объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-85-942

А.П.Исаев

МОДЕЛЬ ФЕРМИОННОЙ СТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГРУПП ЛИ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1985

I. Введение

В последнее время интенсивно изучается /1/ двумерная суперсимметричная теория главного кирального поля, динамика которого описывается действием, в которое добавлено суперсимметризованное слагаемое Весса-Зумино /1,2/. Была высказана идея /3-5/ о том, что эта теория, обобщенная на случай произвольного "кривого" двумерного супермногообразия, должна описывать динамику фермионной струны в пространстве-времени, изоморфном пространству группы Ли G, элементом которой является киральное поле. Группа Ли G выбирается в виде прямого произведения d-абелевых групп, описывающих d-мерное плоское пространство-время, и компактной группы Ли G', которая описывает компактифицированные измерения пространства-времени. В рамках этой идеологии для рассматриваемой теории были вычислены /3,4/ значения d критических размерностей плоского пространства-времени, причем оказалось, что величина d равняется $\left(10-\frac{N+C_V/3}{N+C_V}D\right)$, где D - размерность компактной группы G'; $C_V=t^{abc}t_{abc}/D$, t_{abc} - структурные константы группы G'; N — целое число - коэффициент перед слагаемым Весса-Зумино. Таким образом, величина d зависит от выбора характеристик компактной группы G', или, что то же самое, от выбора характеристик компактифицированной части пространства-времени.

Следующий шаг, который необходимо сделать для изучения новой модели фермионной струны,- это построение соответствующих данной модели дуальных амплитуд рассеяния. Для этого необходимо изучить квантовый спектр физических состояний рассматриваемой струны и построить вершинные операторы, описывающие взаимодействие струн с внешними полями. Представляется, что изучение квантового спектра модели не встретит принципиальных трудностей, если воспользоваться известными результатами /6/ о представлениях алгебр Каца-Муди, Вирассоро и суперациебр Невье-Шварца-Рамона (смотри также недавние работы /7,8/). Что же касается построения вершинных операторов (имеются в виду вершины, описывающие испускание возбужденных безмассовых частиц), то такое построение достаточно нетривиально, о чем можно судить, обращаясь к теории обычной фермионной струны. Здесь уместно напомнить /9/ тесную связь вершинных операторов и операторов физических частиц.

Последние коммутируют с образующими алгебры Вирассоро (Невье-Шварца--Рамона) и, таким образом, могут рассматриваться как высшие интегралы движения релятивистской струны. Прослеженная только что связь между вершинными операторами и высшими интегралами движения релятивистской струны оказывается весьма полезной (см. работы /10/) при построении классических аналогов операторов физических частиц (вершинных функционалов) и наводит на мысль, что коль скоро мы хотим построить в новой теории фермионной струны вершинные операторы, то необходимо исследовать эту теорию на возможность ее полной интегрируемости (на возможность построения бесконечного числа интегралов движения).

Конечно полная интегрируемость рассматриваемой модели и возможность построения бесконечного числа нетривиальных законов сохранения представляет и самостоятельный интерес, например: для построения переменных типа "действие-угол" (для нашего случая более точно - типа "рождение-уничтожение" /11/) и последующего ее квазиклассического квантования.

Настоящая статья посвящена исследованию интегрируемости (в рамках гамильтонового подхода) теории фермионной струны, развивающейся в групповом пространстве. Целью этого исследования является построение вершинных операторов и соответствующих дуальных амплитуд рассеяния новых струн. Метод построения функционалов (соответствующих вершинным операторам), коммутирующих со связями, основывается на том, что все рассмотрение ведется в произвольной калибровке, когда множители Лагранжа, возникающие в гамильтоновом подходе, не фиксируются, а считаются на всех этапах произвольными функциями. Все основные результаты будут получаться на суперполевом языке, который возникает в нашем подходе как результат компактной записи гамильтоновых уравнений движения. Отметим, что рассматриваемая модель по сути дела обобщает обычную теорию фермионной струны (Невье-Шварца или Рамона) и все полученные результаты и используемая при этом суперполевая техника автоматически переносятся на более простой случай обычной фермионной струны. Соответствующий анализ был проведен недавно автором совместно с В.И.Бородулиным /10/.

Некоторые обозначения, принятые в статье:

$$\dot{\varphi}(\sigma,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(\sigma,\tau)\ ,\ \varphi'(\sigma,\tau)=\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\sigma,\tau),$$

$$\delta(\sigma-\sigma')=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp[in(\sigma-\sigma')]$$ — периодическая δ-функция.

В отличие от работ [3,4] будем считать, что группа G проста и некомпактна.

