно, \mathcal{G}^3 не является калибровочной теорией, однако благодаря простоте соответствующих фейнмановских интегралов в этой модели проще всего изучать происхождение каждого конкретного вклада.

"Глюоном" в рассматриваемой модели назовем связанное состояние двух кварков ψ_1, ψ_2^* разных типов, по аналогии с тем, что в КХД π^+ -мезон есть состояние $\bar{d}u$ ($\bar{u}d$). Для таких состояний запрещен переход в чисто глюонные состояния $(\phi, \phi\phi, \dots)$, и я.э. для пиона имеет простую "несинглетную" структуру. Заметим, что в данном случае N_f формально должно быть не меньше 2. Но поскольку в наших конкретных расчетах N_f фигурирует лишь как множитель, ассоциируемый с кварковыми петлями, ничто не мешает нам трактовать N_f как "свободный параметр", принимающий произвольные значения. Поэтому мы будем считать, что либо $\beta_0 > 0$, либо (там, где это особо оговорено) $\beta_0 = 0$.

2.2. Волновая функция и ее эволюция

В ф.п. $\Phi(x, \mu^2)$ можно определить стандартным путем через ее моменты (ср. /3/)

$$a_N(\mu^2) \equiv \int_0^1 \Phi(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^N}{2(\rho\hbar)^N} \langle 0 | \psi_2^*(\vec{n}\vec{0})^N \psi_1 | \rho \rangle, \quad (2.2.1)$$

где \vec{n}_ν - светоподобный вектор ($n^2=0$), обеспечивающий выделение симметричной бесследовой части локального оператора $\psi_2^* \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_N} \psi_1$, $|\rho\rangle$ - однопартонное состояние с импульсом ρ и μ^2 -параметр ренормировки для составных операторов. Переменная x имеет смысл до-

ли продольного импульса пиона, приходящейся в системе бесконечного импульса на кварк ψ_1 .

Зависимость моментов $a_N(\mu^2)$ от μ^2 описывается уравнением ренормгруппы /4,15/

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} a_N(\mu^2) = \sum_{k=0}^N Z_{Nk} a_k(\mu^2), \quad (2.2.2)$$

где Z_{Nk} - матрица аномальных размерностей.

Уравнение (2.2.2) означает, что матричные элементы операторов, соответствующие обкладкам с разными импульсами $\langle 0 | O_N | \rho \rangle$, при перенормировке смешиваются с матричными элементами операторов, являющихся полными производными $\partial^{N-k} O_k$ операторов $O_k = \psi_2^*(\vec{n}\vec{0})^k \psi_1$ /4-7,15/. Так как число $N-k$ полных производных ≥ 0 , то матрица Z_{Nk} треугольна: $Z_{Nk} = 0$ при $k > N$.

Объединяя уравнения (2.2.1) и (2.2.2), легко получить уравнение эволюции для $\Phi(x, \mu^2)$:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \Phi(x, \mu^2) = \int_0^1 V(x, y; g) \Phi(y, \mu^2) dy, \quad (2.2.3)$$

я.э. $V(x, y; g)$ связано с матрицей Z_{Nk} соотношением

$$\int_0^1 V(x, y; g) x^N dx = \sum_{k=0}^N Z_{Nk}(g) y^k. \quad (2.2.4)$$

Расчет ядер эволюции $V(x, y; g)$ в принципе совершенно аналогичен расчету аномальных размерностей (см. /16,14/). Главная модификация состоит в замене фактора $(k\hbar)^N \rightarrow \delta(x - \frac{k\hbar}{\rho\hbar})$ в вершине, соответствующей составному оператору, и k - импульс интегрирования. Проиллюстрируем на простых примерах и последовательность шагов и получающуюся структуру результата.

2.3. Однопетлевая треугольная диаграмма

Рассмотрим диаграмму на рис. 1. Соответствующий ей размерно-регуляризованный интеграл равен

$$I_\varepsilon(x, y) = i \int \frac{g^2(\mu^2)^\varepsilon}{(2\pi)^6} \frac{d^{6-2\varepsilon} k}{k^2} \frac{\delta(x - \frac{k\hbar}{\rho\hbar}) \delta'(x - \frac{k\hbar}{\rho\hbar})}{k^2 (\kappa - y\rho)^2 (\kappa - \rho)^2}. \quad (2.3.1)$$

Импульсный интеграл может быть вычислен стандартным способом, например, с использованием фейнмановских параметров β_i . В результате мы получим:

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} I_\varepsilon(x, y) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = d_3 \int_0^1 \{d\beta_2 d\beta_3\} \delta(x - (y\beta_2 + \beta_3)), \quad (2.3.2)$$

где $d_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^3}$

$$\{d\beta_2 d\beta_3\} = d\beta_2 d\beta_3 \theta(\beta_2 + \beta_3 \leq 1). \quad (2.3.3)$$

Из интегрального представления (2.3.2) немедленно получаем соответствующий вклад в $V(x, y; g)$:

$$V_1(x, y) = \lambda_2 V_0(x, y) = \lambda_2 \left\{ \frac{x}{y} \theta(x < y) + \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \theta(\bar{x} < \bar{y}) \right\} \quad (2.3.4)$$

где $\bar{x} = 1 - x$, $\bar{y} = 1 - y$.

2.4. Решение однопетлевого уравнения эволюции

Так как однопетлевое ядро V_1 факторизуется $V_1(x, y; g) = \lambda_2 (\mu^2) (V_0(x, y) - \frac{1}{\epsilon} \delta(y-x))$ ($\delta(y-x)$ - член возникает из диаграммы δ приложение А), то у.э. в этом случае решается разделением переменных /4-7/

$$P(x, \mu^2) = \sum_{n=0} a_n \left(\ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right)^{-\gamma_n / \beta_0} x \bar{x} c_n^{\frac{3}{2}}(x-\bar{x}), \quad (2.4.1)$$

где $\gamma_n^{(4)}$ - коэффициент перед λ_2 в однопетлевой аномальной размерности O_n - операторов (см., опр. (2.2.1)): $\gamma_n(g) = -\lambda_2 \gamma_n^{(4)} + O(\lambda_2^2)$. а $x \bar{x} c_n^{\frac{3}{2}}(x-\bar{x}) = \psi_n$ - собственные функции однопетлевого ядра, т.е.

$$\int_0^1 V_0(x, y) \psi_n(y) dy = \lambda_n \psi_n(x). \quad (2.4.2)$$

Из явного вида ядра $V_0(x, y)$ следует, что комбинация $\tilde{V}(x, y) = \frac{y \bar{y} V_0(x, y)}{\tilde{V}(x, y) = \tilde{V}(y, x)}$ симметрична относительно замены $x \leftrightarrow y$: Из свойства симметрии ядра и общего условия треугольности Z_{NK} (см. формулу (2.2.4)) следует, что свертка

$V_0(x, y)$ с полиномом $P_N(y)$ степени N также есть полином \tilde{P}_M степени $M \leq N$. Следствием указанных свойств является то, что функции $\psi_n(x)/x\bar{x}$ из (2.4.2) должны быть полиномами, взаимно ортогональными на отрезке $[0, 1]$ с весом $x\bar{x}$, т.е. они пропорциональны полиномам Гегенбауэра $c_n^{\frac{3}{2}}(x-\bar{x})$ /4.17/. А это значит, что и мультипликативно перенормируемые операторы в однопетлевом приближении имеют вид /4/:

$$O_n = \psi_n^*(\vec{n}\vec{\alpha}_+)^n c_n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n\vec{\alpha}}{n\vec{\alpha}_+} \right) \psi_n, \quad (2.4.3)$$

где $\vec{\alpha} = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}_+ = \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$.