2. Гамильтонова формулировка модели фермионной струны, развивающейся в пространствах групп Ли

Динамика фермионной струны, распространяющейся в пространстве группы Ли G , описывается действием (двумерная супергравитация с полями материи $\mathcal{U}$ и Ψ)

$$S=\frac{N}{8\pi}\int_{\partial V}d\sigma d\tau\sqrt{-g}\,\mathrm{Tr}\Big\{-\frac{1}{2}g^{AB}\partial_A UU^{-1}\partial_B UU^{-1}+\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\alpha}e^{A}_{\alpha}\partial_A\Psi+ \tag{I}$$

$$+i\varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\Psi}\gamma_{\alpha}\Psi\Big(\frac{1}{2}e^{A}_{\beta}U^{-1}\partial_A U+i\frac{2}{3}\bar{\chi}_{\beta}\Psi\Big)-\bar{\chi}_{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\big(2ie^{A}_{\beta}\partial_A\Psi+$$

$$+\frac{1}{8}\Psi\bar{\Psi}\chi_{\beta}\big)\Big\}+\frac{N}{24\pi}\int_{V}d^3\xi\,\varepsilon^{ABC}\,\mathrm{Tr}\big(U^{-1}\partial_A UU^{-1}\partial_B UU^{-1}\partial_C U\big),$$

которое является суперрасширением действия

$$S'=-\frac{1}{4\gamma}\int_{\partial V}d\sigma d\tau\sqrt{-g}\,\mathrm{Tr}\big(g^{AB}\partial_A UU^{-1}\partial_B UU^{-1}\big)+ \tag{Ia}$$

$$+\frac{N}{24\pi}\int_{V}d^3\xi\,\varepsilon^{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\,\mathrm{Tr}\big(U^{-1}\partial_{\bar{A}}UU^{-1}\partial_{\bar{B}}UU^{-1}\partial_{\bar{C}}U\big).$$

Здесь $U=\exp(x^a(\sigma,\tau)T_a)$ - элемент группы Ли G с генераторами T_a такими, что $[T^a,T^b]=t^{ab}{}_{c}T^{c}$, $\mathrm{Tr}(T^aT^b)=-\eta^{ab}$; $\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_L U\\ U\Psi_R\end{pmatrix}$ - майорановский спинор в вещественном представлении $\left(\gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\gamma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\gamma_5=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, где Ψ_L и Ψ_R - элемент алгебры Ли группы G ; $\chi_{\alpha}=(\tilde{\chi}_{\alpha}+\gamma_5\varepsilon_{\alpha\beta}\tilde{\chi}^{\beta})$, где $\tilde{\chi}_{\alpha}$ - двумерный аналог поля гравитино; $\varepsilon_{01}=-\varepsilon_{10}=1$, индексы A,B,α,β пробегают значения 0,I. Метрика $g^{AB}=-e^{A}_{0}e^{B}_{0}+e^{A}_{1}e^{B}_{1}$; $g=\det\|g_{AB}\|$. N - целое число (на параметры киральной теории (Ia) сразу же наложено условие конформной инвариантности Виттена [I2] $\gamma=\frac{4\pi}{N}$). Символ ∂V обозначает замкнутую двумерную поверхность (σ и τ - параметры на этой поверхности), ограничивающую трехмерную область V . Вопрос о том, какова топология (очевидно, что она зависит от вида мировой поверхности струны, так и от конкретного выбора группы G) поверхности ∂V весьма интересен и сложен и заслуживает специального исследования. Если группа G не проста, то возможно появление нескольких слагаемых Весса-Зумино в действии (I).

Будем считать, что все рассматриваемые поля являются элементами некоторой заданной бесконечномерной алгебры Грассмана Γ , причем поля U , e^{A}_{α} - четные элементы Γ , а Ψ_L , Ψ_R и $\tilde{\chi}_{\alpha}$ - нечетные элементы Γ .

Кроме локальной суперинвариантности (свойственной любой супергравитации) действие (I) инвариантно еще и относительно следующих

преобразований $e^{A}_{\alpha}\mapsto\frac{1}{\Lambda^2}e^{A}_{\alpha}$, $\tilde{\chi}_{\alpha}\mapsto(\tilde{\chi}_{\alpha}+\gamma_{\alpha}\lambda)\frac{1}{\Lambda}$, ..., где $\Lambda(\sigma,\tau)$ - произвольная функция (четный элемент алгебры Γ), а $\lambda(\sigma,\tau)$ - произвольный вещественный майорановский спинор (нечетный элемент алгебры Γ). Отметим, что при квантовании модели с действием (I) обе эти симметрии удается сохранить, только если пространство-время (групповое многообразие) имеет критическую размерность [I3]. Действие (I) инвариантно также относительно право-левых преобразований $(L,R\in G)$

$$U\mapsto LUR\quad,\quad\Psi\mapsto L\Psi R,$$

образующих группу $G_L\otimes G_R$.

Гамильтоново описание динамики рассматриваемой системы осуществляется в фазовом пространстве с координатами [5]: I) $A(\sigma,\tau)=A^a(\sigma,\tau)T_a$, $B(\sigma,\tau)=B^a(\sigma,\tau)T_a$, которые определяют плотность импульса на струне и ее мировую поверхность (в теории главного кирального поля это соответственно правые и левые образующие алгебры токов); 2) $\begin{pmatrix}\Psi_L\\ \Psi_R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_L^a T_a\\ \Psi_R^a T_a\end{pmatrix}$ — свободный майорановский спинор (нечетный элемент алгебры Γ), преобразующийся по присоединенному представлению группы $G_L\otimes G_R$. Мы ограничимся в дальнейшем периодическим случаем: $A(\sigma,\tau)=A(\sigma+2\pi,\tau)$, $B(\sigma,\tau)=B(\sigma+2\pi,\tau)$, $\Psi_{L,R}(\sigma,\tau)=\Psi_{L,R}(\sigma+2\pi,\tau)$.

Симплектическая структура в рассматриваемом фазовом пространстве определяется скобками Пуассона,

$$\{A^a(\sigma,\tau),A^b(\sigma',\tau)\}=2\delta(\sigma-\sigma')t^{abc}A_c(\sigma,\tau)-\frac{N}{\pi}\delta'(\sigma-\sigma')\eta^{ab}, \tag{2a}$$

$$\{B^a(\sigma,\tau),B^b(\sigma',\tau)\}=-2\delta(\sigma-\sigma')t^{abc}B_c(\sigma,\tau)+\frac{N}{\pi}\delta'(\sigma-\sigma')\eta^{ab}, \tag{2в}$$

$$\{\Psi_L^a(\sigma,\tau),\Psi_L^b(\sigma',\tau)\}=\{\Psi_R^a(\sigma,\tau),\Psi_R^b(\sigma',\tau)\}=-i\eta^{ab}\delta(\sigma-\sigma'). \tag{2c}$$

Остальные скобки Пуассона равны нулю. Соотношения (2a) и (2в) показывают, что величины A^a и B^a являются образующими алгебры Каца-Муди. Величины A^a и B^a могут быть выражены через главное киральное поле U и импульс $\mathcal{P}$, канонически сопряженный с полем U , с помощью формального приема, изложенного в работе [5].

Так как действие (I) инвариантно относительно локальных суперпреобразований, то, согласно второй теореме Нетер на канонические переменные (на координаты рассматриваемого фазового пространства), описывающие состояния новой фермионной струны, должны возникать связи, которые можно записать в следующем виде:

$$F_L=\frac{1}{2}\psi_L^a B_a+\frac{i}{6}t_{abc}\psi_L^a\psi_L^b\psi_L^c=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\psi_L B)-\frac{i}{3}\mathrm{Tr}(\psi_L^3)=0, \tag{3а}$$

$$T_L=B^a B_a+\frac{i}{\pi}N\psi_L^a\psi_{La}'=-\mathrm{Tr}(B^2)-i\frac{N}{\pi}\mathrm{Tr}(\psi_L\psi_L')=0, \tag{3б}$$

$$F_R=\frac{1}{2}\psi_R^a A_a-\frac{i}{6}t_{abc}\psi_R^a\psi_R^b\psi_R^c=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\psi_R A)+\frac{i}{3}\mathrm{Tr}(\psi_R^3)=0, \tag{3в}$$

$$T_R=A^a A_a-\frac{i}{\pi}N\psi_R^a\psi_{Ra}'=-\mathrm{Tr}(A^2)+i\frac{N}{\pi}\mathrm{Tr}(\psi_R\psi_R')=0. \tag{3г}$$

Функции F_α и T_α $(\alpha\in L,R)$ будем называть функциями связей. Функции связей (3) образуют супералгебру относительно скобок Пуассона (2):

$$\{T_{\substack{R\\L}}(f),T_{\substack{R\\L}}(h)\}=T_{\substack{R\\L}}(fh'-h'f),\ \{F_{\substack{R\\L}}(\eta),T_{\substack{R\\L}}(f)\}=F_{\substack{R\\L}}(\tfrac{1}{2}\eta f'-\eta' f) \tag{4}$$

$$\{F_{\substack{R\\L}}(\eta_1),F_{\substack{R\\L}}(\eta_2)\}=\mp\frac{N}{2\pi}iT_{\substack{R\\L}}(\eta_1\eta_2),$$

где $T_{\substack{R\\L}}(f)=\mp\frac{\pi}{2N}\int d\sigma f(\sigma)T_{\substack{R\\L}}(\sigma)$, $F_{\substack{R\\L}}(\eta)=\int d\sigma\,\eta(\sigma)F_{\substack{R\\L}}(\sigma)$.

Понятно, что для согласования вида скобок Пуассона (2) с равенствами (3), мы должны понимать последние в слабом смысле.