Иными словами, матрица аномальных размерностей $Z_{NK}^{(T)}$.

$$Z_{NK}^{(T)} = \int_0^1 \int_0^1 V_1(x, y; g) c_n^{\frac{3}{2}}(x-\bar{x}) y \bar{y} c_k^{\frac{3}{2}}(y-\bar{y}) dx dy, \quad (2.4.4)$$

вычисленная в Гегенбауэровском базисе, диагональна. Известно, что эти же операторы (2.4.3) являются конформными в приближении свободных полей /18/. Представляется естественным, что объекты, обладающие простыми свойствами по отношению к масштабным (конформным) преобразованиям в теории свободных полей, имеют также простые трансформационные свойства и при ренормгрупповых преобразованиях. Изучению соотношения между конформными и ренормгрупповыми свойствами составных операторов в различных теориях, включая КХД, посвящено много работ (см., например /21, 19/). Было установлено, что все конформные операторы, составленные из двух кварковых или двух глюонных полей, мультипликативно ренормируемы на однопетлевом уровне /21/. Нашей задачей является изучение нарушения мультипликативной ренормируемости операторов O_n за счет двухпетлевых диаграмм в $\mathcal{G}_{(6)}$ теории.

2.5. Эффекты ренормировки: общее обсуждение

Двухпетлевые фейнмановские диаграммы, определяющие $V_2(x, y; g)$, содержат расходящиеся подграфы, что требует аккуратного проведения процедуры ренормировок.

Эффекты ренормировок нарушают конформную симметрию. В частности, поля получают аномальные размерности $\gamma_\psi(g)$, $\gamma_\phi(g)$, зависящие от константы связи g . Константа связи сама становится функцией $\bar{g}(\mu)$ масштаба ренормировки μ . Ситуация, когда g не меняется $\bar{g}(\mu) = g_0$ ($\beta(g_0) = 0$), в то время, как $\gamma_\psi(g)$, $\gamma_\phi(g)$ не равны 0 ("нарушенная") масштабная/ конформная инвариантность, см., например /18, 19/, интенсивно изучалась в конце 60-х и начале 70-х годов /20/. Было установлено, в частности, что конформные тензоры (2.4.3) в этом случае имеют модифицированную форму /19/

$$\tilde{O}_n = \psi^*(n\vec{\alpha}_+)^n c_n^{\frac{3}{2} + \gamma_\psi(g_0)} \left(\frac{n\vec{\alpha}}{n\vec{\alpha}_+} \right) \psi. \quad (2.5.1)$$

Если параллелизм между конформными и ренормализационными свойствами составных операторов, установленный на однопетлевом уровне, остается и на двухпетлевом, то должны существовать вклады, связанные с перенормировкой пропагаторов и вертексов, нарушающие мультипликативную ренормируемость канонических операторов O_n (2.4.3) и/или диагональность матрицы аномальных размерностей $Z_{NK}^{(T)}$, взятой в гегенбауэровском базисе (2.4.4). В дальнейшем то ядро $V(x, y)$, для

которого $\sum_{nk}^{(T)}$ (не) диагональна, будем, для краткости, так же называть "(не) диагональным".

Простейшим путем недиагональные члены можно выделить, проверив отсутствие $X \leftrightarrow Y$ симметрии для соответствующих вкладов в $y \bar{y} V_2(x, y; g)$. Но фактически, для более точного определения недиагональных членов, можно использовать равенство (2.5.1). Действительно, формула (2.5.1) означает, что новые "собственные функции" должны быть ортогональны с весом $(x \bar{x})^{1+\delta\psi}$ или, другими словами, что $X \leftrightarrow Y$ - симметричная комбинация получится умножением $(y \bar{y})^{1+\delta\psi}$ на $V(x, y; g)$. В этом случае

$$V(x, y; g) = V_{\psi}(x, y) \equiv \theta(x < y) \left(\frac{x}{y}\right)^{1+\delta\psi} + (x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}). \quad (2.5.2)$$

Из равенства (2.5.2) следует, что двухпетлевые недиагональные члены должны быть пропорциональны $O(\delta\psi)$ члену в разложении V_{ψ} , т.е. ядру $V_0(x, y)$, где

$$V_0(x, y) = \frac{d}{d\delta} V_{\delta}(x, y) \Big|_{\delta=0} = \theta(x < y) \frac{x}{y} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + (x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}). \quad (2.5.3)$$

Проверим теперь, как наши предположения подтверждаются конкретными расчетами.

2.6 Двухпетлевая перекрестно-лестничная диаграмма

Начнем рассмотрение с диаграммы на рис. 2а, у которой нет расходящихся подграфов - она расходится только как целое. Можно ожидать, что ее вклад не содержит недиагональных членов.

Очень удобный способ вычисления этой диаграммы состоит в том, чтобы представить ее в форме, наиболее близкой к треугольной диаграмме на рис. 1, трактуя вклад перекрестно-лестничного подграфа на рис. 2 б

$$D(k, p-k, yP, \bar{y}P) = \frac{g^4}{(2\pi)^{42}} \int \frac{d^4 \ell}{\ell^2 (\ell - yP)^2 (\ell - k + P)^2 (k - \ell)^2} \quad (2.6.1)$$

как эффективный пропагатор. Используя фейнмановскую параметризацию, нетрудно получить, что

$$D(k, p-k, yP, \bar{y}P) = -i \frac{d_2^2}{\pi^3} \int_0^1 d\zeta \int_0^1 d\eta \left[(k - \omega P)^2 \right]^{-1} \quad (2.6.2)$$

где $\omega = \zeta y + \eta \bar{y}$. Это означает, что вклад диаграммы 2 а дается выражением

$$V^{(2a)}(x, y; g) = d_2 \int_0^1 d\zeta \int_0^1 d\eta V_1(x, \omega; g). \quad (2.6.3)$$

Далее, используя тождество

$$\int_0^1 d\zeta \int_0^1 d\eta \delta(\omega - \zeta y - \eta \bar{y}) = V_0(\omega, y) + V_0(\omega, \bar{y}), \quad (2.6.4)$$

следующее из уравнений (2.3.2)-(2.3.4), можно представить $V^{(2a)}(x, y; g)$ как сумму свертков однопетлевых ядер V_1 :

$$V^{(2a)}(x, y; g) = \int d\omega V_1(x, \omega) [V_1(\omega, y) + V_1(\omega, \bar{y})] \equiv V_1 \otimes V_1 + V_1 \otimes \bar{V}_1, \quad (2.6.5)$$

где, по определению, $\bar{V}_1(\omega, y) = V_1(\omega, \bar{y})$. Легко показать, что если ядро $A(x, y)$ диагонально, то свертка $B = A \otimes A$ также диагональна. Кроме того, если $A(x, y) = A(\bar{x}, \bar{y})$ (как это имеет место в случае $V_1(x, y)$), то свертка $A \otimes \bar{A}$ также диагональна. Все это значит, что $V^{(2a)}$ диагональна, и, как и ожидалось, не нарушает мультипликативную ренормируемость операторов O_H (2.4.3).

2.7. Диаграммы с пропагаторными и вершинными ренормировками

Нашим следующим шагом является анализ диаграмм, содержащих расходимости, эффекты которых обсуждались в разделе 2.5. Простейшая из них - диаграмма на рис. 3 с собственно-энергетической вставкой в глюонную линию. Она также имеет структуру треугольной диаграммы с модифицированным глюонным пропагатором:

$$\frac{1}{(k-yP)^2} \rightarrow d_2 \frac{K(\delta)}{\delta} \frac{(M^2)^\delta}{[(k-yP)^2]^{1+\delta}}, \quad (2.7.1)$$

где $K(\delta) = -(1 + \frac{2}{3}\delta)/6$ и δ - параметр размерной регуляризации для кварковой петли.