Вся динамика системы (в силу ее общекоординатной инвариантности) определяется гамильтонианом, плотность которого $\mathcal{H}$ является линейной комбинацией связей (3):

$$\mathcal{H}=T_R(f_R)+T_L(f_L)+i\frac{4\pi}{N}\big(F_L(\eta_L)+F_R(\eta_R)\big), \tag{5}$$

где периодические по σ функции $f_R(\sigma,\tau)$, $f_L(\sigma,\tau)$ (четные элементы алгебры Γ) $\eta_R(\sigma,\tau)$ и $\eta_L(\sigma,\tau)$ (нечетные элементы алгебры Γ) являются множителями Лагранжа. Отметим, что действие (I) можно получить (следуя работе /I4/), исходя из действия, записанного в гамильтоновых переменных $\tilde{S}=\int_{\partial V}d\sigma d\tau\{\mathrm{Tr}(\dot{u}\mathcal{P})-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\psi_L\dot\psi_L+\psi_R\dot\psi_R)-\mathcal{H}\}$, если выделить классическую составляющую из импульсной переменной $\mathcal{P}$ (обратное преобразование Лежандра). При этом величины e_α^A (соответственно метрика g^{AB}) и поле гравитино χ_α будут строиться соответственно из множителей Лагранжа f_R, f_L и η_R, η_L.

Учитывая явный вид (5) для плотности Гамильтониана $\mathcal{H}$ и пользуясь соотношениями (2), получаем следующие гамильтоновы уравнения движения

$$\dot\psi_L^a=\frac{f_L}{2}\psi_L^{a\prime}+\left(\frac{f_L}{2}\psi_L^a\right)'-\frac{2\pi}{N}\eta_L B^a-i\frac{2\pi}{N}\eta_L t^{abc}\psi_{Lb}\psi_{Lc}, \tag{6а}$$

$$\dot B^a=(f_L B^a)'-i\frac{4\pi}{N}\eta_L t^{abc}\psi_{Lb}B_c+2i(\eta_L\psi_L^a)', \tag{6б}$$

$$\dot\psi_R^a=\frac{f_R}{2}\psi_R^{a\prime}+\left(\frac{f_R}{2}\psi_R^a\right)'-\frac{2\pi}{N}\eta_R A^a+i\frac{2\pi}{N}\eta_R t^{abc}\psi_{Rb}\psi_{Rc}, \tag{6в}$$

$$\dot A^a=(f_R A^a)'+i\frac{4\pi}{N}\eta_R t^{abc}\psi_{Rb}A_c-2i(\eta_R\psi_R^a)'. \tag{6г}$$

Уравнения (6) можно записать в компактном виде, если ввести в рассмотрение суперполе

$$\Phi(\sigma,\tau,\theta_L,\theta_R)=\begin{pmatrix}\Phi_L(\sigma,\theta_L,\tau)\\ \Phi_R(\sigma,\theta_R,\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi_L^a T_a\\ \Phi_R^a T_a\end{pmatrix}= \tag{7}$$

$$=\begin{pmatrix}T_a[\psi_L^a-\frac{1}{2}\theta_L(B^a+it^{abc}\psi_{Lb}\psi_{Lc})]\\ T_a[\psi_R^a+\frac{1}{2}\theta_R(A^a-it^{abc}\psi_{Rb}\psi_{Rc})]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_L+\theta_L q_L\\ \psi_R+\theta_R q_R\end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix}\theta_L\\ \theta_R\end{pmatrix}$ - постоянный вещественный майорановский спинор (нечетный элемент алгебры Γ). В терминах суперполей Φ_L и Φ_R уравнения (6) запишутся в виде

$$\dot\Phi_\alpha=\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\theta_\alpha f_\alpha'+\frac{\partial}{\partial\sigma}f_\alpha-\left(-a_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}+i\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\eta_\alpha\right]\Phi_\alpha, \tag{8}$$

где индекс α может принимать два значения L и R, а $a_L=-4\pi/N$, $a_R=4\pi/N$. Естественно теперь назвать оператор $\hat{Q}_\alpha=\left(-a_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}+i\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)$ генератором суперсимметрии и ввести соответствующую ковариантную производную $\hat{D}_\alpha = (a_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + i\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial\sigma})$, такую, что $(\hat{D}_\alpha)^2 = i a_\alpha \frac{\partial}{\partial\sigma}$, $[\hat{D}_\alpha, \hat{Q}_\alpha]_+ = 0$. Связи (3) теперь можно представить в виде

$$\frac{1}{a_\alpha}\Phi_\alpha^b \hat{D}_\alpha \Phi_{\alpha b} + \frac{i}{3} t^{abc} \Phi_{\alpha a}\Phi_{\alpha b}\Phi_{\alpha c} = \frac{N}{4\pi} a_\alpha F_\alpha + \frac{1}{4}\theta_\alpha T_\alpha .$$