В технике d - представления такая модификация легко учитывается, поскольку

$$\frac{1}{(k^2)^{1+\delta}} = \frac{i^{-1-\delta}}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^\infty d\omega \exp(i\omega k^2) \omega^\delta, \quad (2.7.2)$$

и вычисление регуляризованного интеграла $I_{\epsilon\delta}$ проводится стандартно. В результате

$$I_{\epsilon\delta} = \left(\frac{M^2}{p^2 x \bar{x}} \right)^{\epsilon+\delta} \frac{K(\delta)}{\delta(\epsilon+\delta)} \frac{\Gamma(1-\epsilon) \Gamma(1+\epsilon+\delta)}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^1 d\beta_2 d\beta_3 \beta_2^\delta \delta(x - \beta_2 y - \beta_3), \quad (2.7.3)$$

где ϵ - параметр размерной регуляризации для внешней петли. Всюду мы используем \overline{MS} схему регуляризации

$$d^6 k \rightarrow (\pi M^2)^\epsilon \Gamma(1-\epsilon) d^{6-2\epsilon} k.$$

Поучительна представленная здесь форма интеграла по β -параметрам (2.7.3):

$$\Gamma_g(x, y) \equiv \int_0^1 [d\beta_2 d\beta_3] \beta_2^g \delta(x - \beta_2 y - \beta_3) = \frac{1}{1+g} \left[\left(\frac{x}{y}\right)^{1+g} \theta(x < y) + x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y} \right]. \quad (2.7.4)$$

Так, $\Gamma_g(x, y)$ пропорциональна $\dot{V}_g(x, y)$, определенной в (2.5.2), и, после проведения необходимых вычитаний, Γ_g генерирует вклад, пропорциональный $\dot{V}_0(x, y)$ (2.5.3). Так как комбинация $y \leftrightarrow \bar{y}$ $\dot{V}_0(x, y)$ несимметрична к замене $x \leftrightarrow y$, то ядро \dot{V}_0 недиагонально: $\dot{V}_0 = \dot{V}_D + \dot{V}_{ND}$. Существование недиагональной части \dot{V}_{ND} у \dot{V}_0 требует поиска улучшенного базиса.

Логарифмические факторы $\ln(\frac{x}{y})$, $\ln(\frac{\bar{x}}{\bar{y}})$, очевидно, находятся в однозначном соответствии с фактором $\ln(\frac{(k-y\rho)^2}{k^2})$ в ренормированном глюонном пропагаторе (2.7.1). Такие факторы формируют бегущую константу связи:

$$g^2(\mu^2) \rightarrow g^2(q^2) = g^2(\mu^2) \left\{ 1 - d_s \beta_0 \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) \right\}, \quad (2.7.5)$$

где $q^2 = (k-y\rho)^2$. Конечно, диаграмма на рис. 3 дает лишь N_S -часть от полного вклада. Другие члены в β_0 даются диаграммами на рис. 4, 5 с ренормировкой вершины и кваркового пропагатора. Эти диаграммы также содержат недиагональные вклады, пропорциональные \dot{V}_0 . Они содержат и диагональные члены, пропорциональные \dot{V}_0 , $\dot{V}_0 \otimes \dot{V}_0$, и новый диагональный элемент \mathcal{U} .

$$\mathcal{U}(x, y) = \mathcal{E} \theta(x < y) \left\{ \frac{x}{y} \ln y + \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \ln \bar{x} - \frac{1}{y} \left(1 - \frac{x}{y}\right) \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right) \right\}, \quad (2.7.6)$$

специфический для $y \leftrightarrow \bar{y}$ асимметричных диаграмм. В равенстве (2.7.6) мы использовали обозначение

$$\mathcal{E} = \mathbb{1} + (x \leftrightarrow \bar{x}, y \leftrightarrow \bar{y}).$$

Полный вклад диаграмм на рис. 3-5 имеет следующую структуру:

$$\dot{V}^{(3-5)}(x, y; g) = d_s^2 \left[\dot{V}_D(x, y) + (\beta_0 + \beta_4) \dot{V}_0(x, y) \right], \quad (2.7.7)$$

где $\dot{V}_D(x, y)$ аккумулирует все диагональные члены. Следовательно, при $\beta_0 = 0$ \dot{V}_0 -вклад дает в точности тот коэффициент, который диктуется уравнениями (2.5.2), (2.5.3), т.е. "конформной ковариантностью".

2.8. Решение уравнения эволюции для ядра $d_s \dot{V}_0 + d_s^2 [\dot{V}_D + \beta_4 \dot{V}_0]$ в случае $\beta_0 = 0$

Для последующих приложений мы опишем здесь метод нахождения мультипликативно ренормируемых комбинаций (2.5.1) без использования какой-либо априорной информации (типа конформной инвариантности).

Заметим, во-первых, что если двухпетлевое ядро $V_2(x, y)$ диагонально (см. (2.4.4)), то решение уравнения (2.2.3) равно

$$\Phi_n^{(2)}(x, \mu^2) = a_n(\mu_0^2) \exp\left(\int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \gamma_n^{(2)}(\bar{t}) \frac{d\bar{t}}{\bar{t}}\right) x \bar{x} c_n^{3/2}(x - \bar{x}), \quad (2.8.1)$$

где $\gamma_n^{(2)}(g) = -d_s \gamma_n^{(1)} - d_s^2 \gamma_n^{(2)}$ есть n -элемент на диагонали $Z_{nn}(g)$ матрицы аномальных размерностей Z_{nk} (2.2.2). В случае, когда $V_2(x, y)$ содержит недиагональные члены, решение у.э. (2.2.3) должно отличаться от $\Phi_n^{(2)}$ на вклады порядка d_s . Будем искать решение для этого общего случая в форме

$$\Phi_n = (1 + d_s W) \otimes \Phi_n^{(2)}, \quad (2.8.2)$$

где $W = W(x, y)$ и \otimes означает интегральную свертку*. Задача теперь состоит в том, чтобы найти $W(x, y)$. Подставляя выражение (2.8.2) в у.э. (2.2.3) и воспользовавшись видом полного ядра (2.7.7), мы найдем, что W в случае $\beta_0 = 0$ должно удовлетворять уравнению

$$[\dot{V}_0, W]_- + \beta_4 \dot{V}_0 = 0. \quad (2.8.3)$$

Следующий шаг основан на том, что \dot{V}_0 является производной по индексу ν от ядра \dot{V}_ν (2.5.2). Собственные функции $\psi_\nu(x)$ ядра $\dot{V}_\nu(x, y)$ равны

$$\psi_\nu^j(x) = (\bar{x} x)^{1+\nu} c_n^{3/2+\nu}(x - \bar{x}) \equiv \psi_\nu(x) + \nu \frac{d}{d\nu} \psi_\nu^j \Big|_{\nu=0} + O(\nu^2) \quad (2.8.4)$$

(см. обсуждение после формулы (2.5.1)), или, вводя генератор ω сдвига индекса ν , получим

* Подобное представление всегда справедливо для W . Действительно, любая последовательность функций Φ_n , разложенных в ряд по полной системе ортогональных полиномов $|\varphi_k\rangle$: $|\varphi_k\rangle \langle \varphi_k | \Phi_n \rangle$, представима в виде свертки типа (2.8.2): $\Phi_n = W \otimes \varphi_n$, где W определен формально, как $W = |\varphi_\ell\rangle \langle \varphi_\ell | \Phi_n \rangle \langle \varphi_k |$.

$$\psi_n^v(x) = (1 + v\omega) \otimes \psi_n + O(v^2).$$

Записывая для ядра $\mathcal{V}_v(x, y)$ уравнение на собственные значения с точностью до членов $O(v)$, приходим к уравнению на ω

$$[\mathcal{V}_0, \omega]_- + \dot{\mathcal{V}}_{n2} = 0, \quad (2.8.5)$$

из которого немедленно следует, что \mathcal{W} в (2.8.2) пропорционально генератору сдвига индекса ω : $\mathcal{W} = \gamma_\psi \omega$. В результате для Φ_n можно записать

$$\Phi_n = (1 + d_2 \mathcal{W}) \otimes \psi_n = \psi_n^{d_2 \gamma_\psi} + O(d_2^2) \quad (2.8.6)$$

эквивалентно использованию конформного базиса (2.5.1) для составных операторов.

2.9 Двухпетлевая лестничная диаграмма

Нарушение конформной инвариантности не полностью описано нами даже при $\beta_0 = 0$. Существует еще диаграмма (см. рис. 6), которая содержит расходящийся подграф, включающий составной оператор. Его ренормировка не сводится к параметрам лагранжиана и/или полей. Величина, получаемая при этой ренормировке, есть аномальная размерность составного оператора.

Диаграмма на рис. 6 выглядит похожей на диаграмму 2а, она, однако, содержит расходящийся подграф. Поэтому для ее вычисления необходимо комбинировать приемы, описанные в разделах 2.6 и 2.7. Так, сначала вычисляется интеграл, соответствующий нижнему "квадрату" (см. рис. 6б)

$$\mathcal{D}(k, p-k, \gamma p, \bar{\gamma} p) = -i \frac{d_2^2}{\pi^2} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 \{d\gamma_2 d\gamma_3\} \int_0^1 \frac{d\lambda \lambda^{1+\epsilon}}{[\lambda(k-zp)^2 + m^2]^{1+\epsilon}} \quad (2.9.1)$$

где $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$, $z = \gamma_2 + \gamma \gamma_3$ (ср. ур. (2.6.2)). Чтобы избежать инфракрасных расходимостей, пропагаторы линий Г-3 взяты массивными с одинаковой массой m . Наконец, для $\Gamma_{\epsilon\delta}$ мы получим

$$\Gamma_{\epsilon\delta} = \frac{B(2-\epsilon, \delta)}{(\epsilon+\delta)(1-\delta)} \int_0^1 \{d\gamma_2 d\gamma_3\} \int_0^1 \delta(z - (\gamma_2 + \gamma \gamma_3)) \left[\left(\frac{x}{z}\right) \theta(x < z) + \left(\frac{\bar{x}}{z}\right) \theta(z < x) \right].$$

После проведения необходимых вычитаний и используя выражение (2.3.2) для \mathcal{V}_0 , найдем, что вклад диаграммы 6а представим в виде свертки:

$$\mathcal{V}^{(6a)}(x, y) = -d_2^2 \int_0^1 \dot{\mathcal{V}}_0(x, z) \mathcal{V}_0(z, y) dz = -d_2^2 \dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \mathcal{V}_0. \quad (2.9.2)$$

Однако $\dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \mathcal{V}_0$ содержит недиагональную часть за счет $\dot{\mathcal{V}}_0$ -фактора. Это обусловлено, очевидно, расходимостью верхнего подграфа диаграммы 6а, т.е. перенормировкой составного оператора.

2.10. Решение уравнения эволюции для полного ядра

Учитывая вклады всех диаграмм (см. Приложение А), получим окончательное выражение для полного двухпетлевого ядра

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(x, y) &= -\dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \mathcal{V}_0 + (\beta_0 + \gamma_\psi) \dot{\mathcal{V}}_0 + \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_2 &= \frac{3}{2} \dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \mathcal{V}_0 + \dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \bar{\mathcal{V}}_0 + \frac{17-5N_f}{18} \gamma_\psi \dot{\mathcal{V}}_0 + \frac{1}{3} \mathcal{U} + \delta(y-x) \frac{21N_f+25}{216}, \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

где \mathcal{V}_0 , $\dot{\mathcal{V}}_0$ и \mathcal{U} определены соотношениями (2.3.4), (2.5.3) и (2.7.7).

Рассмотрим сначала более простой случай $\beta_0 = 0$. Включение члена $\dot{\mathcal{V}}_0 \otimes \mathcal{V}_0$ от лестничной диаграммы модифицирует $\beta_0 = 0$ уравнение (2.8.3) для оператора \mathcal{W} . Оно приобретает форму

$$[\mathcal{V}_0, \mathcal{W}]_- + \dot{\mathcal{V}}_{n2} \otimes (\gamma_\psi - \mathcal{V}_0) = 0. \quad (2.10.2)$$

Из сравнения с уравнением (2.8.5) получим

$$\mathcal{W} = -\omega \otimes (\mathcal{V}_0 - \gamma_\psi). \quad (2.10.3)$$

И в результате для Φ_n :

$$\begin{aligned} \Phi_n &= (1 + d_2 \mathcal{W}) \otimes \psi_n = (1 - d_2 (\lambda_n - \gamma_\psi) \omega) \otimes \psi_n = \\ &= (x\bar{x})^{1+d_2 \gamma_n^{(4)}} d_n^{\frac{3}{2}+d_2 \gamma_n^{(4)}} (x-\bar{x}) (1 + O(d_2^2)), \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

где $\gamma_n^{(4)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{6}$ - однопетлевая аномальная размерность

составного оператора \mathcal{O}_n . Теперь, для того, чтобы найти точное выражение для мультипликативно-ренормируемых операторов, необходимо установить коэффициенты a_{nk} в разложении

$$\frac{d}{dv} \psi_n^v \Big|_{v=0} = \sum_{k \geq n} a_{nk} \psi_k. \quad (2.10.5)$$

Эти коэффициенты для $k > n$ равны

$$a_{nk} = -2 \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} \left(\frac{1}{k-n} - \frac{1}{k+n+3} \right) \quad (2.10.6)$$

и легко воспроизводятся из общей формулы для полиномов Гегенбауэра^{*}

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu-\lambda)} \sum_{\tau=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\Gamma(\tau+\nu-2)\Gamma(n+\nu-\tau)}{\tau! \Gamma(n-\tau+\lambda+1)} (n-2\tau+\lambda) C_{n-2\tau}^\lambda(x) \quad (2.10.7)$$

Эта формула может быть получена комбинированием формул разложения для $C_n^\nu(x)$ по x^k и для x^k по $C_\ell^\lambda(x)$ (см. уравнение (A.6), (A.7) в работе /22/).

Наконец, используя (2.10.4), (2.10.5), мы получим мультипликативно-ренормируемые операторы для случая $\beta_0 = 0$:

$$O_n = O_n + \lambda_2 \sum_{n \geq k} a_{nk} \gamma_k^{(0)} O_k. \quad (2.10.8)$$

В случае $\beta_0 \neq 0$ уравнение для поворачивающего оператора W усложняется, по сравнению с (2.10.2)

$$\beta_0 W + [V_0, W]_- + V_{2(n2)} = 0, \quad (2.10.9)$$

где $V_{2(n2)} = \dot{V}_{n2} \otimes (\gamma_\psi - V_0)$.

Формально решение (2.10.9) можно записать как

$$W = \int_0^\infty e^{-(\beta_0 + \dot{V}_0)t} \otimes V_{2(n2)} \otimes e^{\dot{V}_0 t} dt, \quad (2.10.10)$$

однако для приложений представление (2.10.10) не очень удобно. Более эффективным является использование матричного представления для W в гегенбауэровском базисе (2.4.4). В соответствии с (2.10.9), $W \otimes \psi_n$ может быть записана как

$$W \otimes \psi_n = (\beta_0 + \gamma_\psi - \lambda_n) (\lambda_n - V_0 - \beta_0)^{-1} \otimes \dot{V}_{n2} \otimes \psi_n, \quad (2.10.11)$$

где $\lambda_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ - собственные значения ядра \dot{V}_0 (см. (2.4.2)). Чтобы получить выражение для $\dot{V}_{n2} \otimes \psi_n$, продифференцируем уравнение

^{*}Мы благодарны Р.В. Ткачеву, получившему эту формулу и сообщившему ее нам.