Наконец, скобки Пуассона (2) в терминах суперполей Φ_L и Φ_R также выглядят весьма элегантно (суперобобщение алгебры Каца-Муди):

$$\{\Phi_\alpha^b(\sigma,\theta), \Phi_\alpha^c(\sigma',\theta')\} = [\delta(\sigma-\sigma')(\theta-\theta')] t^{bcd} \Phi_{\alpha d}(\sigma,\theta) - i\frac{1}{a_\alpha}\hat{D}_\alpha [\delta(\sigma-\sigma')(\theta-\theta')] \eta^{bc} . \tag{9}$$

Отметим также следующее чрезвычайно важное соотношение, которое понадобится нам в дальнейшем

$$ia\left\{\frac{1}{2}f'\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + f\frac{\partial}{\partial\sigma} + \eta\left(-a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right\} = \tag{I0}$$

$$= \left(a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{1}{2}f - i\theta\eta\right)\left(a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) + \left(\frac{1}{2}f - i\theta\eta\right)\left(a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^2 .$$

Заканчивая переписывание основных формул на языке суперполей, подчеркнем, что хотя этот язык возник в нашем рассмотрении несколько нестандартно (как результат записи гамильтоновых уравнений движения в компактной форме (8)), он, тем не менее, полностью эквивалентен обычному суперполевому подходу, который используется для явно суперсимметричной формулировки теории.

Обсудим теперь смысл дифференциальных операторов I-го порядка, возникших в соотношениях (8) и (I0). Заметим, что в силу произвольности функций f и η оператор $\left\{\frac{1}{2}f'\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + f\frac{\partial}{\partial\sigma} - \eta\left(-a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\right\}$ естественно рассматривать как линейную комбинацию двух операторов

$$\hat{T}(f) = \frac{1}{2}f'\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + f\frac{\partial}{\partial\sigma} , \quad \hat{F}(\eta) = \eta\left(-a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right). \tag{II}$$

Легко проверить, что операторы $\hat{T}(f)$ и $\hat{F}(\eta)$ образуют супералгебру, так как имеем

$$[\hat{T}(f), \hat{T}(h)] = \hat{T}(fh' - f'h) , [\hat{F}(\eta_1), \hat{F}(\eta_2)] = -i2a\hat{T}(\eta_1\eta_2),$$
$$[\hat{T}(f), \hat{F}(\eta)] = \hat{F}(f\eta' - \frac{1}{2}f'\eta) . \tag{I2}$$

Эта алгебра при $a = a_L = -\frac{4\pi}{N}$ и $a = a_R = \frac{4\pi}{N}$ идентична алгебре связей (4) и реализует представления этой алгебры в пространстве суперфункций $\Phi_\alpha(\sigma,\theta)$. Утверждение об идентичности алгебр (4) и (I2) достаточно очевидно, так как плотность гамильтониана (5) выражается в виде линейной комбинации связей, а соотношения (8) реализуют представление гамильтониана (5) в пространстве суперполей $\Phi_L(\sigma,\theta)$ и $\Phi_R(\sigma,\theta)$. По-видимому, алгебра операторов (I2) является минимальным суперрасширением алгебры $Vect(S^1)$ и является подалгеброй супералгебры локальных векторных полей $D_{1,1}(S^1)$. Последнее утверждение, в частности, говорит о том, что супералгебра (II) должна генерировать супергруппу, которая является подгруппой супергруппы общих координатных суперпреобразований

$$\theta \mapsto \Theta(\sigma,\theta) \quad , \sigma \mapsto \Sigma(\sigma,\theta) . \tag{I3}$$

В нашем случае имеем

$$\Theta(\sigma,\theta) = exp\{\hat{T}(f) + \hat{F}(\eta)\}\theta \quad , \Sigma(\sigma,\theta) = exp\{\hat{T}(f) + \hat{F}(\eta)\}\sigma . \tag{I4}$$

Отметим два замечательных соотношения, которые связывают между собой суперфункции $\Theta(\sigma,\theta)$ и $\Sigma(\sigma,\theta)$, задаваемые равенствами (I4). Эти соотношения имеют вид (аналогичные соотношения были получены в ином подходе в работе [I5])

$$\hat{D}_a\Sigma = \frac{i}{a}(\hat{D}_a\Theta)\Theta , \quad i\Theta = \hat{D}_a\Sigma(\Sigma')^{-1/2} . \tag{I5}$$

Здесь введено обозначение $\hat{D}_a = (a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma})$. Соотношения (I5) легко доказываются, если воспользоваться равенствами

$$\hat{D}_a(\hat{T}(f) + \hat{F}(\eta)) = (\hat{T}^*(f) + \hat{F}^*(\eta))\hat{D}_a , \tag{I6}$$

$$[exp\{\hat{T}(f) + \hat{F}(\eta)\}A][exp\{\hat{T}^*(f) + \hat{F}^*(\eta)\}B] = $$
$$= exp\{\hat{T}^*(f) + \hat{F}^*(\eta)\}(AB) , \tag{I7}$$