на собственные значения для ядра \dot{V}_ν

$$\dot{V}_\nu \otimes \psi_n^\nu = \lambda_n^\nu \psi_n^\nu$$

по ν при $\nu=0$. Это дает

$$\dot{V}_0 \otimes \psi_n = \lambda_n \psi_n + (\lambda_n - V_0) \otimes \dot{\psi}_n, \quad (2.10.12)$$

где

$$\lambda_n = \left. \frac{d}{d\nu} \lambda_n^\nu \right|_{\nu=0}, \quad \dot{\psi}_n = \left. \frac{d}{d\nu} \psi_n^\nu \right|_{\nu=0}.$$

Первое слагаемое в правой части (2.10.12) соответствует диагональной части \dot{V}_0 , в то время как $\dot{V}_{n2} \otimes \psi_n$ дается вторым слагаемым. Подставив (2.10.12) в (2.10.11) и используя (2.10.5), получим окончательное выражение для $W \otimes \psi_n$:

$$W \otimes \psi_n = (\beta_0 - \gamma_n^{(0)}) \left(\bar{P}_n \dot{\psi}_n + \beta_0 \sum_{k>n} \frac{a_{nk}}{(\gamma_k^{(0)} - \gamma_n^{(0)} - \beta_0)} \psi_k \right), \quad (2.10.13)$$

где \bar{P}_n - проектор; $\bar{P}_n \psi_k = (1 - \delta_{nk}) \psi_k$, выделяющий диагональный член. В выражении (2.10.13) эффект сдвига индекса у полиномов Гегенбауэра отделяется от эффектов, связанных с эволюцией константы связи и выраженных рядом, пропорциональным β_0 .

3. Двухпетлевое ядро эволюции в КХД

3.1. Структура ядра эволюции

В КХД в.ф.п. $\Phi(x, \mu^2)$ определяется из формулы

$$\int_x^1 \Phi(x, \mu^2) x^N dx = \frac{i^\nu}{2(\rho n)^{n+1}} \langle 0 | \bar{d} \gamma_n^\wedge(n2) \psi | P \rangle, \quad (3.1.1)$$

аналогичной формуле (2.2.1) с $D_\mu = \partial_\mu - ig \hat{A}_\mu$ - ковариантная производная. Ядро эволюции в КХД также имеет более сложную структуру, чем в $\mathcal{Y}_{(6)}$ -случае, и представляется суммой членов, связанных с групповыми факторами $C_F = 4/3$, $C_A = N_c = 3$ и N_f ^{*}:

$$V(x, y) = \frac{\lambda_3}{4\pi} V_0(x, y)_+ + \left(\frac{\lambda_3}{4\pi} \right)^2 \left[2N_f C_F V_N(x, y) + 2C_F C_A V_G(x, y) + C_F^2 V_F(x, y) \right]_+ \quad (3.1.2)$$

^{*}Наше определение V_F здесь отличается от принятого в работе /3/ фактором 4: $V_F^{(33^{(4)})} = 4 V_F^{(3)}$.

Матрица аномальных размерностей $Z_{нк}$, соответствующая однопетлевому ядру V_0 , была впервые вычислена Ефремовым и Радюшкиным /4/, в то время как само ядро V_0 было введено Бродским и Лепажем /6/.

Ядро V_0 удобно рассматривать как сумму $V_0 = V_a + V_g$ двухчленов V_a и V_g , причем первый

$$V_a = c_F \int \int 2 \frac{x}{y} \theta(x < y) \quad (3.1.3)$$

пропорционален однопетлевому ядру в $\mathcal{G}_{(6)}$ -теории. Второй член

$$V_g = c_F \int \int 2 \frac{x}{y} \frac{1}{y-x} \theta(x < y) \quad (3.1.4)$$

специфичен для калибровочной теории. В фейнмановской калибровке, например, он возникает из A_μ - частей ковариантных производных \mathcal{D}_μ . Операция "+" в равенствах (3.1.2) означает

$$W(x, y)_+ = W(x, y) - \delta(y-x) \int_0^1 W(z, y) dz \quad (3.1.5)$$

и отражает тот факт, что в КХД

$$\int_0^1 V(x, y) dx = 0 \quad (3.1.6)$$

благодаря сохранению тока в киральном пределе.

Двухпетлевой вклад в $V_2(x, y)$ впервые был вычислен аналитически в светоподобной аксиальной калибровке /1,2/, а также в фейнмановской калибровке /3/. Все результаты согласуются между собой, более того, результат для V_F был проверен численным расчетом /23/ в фейнмановской калибровке. Мы приводим здесь для справки точные выражения для V_N , V_G и V_F :

$$V_N(x, y) = \int \theta(x < y) \left[-\frac{10}{9} F - \frac{2}{3} \frac{x}{y} - \frac{2}{3} F \ln \frac{x}{y} \right] \quad (3.1.7)$$

$$V_G(x, y) = \int \theta(x < y) \left[\frac{67}{9} F + \frac{17}{3} \frac{x}{y} + \frac{11}{3} F \ln \frac{x}{y} \right] + H(x, y) \quad (3.1.8)$$

$$V_F(x, y) = 4 \int \theta(x < y) \left\{ -\frac{\pi^2}{3} F + \frac{x}{y} - \left(\frac{3}{2} F - \frac{x}{2y} \right) \ln \frac{x}{y} - (F - \bar{F}) \ln \frac{x}{y} \ln(1 - \frac{x}{y}) + (F + \frac{x}{2y}) \ln^2(\frac{x}{y}) - \frac{x}{2y} \ln x (1 + \ln x - 2 \ln \bar{x}) - H(x, y) \right\}, \quad (3.1.9)$$

где $F = F(x, y) = \frac{x}{y} (1 + \frac{1}{y-x})$; $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y})$ и функция $H(x, y)$ равна

$$H(x, y) = \theta(\bar{y} < x) \left[2(F - \bar{F}) Li_2(1 - \frac{x}{y}) - 2F \ln x \ln y + (F - \bar{F}) \ln^2 y \right] + 2F Li_2(\bar{y}) \left[\theta(\bar{y} < x) - \theta(x < y) \right] - 2F Li_2(x) \left[\theta(\bar{y} < \bar{x}) - \theta(y < x) \right] + \theta(x < y) 2\bar{F} \ln y \ln \bar{x}, \quad (3.1.10)$$

$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1-t)$ - функция Спенса.

Возникает естественный вопрос: обладает ли $V(x, y)$ структурой, следующей из анализа скалярной модели $\mathcal{G}_{(6)}$, или нет?

Во-первых, заметим, что члены V_N и V_G , содержащие новые элементы N_f и C_A по сравнению с однопетлевым вкладом, имеют лишь такие недиагональные члены, которые индуцированы перенормировкой константы связи

$$2 N_f c_F V_N + 2 c_F C_A V_G = \beta_0 \dot{V}_0 + u_D, \quad (3.1.11)$$

где u_D - диагональный член, $\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} N_f$ - первый коэффициент в β - функции, и $\dot{V}_0 \equiv \dot{V}_a + \dot{V}_g$ - ядро, аналогичное \dot{V}_0 (см. (2.5.3)). Совершенно аналогично V_0 , \dot{V}_0 содержит часть \dot{V}_a , пропорциональную \dot{V}_0 в $\mathcal{G}_{(6)}$ -модели, и калибровочную часть \dot{V}_g :

$$\dot{V}_a = c_F \int \int 2 \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} \theta(x < y), \quad (3.1.12a)$$

$$\dot{V}_g = c_F \int \int 2 \frac{x}{y} \frac{1}{y-x} \ln \frac{x}{y} \theta(x < y). \quad (3.1.12b)$$

Представляется, что наиболее сложный вклад в $V_2(x, y)$ вносится функцией $H(x, y)$ (3.1.10). Она содержит функции Спенса Li_2 и "нестандартные" θ - функции $\theta(x < \bar{y})$, $\theta(\bar{y} < x)$, отсутствующие в однопетлевом ядре. Однако $H(x, y)$ оказывается диагональной. Это вполне соответствует $\mathcal{G}_{(6)}$ случаю, где члены с "нестандартными" θ - функциями (которые возникали из перекрестно-лестничной диаграммы, см раздел 2.6) также вносили вклад лишь в диагональную часть ядра.

Более сложную структуру имеет V_F ядро, которое можно трактовать как вторую итерацию однопетлевого результата. По аналогии с результатом $\mathcal{G}_{(6)}$ модели попытаемся выделить в $c_F^2 V_F$ член $-V_{0+} \oplus V_{0+}$, индуцированный ренормировкой составного оператора, в надежде, что оставшиеся члены дадут диагональный вклад.