где $\hat{\Upsilon}^*(f) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\theta f' + \frac{\partial}{\partial\sigma} f$, $\hat{F}^*(\eta) = -\left(-a\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\eta$,
а A и B - произвольные суперполя. Из тождеств (I5) следует равенство

$$\exp\{\hat{\Upsilon}^*(f) + \hat{F}^*(\eta)\}A(\sigma,\theta) = \frac{1}{a}\left[\hat{D}_\alpha \Theta\right] A(\Sigma, \Theta), \qquad (I8)$$

которое является суперобобщением на рассматриваемый случай известного равенства $\exp(\frac{\partial}{\partial\sigma} f(\sigma))A(\sigma) = \phi'(\sigma)A(\phi(\sigma))$, $(\phi(\sigma) = \exp(f\frac{\partial}{\partial\sigma})\sigma)$ и показывает, что березиниан преобразований (I4) равен суперфункции $\frac{1}{a}(\hat{D}_\alpha\Theta)$. Соотношение (I8) позволяет найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения (8). Это решение записывается в виде

$$\Phi_\alpha(\sigma,\theta_\alpha,\tau) = T\exp\left\{\int_0^\tau d\tau'\left(\hat{T}^*_\alpha(f_\alpha) + \hat{F}^*_\alpha(\eta_\alpha)\right)\right\}\Phi_\alpha(\sigma,\theta_\alpha,0) = \qquad (I9a)$$

$$= \frac{1}{a_\alpha}(\hat{D}_\alpha\Theta_\alpha)\,\Phi_\alpha(\Sigma_\alpha,\Theta_\alpha,0).$$

Вся зависимость от эволюционного параметра τ содержится в суперполях Θ_α и Σ_α, которые определяются равенствами
$\Theta_\alpha = T\exp\{\int_0^\tau d\tau'(\hat{T}_\alpha(f_\alpha)+\hat{F}_\alpha(\eta_\alpha))\}\theta_\alpha$, $\Sigma_\alpha = T\exp\{\int_0^\tau d\tau'(\hat{T}_\alpha(f_\alpha)+\hat{F}_\alpha(\eta_\alpha))\}\sigma$.

Общее решение задачи Коши, которое задает динамику полей $U(\sigma,\tau) = \exp\{x^a(\sigma,\tau)T_a\}$, ψ_L и ψ_R, можно выписать, если ввести новую (нелокальную) переменную $\tilde{U}(\sigma_1,\theta_1,\sigma_2,\theta_2,\tau)$, которая содержит полную информацию о рассматриваемой системе

$$\tilde{U}(\sigma_1,\theta_1,\sigma_2,\theta_2,\tau) = \left[{}_{\cdot}SP'\exp\left\{i\frac{4\pi}{N}\int_{\sigma,\theta_L}^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma'd\theta')_L\,\Phi_L(\sigma',\theta',\tau)\right\}\right]\times \qquad (I9б)$$

$$\times\hat{U}(\sigma,\theta_L,\theta_R,\tau)\left[{}_{\cdot}SP''\exp\left\{-i\frac{4\pi}{N}\int_{\sigma_2,\theta_2}^{\sigma,\theta_R}(d\sigma'd\theta')_R\,\Phi_R(\sigma',\theta',\tau)\right\}\right];$$

$$\tilde{U}^+\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{U}^+ = 1,$$

где $\hat{U}(\sigma,\theta_L,\theta_R,\tau) = U - i\theta_L\psi_L U + i\theta_R U\psi_R - \theta_L\theta_R\psi_L U\psi_R$, а определение выражений, заключенных в прямые скобки, можно найти ниже в формулах (24) и (27).

Решение общей задачи Коши будет теперь в терминах переменной (I9б) представляться простой формулой

$$\tilde{U}(\sigma_1,\theta_1,\sigma_2,\theta_2,\tau) = \tilde{U}(\Sigma_L(\sigma_1,\theta_1,\tau),\Theta_L(\sigma_1,\theta_1,\tau),\Sigma_R(\sigma_2,\theta_2,\tau),\Theta_R(\sigma_2,\theta_2,\tau),0). \qquad (I9в)$$

Из этого же решения, выбирая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и $\theta_1 = \theta_L$, $\theta_2 = \theta_R$, получаем

$$\hat{U}(\sigma,\theta_L,\theta_R,\tau) = \left[{}_{\cdot}SP'\exp\left\{i\frac{4\pi}{N}\int_{\sigma,\theta_L}^{\Sigma_L,\Theta_L}(d\sigma'd\theta')_L\,\Phi_L(\sigma',\theta',0)\right\}\right]\times \qquad (I9г)$$

$$\times\hat{U}(\sigma,\theta_L,\theta_R,0)\left[{}_{''}SP'\exp\left\{-i\frac{4\pi}{N}\int_{\Sigma_R,\Theta_R}^{\sigma,\theta_R}(d\sigma'd\theta')_R\,\Phi_R(\sigma',\theta',0)\right\}\right].$$

Из решения (I9в), применяя ковариантное дифференцирование $\hat{D}_\alpha$, также легко получить формулу (I9а).