В фейнмановской калибровке произведение $\dot{V}_{0+} \oplus V_{0+}$ представляется суммой членов $\dot{V}_a \oplus V_a$, $\dot{V}_g \oplus V_g$, ..., причем каждый

возникает в соответствующей диаграмме. Анализируя вклады отдельных диаграмм (все они выписаны в работе /3/), мы обнаружили, что КХД - версия лестничной диаграммы (рис. 6) дает в фейнмановской калибровке вклад $-\dot{V}_a \otimes V_a + U_{\text{гале}}$. Однако ситуация не столь прозрачна для диаграмм, дающих члены с $V_{\delta+}$ и $V_{\delta-}$ - факторами, специфичными для калибровочных теорий. Усложнения, возникающие в этом случае, проиллюстрируем рассмотрением простейшей диаграммы такого типа на рис. 7. Ее $\epsilon \delta$ - регуляризованный вклад с точностью до несущественного фактора (δ - для внутренней петли и ϵ - для внешней) представим в виде

$$V_{(\delta, \epsilon)}^{(\bar{z})} = \int_0^1 dz \int_{\delta}^{\epsilon} \left\{ \frac{2}{z} \frac{\theta(x < z)}{z-x} \left(\frac{x}{z}\right)^{-\delta} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-\delta} \right\} U_{\alpha(\delta, \epsilon)}(z, y), \quad (3.1.13)$$

где $U_{\alpha(\delta, \epsilon)}$ совпадает при $\delta = 0$ с однопетлевым вкладом $\frac{1-\epsilon}{\epsilon} V_a(z, y)$:

$$U_{\alpha(\delta, \epsilon)} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon+\delta} \frac{2}{y} \left\{ \left(\frac{z}{y}\right)^{1+\delta} - \theta(z < y) \left(1 - \frac{z}{y}\right)^{1+\delta} \right\}. \quad (3.1.14)$$

После проведения вычитаний и учитывая зеркально-симметричную диаграмму, мы получим окончательный результат в виде суммы разнообразных сверток:

$$V^{(\bar{z})} = -\dot{V}_{\delta+} \otimes V_a - (U_{\delta}^{\prime} + \bar{U}_{\delta}^{\prime}) \otimes V_a + U_{\delta+} \otimes \omega_a + \bar{U}_{\delta+} \otimes \bar{\omega}_a + V_{\delta+} \otimes V_a. \quad (3.1.15)$$

Здесь

$$U_{\delta}(x, y) = \frac{x}{z} \frac{1}{z-x} \theta(x < z)$$

"левая часть" V_{δ} (см. (3.1.14)), другой элемент

$$U_{\delta}^{\prime}(x, z) = \frac{x}{z} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{z}\right)}{z-x} \theta(x < z)$$

напоминает логарифмическую модификацию U_{δ} (но с фактором $\ln\left(1 - \frac{x}{z}\right)$ вместо $\ln\left(\frac{x}{z}\right)$), и последний элемент

$$\omega(z, y) = \frac{1}{y} \left\{ \bar{z} \ln \bar{z} - \theta(z < y) \left(1 - \frac{z}{y}\right) \ln\left(1 - \frac{z}{y}\right) \right\}$$

трудно связать с каким-либо ядром из введенных нами ранее.

Вклады прочих диаграмм без частично-перекрывающихся расходимостей имеют структуру, аналогичную диаграмме на рис. 7: в дополнение к членам, которые легко интерпретируются как компоненты $\dot{V}_{\delta+} \otimes V_{\delta+}$ - вклада, они содержат также разнообразные недиагональные члены (типа U_{δ}^{\prime} в (3.1.15)), происхождение которых неясно. Более того, эти члены не сокращаются после суммирования вкладов отдельных диаграмм. Запишем воз-

можное представление для V_F ядра в виде

$$c_F^2 V_F = -\dot{V}_{\delta+} \otimes V_{\delta+} + c_F^2 U_{F(2)} + c_F^2 U_{F(2D)}, \quad (3.1.16)$$

где $U_{F(2D)}$ - явно диагональный член

$$U_{F(2D)} = -4 \int \left[H(x, y) + \theta(x < y) \left(F\left(\frac{z}{y} + Li_2(1) - \frac{x}{y}\right) \right) \right] \quad (3.1.17)$$

и $U_{F(2D)}$ - недиагональный остаток

$$U_{F(2D)} = 4 \int \theta(x < y) \left\{ (\bar{F}-F) \left[Li_2(x) + Li_2(\bar{y}) + \ln \bar{x} \ln y + \ln \frac{x}{y} \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right) \right] - \frac{3}{2} F \ln \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} + Li_2(\bar{y}) \frac{x}{y} + Li_2(x) \frac{\bar{x}}{y} + \frac{\bar{x}}{y} \ln \frac{x}{y} \ln \bar{x} \right\}. \quad (3.1.18)$$

Таким образом, я.э. $V_2(x, y)$ в КХД имеет структуру, существенно отличающуюся от случая $\psi_{(6)}^3$ -модели. Значит, полное выражение для $V_2(x, y)$ нельзя получить из равенства (2.10.1), воспользовавшись вместо \dot{V}_0 и \bar{V}_0 их КХД аналогами V_0 и \bar{V}_0 . Другими словами, прямое вычисление $V_2(x, y)$ /I-3/ являлось необходимым при современном понимании структуры я.э. в КХД. Мы надеемся, что будущие исследования установят причины появления членов, оставшихся здесь необъясненными. Тогда не надо будет прилагать больших усилий для вычисления какого-либо ядра эволюции: если известна общая структура V (типа равенства (2.10.1) в $\psi_{(6)}^3$ модели), то точная двухпетлевая форма V воспроизводится из сверток однопетлевых структур типа V_0 , \bar{V}_0 и т.п., ...

В нашем случае мы не можем объяснить всех деталей структуры ядра, однако нам известно точное выражение для $V_2(x, y)$ из прямых вычислений. Далее, нам известно, что это выражение корректно, несмотря на отсутствие полной аналогии с $\psi_{(6)}^3$ примером. Следовательно, мы можем решить у.э. в КХД на двухпетлевом уровне.

3.2. Решение уравнения эволюции в КХД

В принципе, у.э. в КХД может быть решено точно так же, как и в $\psi_{(6)}^3$ модели (см. раздел 2.8 и 2.10). Однако для приложений удобно изменить схему решения, принятую в разделе 2.10, так, чтобы волновая функция $\Phi(x, \mu^2)$ при $\mu^2 = Q^2$ определялась непосредственно из вида функции при $\mu^2 = Q_0^2$. Это достигается тем, что оператор W считается теперь зависящим от Q^2 : $W \rightarrow W(Q^2)$ и $W(Q_0^2) = 0$ (условие отсутствия радиационных поправок при $\mu^2 = Q_0^2$).

Подобная схема является стандартной при анализе функций распределения (см., например, /24/), она также была использована Бродским и др. /13/ для в.ф.п.

В этом случае уравнение (2.10.9) модифицируется:

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \tilde{W} = \frac{d_2(Q)}{4\pi} [\ell_0 \tilde{W} + [V_0, \tilde{W}]_- + V_{2(\text{нб})}]. \quad (3.2.1)$$

Формальное решение уравнения (3.2.1) получается совершенно аналогично (2.10.10)

$$\tilde{W} = W - \left(\frac{d_2(Q_0)}{d_2(Q)} \right)^{\ell_0 + V_0 / \ell_0} \otimes W \otimes \left(\frac{d_2(Q_0)}{d_2(Q)} \right)^{-V_0 / \ell_0}, \quad (3.2.2)$$

где W - решение (2.10.10).

В результате мы получим выражение для поправки в виде ряда

$$\left(1 + \frac{d_2(Q)}{4\pi} \tilde{W} \right) \otimes \psi_n = \psi_n + \frac{d_2(Q)}{4\pi} \sum_{k \geq 0} d_n^k(Q) \psi_k, \quad (3.2.3)$$

где

$$d_n^k(Q) = \frac{(V_{2(\text{нб})})_{kn}}{\gamma_k^{(n)} - \gamma_n^{(n)} - \ell_0} S'_{kn}(Q); \quad (3.2.4)$$

$$a \quad \gamma_n^{(n)} - \text{собственные значения ядра } V_{0+} : \quad (V_{2(\text{нб})})_{kn} = \frac{4(2k+3)}{(k+1)(k+2)} c_k^{3/2} \otimes V_{2(\text{нб})} \otimes \psi_n,$$

$$\gamma_n^{(n)} = c_F \left(1 + 4 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$V_{0+} \otimes \psi_n = -\gamma_n^{(n)} \psi_n;$$

наконец, $S'_{kn}(Q)$ - фактор, определяющий Q^2 зависимость оператора \tilde{W}

$$S'_{kn}(Q) = 1 - \left(\frac{d_2(Q_0)}{d_2(Q)} \right)^{(\ell_0 + \gamma_n^{(n)} - \gamma_k^{(n)}) / \ell_0}$$

Отметим, что у $(V_{2(\text{нб})})_{kn}$ - матрицы не равны 0 лишь элементы с k и n одной четности и $k > n$. Первое является проявлением "геометрической" симметрии я.э. $V(x, y) = V(\bar{x}, \bar{y})$, а второе следует из треугольности матрицы перенормировок.

Наш результат (3.2.4) формально совпадает с решением, приведенным в работе /I3/. Мы, однако, выделяем $(V_{2(\text{нб})})_{nk}$ из точного выражения, полученного в работах /I-3/, которое отличается от $(V_{2(\text{нб})})_{nk}$, предложенного в /I3/. Используя теперь выражение (3.1.2) и (3.1.II) для V_2 и равенства (2.10.5), (2.10.6), (2.10.12-13) для $V_0 \otimes \psi_n$

- члена, придем к окончательному выражению для $d_n^k(Q)$ в КХД:

$$d_n^k(Q) = S'_{kn}(Q) \left\{ \ell_0 (\gamma_k^{(n)} - \gamma_n^{(n)}) a_{nk} + c_F^2 (V_{F(\text{нб})})_{kn} \right\} \frac{1}{\gamma_k^{(n)} - \gamma_n^{(n)} - \ell_0}, \quad (3.2.5)$$

где a_{nk} - коэффициенты, определенные в (2.10.6).

Волновая функция пиона, с учетом ее эволюции в двухпетлевом приближении, в соответствии с (2.8.1), (2.8.2), (3.2.5) принимает вид:

$$\Phi(x, Q^2) = \sum_n \ell_n(Q_0^2) \exp \left\{ \int_{Q_0^2}^{Q^2} \gamma_n(\bar{g}(t)) \frac{dt}{t} \right\} \left(\psi_n(x) + \frac{d_2}{4\pi} \sum_{k > n} d_n^k \psi_k \right). \quad (3.2.6)$$

Здесь $\ell_n(Q_0^2)$ - гегенбауэровские моменты исходной функции $\Phi(x, Q_0^2)$. Матричные элементы $(V_{F(\text{нб})})_{kn}$ были получены нами численным интегрированием. Диагональные элементы $(V_2)_{nn}$, совпадающие с двухпетлевыми аномальными размерностями $-\gamma_n^{(2)}$, приведены, например, в /25/.

3.3. Численные результаты для эволюции волновой функции пиона

Используя уравнения (3.2.5), (3.2.6), можно вычислять КХД-эволюцию с Q^2 любых волновых функций, заданных при некотором Q_0^2 . Общие свойства эволюции наиболее удобно формулировать для "парциальных" волновых функций ψ_n , входящих в разложение (3.2.6) с весами $\ell_n(Q_0^2)$.

I. Для $n > 2$ поправки, идущие от недиагональной части, примерно на порядок меньше поправок от диагональной части, аккумулированных в экспоненциальном факторе. То есть ядро $V(x, y)$ оказывается "квазидиагональным" в гегенбауэровском базисе (поправки при $n = 0$, т.е. для асимптотической функции также очень малы и рассмотрены ниже).

2. Поправки высших гармоник к ψ_n определяются в основном первым членом $d_n^{n+2} \psi_{n+2}$ в сумме по k в (3.2.6). Последующие коэффициенты быстро убывают с ростом k (см. Приложение Б).

3. Вклад двухпетлевых поправок возрастает с ростом номера n . При $n = 6$ они дают уже 6% поправку при $x = 0,5$ и $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$ (Здесь и ниже $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\lambda_{\text{квб}} = 0,1 \text{ ГэВ}$).

Так, при распространенном выборе $\Phi(x, Q_0^2) = 6x\bar{x}$, что соответствует асимптотической волновой функции в ГЛШ, поправки идут лишь за счет недиагональных членов.

$$\Phi(x, Q^2) = 6x\bar{x} \left\{ 1 + \frac{d_2}{4\pi} \sum_{k \geq 2} d_0^k c_k^{3/2} (x-\bar{x}) \right\}. \quad (3.3.1)$$

Вычисления показывают, что поправки составляют менее 0,5% (при $x = 0,5$) вплоть до $Q^2 = 6 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}^2$.

Другой известный пример низкоэнергетической в.ф.п. был предложен Черняком и Житницким /5/

$$\varphi(x, Q_0^2) = 30 x \bar{x} (1 - 4x \bar{x}).$$

В этом случае относительный вклад двухпетлевых поправок составляет примерно 2% при $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$. Используя Приложение Б, можно вычислить поправки к любым волновым функциям, которые при $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ могут быть представлены суммой полиномов Гегенбауэра ψ_n с $n \leq 8$.

4. Заключение

В статье мы проанализировали структуру двухпетлевых ядер эволюции в $\mathcal{Y}_{(6)}^3$ - теории и в КХД. Были построены полные решения двухпетлевого уравнения эволюции для волновой функции пиона. Простая $\mathcal{Y}_{(6)}^3$ модель используется здесь для иллюстрации аналитической структуры двухпетлевого ядра эволюции и изучения источников различных структур в конечном ответе. Так, мы выявили вклады, генерирующие сдвиг индекса у полиномов Гегенбауэра, и построили точные выражения для мультипликативно перенормируемых операторов в случае $\theta_0 = 0$, т.е. тогда, когда нет эволюции константы связи. В КХД мы, используя для V_2 результаты наших вычислений в фейнмановской калибровке /3/, установили, что V_N и V_G - члены, связанные с групповыми факторами $C_F N_f$ и $C_F C_A$, имеют структуру, предсказанную моделью $\mathcal{Y}_{(6)}^3$. Однако член V_F , связанный с C_F^2 - фактором, имеет более запутанную структуру: в дополнение к членам, диктуемым аналогией с $\mathcal{Y}_{(6)}^3$ - моделью, в нем содержатся вклады, нарушающие диагональность V_F в гегенбауэровском базисе.

Интересной проблемой для будущих исследований является выявление источников этих, нарушающих диагональность, дополнительных членов. Предположим, что они появляются вследствие общих принципов (например, вследствие специфического нарушения конформной симметрии калибровочными полями) и их структура в терминах квазиоднопетлевых объектов может быть предсказана а priori. Тогда информация, необходимая для построения решений уравнений эволюции с различными ядрами, может быть получена из однопетлевых вычислений таких объектов и двухпетлевых вычислений ядер для рассеяния вперед, расчет которых значительно проще (или уж проведен).

Для получения эволюции волновой функции пиона мы численно рассчитываем недиагональные элементы V_2 и табулируем коэффициенты c_n^k , описывающие эволюцию \mathcal{N} - парциальной гегенбауэровской волны. Установлено, что двухпетлевые поправки достаточно малы ($\approx 7\%$ при $n = 8$ для $Q^2 \approx 125$).

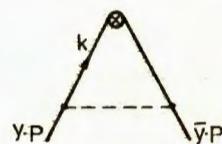
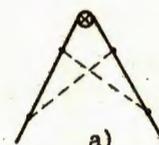


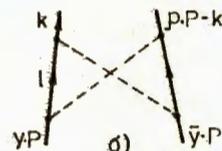
Рис. 1.

Однопетлевая треугольная диаграмма.