3. <u>Вспомогательная спектральная задача в теории фермионной струны</u>

Уравнение (8) можно записать в виде условия совместности двух линейных вспомогательных уравнений (представление Лакса). Действительно, пользуясь соотношением (I0в), легко проверить, что равенство

$$[L, M] = \left[\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha, \frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda X_\alpha\right] = 0 \qquad (20)$$

эквивалентно уравнению (8). В равенстве (20) введены: спектральный параметр λ и суперфункция X_α, которая имеет вид

$$X_\alpha = \left(\hat{T}_\alpha(f_\alpha) + \hat{F}_\alpha(\eta_\alpha)\right)\int^{\sigma,\theta}(d\sigma'd\theta')_\alpha\,\Phi_\alpha(\sigma',\theta') + i\frac{2\lambda}{a_\alpha}\left(\frac{1}{2}f_\alpha - i\theta\eta_\alpha\right)\Phi_\alpha^2, \qquad (21)$$

где линейный оператор $\int(d\sigma'd\theta')_\alpha$ определяется следующим образом:

$$\hat{D}_\alpha\left\{\int^{\sigma,\theta}(d\sigma'd\theta')_\alpha A(\sigma',\theta')\right\} = A(\sigma,\theta) - A_0(\sigma) + \theta A_1(\sigma), \qquad (22)$$

$$\int^{\sigma,\theta}(d\sigma'd\theta')_\alpha A(\sigma',\theta') = \frac{1}{a_\alpha}\theta A_0(\sigma) + \frac{1}{i}\int^{\sigma}d\sigma' A_1(\sigma'). \qquad (23)$$

Для дальнейшего удобно также ввести оператор ("определенный интеграл")

$$\int_{\sigma_1,\theta_1}^{\sigma_2,\theta_2}(d\sigma d\theta)_\alpha A = \int^{\sigma_2,\theta_2}(d\sigma d\theta)_\alpha A - \int^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma d\theta)_\alpha A. \qquad (24)$$

Со стороны довольно странным выглядит переписывание линейного уравнения (8) в виде представления (20). Однако напомним, что из-за наличия связей (3) мы имеем дело с существенно нелинейной системой. За возможность написания динамических уравнений в линейном виде (8) мы заплатили введением произвольных функций – множителей Лагранжа. Замечательным фактом является то, что вся зависимость от этих функций содержится в представлении (20) только в M– операторе, а L – оператор от них не зависит.

Вспомогательная спектральная задача, которая диктуется представлением (20) и связана именно с L – оператором, имеет вид

$$L\Psi = [\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha]\,\Psi(\sigma,\theta,\lambda) = 0. \tag{25}$$

Для решений этого уравнения можно построить оператор $T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\lambda)$, называемый оператором трансляций, такой, что

$$\Psi(\sigma',\theta',\lambda) = T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\lambda)\,\Psi(\sigma,\theta,\lambda). \tag{26}$$

Оператор $T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\lambda)$ представим в виде формального ряда

$$T^{\sigma',\theta'}_{\sigma,\theta}(\lambda) = 1 + \lambda\int_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1) + \lambda^2\int_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\times$$

$$\times\int_{\sigma,\theta}^{\sigma_1,\theta_1}(d\sigma_2 d\theta_2)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_2,\theta_2) + \lambda^3\ldots = SP\exp\Big\{\lambda\int_{\sigma,\theta}^{\sigma',\theta'}(d\sigma_1 d\theta_1)_\alpha\Phi_\alpha(\sigma_1,\theta_1)\Big\} = \tag{27}$$

$$= \exp\Big(\lambda\frac{\theta'}{a_\alpha}\psi_\alpha(\sigma')\Big)P\exp\Big\{i\lambda\int_\sigma^{\sigma'}d\sigma_1\Big(\frac{\lambda}{a_\alpha}\psi_\alpha^2(\sigma_1) - q_\alpha(\sigma_1)\Big)\Big\}\exp\Big(-\frac{\lambda}{a_\alpha}\theta\psi_\alpha(\sigma)\Big).$$

Из определения (26) следует, что оператор трансляции на период $T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\lambda)$ коммутирует с L -оператором,

$$[\hat{D}_\alpha - \lambda\Phi_\alpha,\, T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\lambda)] = 0. \tag{28}$$

Отсюда и из соотношения (20) следует, что величина $T_\alpha(\lambda) = \mathrm{Tr}\{T^{\sigma+2\pi,\theta}_{\sigma,\theta}(\lambda)\}$ не зависит от σ и θ и сохраняется во времени (τ). Более того, используя соотношение (9) и технику работы /11/, можно показать, что

$$\{T_\alpha(\lambda), T_\alpha(\mu)\} = 0 \quad (\forall\lambda,\mu). \tag{29}$$

Таким образом, $T_\alpha(\lambda)$ есть производящий функционал инволютивных интегралов движения. Отметим, что эти интегралы движения являются четными элементами алгебры Γ.