а)

а) Двухпетлевая перекрестно-лестничная диаграмма



б)

б) подграф, вклад которого дается интегралом (2.6.1).

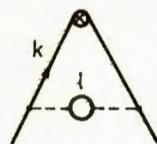


Рис. 3.

Двухпетлевая диаграмма с собственно-энергетической вставкой в глюонный пропагатор.

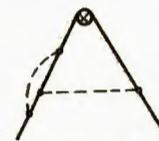


Рис. 4.

Двухпетлевая диаграмма, связанная с перенормировкой кварк-глюонной вершины.

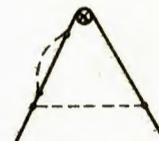
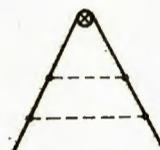


Рис. 5.

Двухпетлевая диаграмма с собственно-энергетической вставкой в кварковый пропагатор



а)

Двухпетлевая лестничная диаграмма.



б)

Рис. 6.

Фейнмановская параметризация для нижнего подграфа.

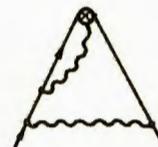


Рис. 7.

Приложение А.

В этом приложении дана сводка результатов для вкладов отдельных диаграмм в $V(x, y)$ ("з.с." означает "зеркально-сопряженный").

Диаграмма	$V(x, y)$
	$\dot{V}_0(x, y) - \frac{1}{6} \delta(y-x)$
	$-\dot{V}_0(x, \tau) \otimes \dot{V}_0(\tau, y)$
	$\dot{V}_0(x, \tau) \otimes \dot{V}_0(\tau, y) + \dot{V}_0(x, \tau) \otimes \bar{\dot{V}}_0(\tau, y)$
	$-\frac{1}{6} N_f \left(\frac{5}{3} \dot{V}_0(x, y) + \dot{V}_0(x, y) \right)$
	$\frac{1}{6} \left(\frac{10}{3} \dot{V}_0(x, y) + \dot{V}_0(x, y) + U(x, y) \right)$
	$\frac{1}{2} \left(3 \dot{V}_0(x, y) + 2 \dot{V}_0(x, y) + \dot{V}_0(x, \tau) \otimes \dot{V}_0(\tau, y) + U(x, y) \right)$
	$\frac{7}{72} N_f \delta(y-x)$
	$\frac{25}{16} \delta(y-x)$

Здесь введены обозначения: $U(x, y) = \int \theta(x < y) \left[\frac{x}{y} \ln y + \frac{x}{y} \ln(\bar{x}) - \frac{1}{y} (1 - \frac{x}{y}) \ln(1 - \frac{x}{y}) \right]$; $\dot{V}_0 = \int \theta(x < y) \frac{x}{y}$; $\dot{V}_0 = \int \theta(x < y) \frac{x}{y} \ln \frac{x}{y}$; $\bar{\dot{V}}_0(x, y) = \dot{V}_0(x, \bar{y})$

Приложение Б.

Коэффициенты $d_n^{k, k}$ вычислены при $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$, $\lambda_{\text{куз}} = 0,1 \text{ нэ}$.
 $Q^2 = 125 \text{ ГэВ}^2$

$h \backslash k$	0	2	4	6	8
2	-0,277				
4	+0,012	-0,89			
6	0,032	-0,26	-1		
8	0,027	-0,087	-0,4	-1	
10	0,021	-0,03	-0,187	-0,47	-0,96
12	0,016	-0,007	-0,094	-0,25	-0,5
14	0,012	0,002	-0,05	-0,15	-0,29
16	0,01	0,006	-0,025	-0,09	-0,18
18	0,009	0,007	-0,008	-0,05	-0,12

Литература

1. Sarmadi M.H. Phys. Lett., 1984, 143B, p. 471.
2. Dittes F.M. and Radyushkin A.V. Phys. Lett., 1984, 134B, p.359.
3. Mikhailov S.V. and Radyushkin A.V. Nucl. Phys., 1985, B254, p. 89.
4. Efremov A.V. and Radyushkin A.V. Phys. Lett., 1980, 94B, p. 245, 1980, 42, c. 147.
5. Chernyak V.L. and Zhitnitsky A.R. Phys. Rep., 1984, 112, No 3, 4.
6. Brodsky S.J. and Lepage G.P. Phys. Rev. D, 1980, 22, p. 2157.
7. Mueller A.H. Phys. Rep., 1981, 73, p. 237.
8. Байер В.Н. и Грозин А.Г. В сб. "Физика элементарных частиц и атомного ядра". 1984, т. 16, в1, с. 5.

9. Диттес Ф.М. и Радюшкин А.В. ЯФ, 1981, 34, с. 529.
10. Field R.D. et al. Nucl. Phys., 1981, B186, p. 429.
11. Del Aguila F., Chase M.K. Nucl. Phys., 1981, B193, p. 517
12. Khalmuradov R.S. and Radyushkin A.V. JINR, E2-84-606, Dubna, 1984.
13. Brodsky S.J., Damgaard P., Frishman Y. and Lepage G.P. SLAC-Pub-3295, Stanford, 1984.
14. Михайлов С.В. и Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-84-329, Дубна, 1984.
15. Радюшкин А.В. ОИЯИ, P2-10717, Дубна, 1977.
16. Kubota T. Nucl. Phys., 1980, B165, p. 277.
17. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, ч. 2, М., "Наука", 1979.
18. Todorov I.T., Mitchev M.C., Petcova V.B. Conformal invariance in quantum field Theory. Scuola normale superiore, Pisa, 1978.
19. Craigie N.S., Dobrev V.K., Todorov I.T. IC/83/35, Trieste, 1983.
20. Mack G. and Salam A. Ann. Phys. (N.Y.), 1969, 53, p. 174.
Mack G. in: "Lecture Notes in Physics", v. 17, Stong Interaction Physics, Springer Verlag, Berlin, 1972.
Migdal A.A. Phys. Lett., 1971, 37B, p. 98; p. 386.
21. Макеенко Ю.М. ЯФ, 1981, 33, с.842.
22. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. Nucl. Phys., 1980, B 174, p. 345.
23. Katz G.R. Phys. Rev. D., 1985, 31, p. 652.
24. Ellis R.K. et al., Nucl. Phys., 1983, B 212, p. 29.
25. Floratos E.G., Ross D.A., Sachrajda C.T. Nucl. Phys., 1977, B 129, p. 661 (E) 139, 1978, p. 545.;
Shimizu Y., Yamamoto H., Kato K., UT-370, March, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 декабря 1985 года.

Михайлов С.В., Радюшкин А.В. P2-85-906
Структура двухпетлевого ядра эволюции и эволюция волновой функции пиона в модели $\phi_{(6)}^3$ и КХД

Подход, основанный на поддиаграммном анализе, применен для исследования структуры ядер эволюции для волновой функции пиона. Анализируется общая структура двухпетлевого ядра для волновой функции пиона в скалярной модели $\phi_{(6)}^3$ и в несинглетном секторе КХД. В обеих моделях получены решения уравнения эволюции. В случае КХД численно оценивается вклад двухпетлевых поправок в эволюцию волновой функции. Разработанные методы могут применяться при решении уравнений для волновых функций других адронов. Полученные здесь решения могут быть непосредственно использованы в расчетах эксклюзивных процессов, включающих пионы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Mikhailov S.V., Radyushkin A.V. P2-85-906
Structure of Two-Loop Evolution Kernels and Evolution of the Pion Wave Function in $\phi_{(6)}^3$ and QCD

The approach based on the diagrammatic analysis is applied to study the structure of the evolution kernel and to solve the evolution equation. The general structure of the two-loop non forward evolution kernels is investigated in the $\phi_{(6)}^3$ -model and QCD. The solution of the two-loop evolution equations is constructed in both models. In QCD, the contribution of the two-loop corrections to the wave function evolution is estimated numerically. The methods developed can be applied to obtain the evolution of wave function related to other hadrons. The results obtained can be applied directly for calculations of any exclusive processes involving pions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1985