Нелокальные законы сохранения получаются при разложении $T_\alpha(\lambda)$ в ряд Тейлора в точке λ =0. При этом удобно пользоваться формальным разложением (27). Локальные законы сохранения можно получить, если

искать разложение функционала $T_\alpha(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$. Оказывается, что такое разложение существенно зависит от конкретного выбора группы G. Метод получения локальных законов сохранения для простейшего случая, когда в качестве группы G выбрана группа $SU(2)$, рассмотрен в работе /16/.

4. Вершинные функционалы в теории фермионной струны

Как уже указывалось во введении, в дуальных моделях имеется тесная связь между операторами физических частиц (эти операторы коммутируют со связями) и вершинными операторами. Естественно воспользоваться такой связью и в нашем случае, сводя тем самым проблему о построении вершинных операторов к проблеме конструирования операторов физических частиц. Построение основывается на методе коллективных координат (МКК), обобщенном на случай произвольной группы Ли канонических преобразований /17/. Напомним, что впервые коллективные координаты были введены Н.Н. Боголюбовым /18/ для корректного квантования поля около классической составляющей. Не будем здесь подробно описывать МКК и его применение к теориям струн, отсылая интересующихся к исчерпывающему обзору /19/. При построении, в основном, будем действовать в духе работы /20/. Определим сначала, что мы называем вершинными функциями. Вершинные функционалы – это функционалы от канонических переменных ψ_L^a, ψ_R^a, A^a и B^a, имеющие, во-первых, скобки Пуассона со связями (3), равные нулю в сильном смысле (таким образом, они являются интегралами движения) и, во-вторых, выбором параметра σ на струне они сводятся к каноническим переменным ψ_L^a, ψ_R^a, A^a и B^a, и таким образом содержат полную информацию о системе.

Первое требование приводит к тому, что необходимо строить функционалы, которые инвариантны относительно преобразований (сравните с формулой (19))

$$\Phi^a_\alpha(\sigma,\theta) \longmapsto \frac{1}{a_\alpha}(\hat{D}_\alpha\Theta_\alpha)\,\Phi^a_\alpha(\Sigma_\alpha,\Theta_\alpha), \tag{30}$$

где $\Theta_\alpha(\sigma,\theta)$ и $\Sigma_\alpha(\sigma,\theta)$ – суперполя, представимые в виде (14). Согласно МКК (см., например, работу /20/), для построения искомых функционалов необходимо выбрать условие на суперполе Φ^a_α, такое, чтобы оно однозначно фиксировало параметры $\Sigma_\alpha = \Sigma^0_\alpha$, $\Theta_\alpha = \Theta^0_\alpha$ преобразования (30). Тогда суперполе $(\hat{D}_\alpha\Theta^0_\alpha)\,\Phi^a_\alpha(\Sigma^0_\alpha,\Theta^0_\alpha)$ и будет определять нужные нам вершинные функционалы $A^a_\alpha(n)$ и $\Sigma^a_\alpha(n)$ (соответственно четный и нечетный элементы алгебры Γ) с помощью "суперпреобразования" Фурье

$$A^a_\alpha(n) + \nu\Sigma^a_\alpha(n) = i\int_{\sigma,\theta'}^{\sigma+2\pi,\theta'}(d\sigma d\theta)_\alpha\Phi^a_\alpha(\sigma,\theta)\exp\big(in(\Sigma^{-1})^0_\alpha + \nu(\Theta^{-1})^0_\alpha\big). \tag{31}$$

Здесь ν – нечетный элемент алгебры Грассмана Γ, а $(\Sigma^{-1})^{o}_{\alpha}$ и $(\Theta^{-1})^{o}_{\alpha}$ – суперфункции, обратные к суперфункциям Σ^{o}_{α} и Θ^{o}_{α}.

В качестве условия, фиксирующего параметры Σ_{α} и Θ_{α}, выберем, по аналогии с теорией обычной струны, следующее соотношение

$$Q(\sigma,\theta) = i\int\limits_{0,0}^{\sigma,\theta}(d\sigma' d\theta')_{\alpha}\{k^a \phi_{\alpha a}(\sigma',\theta')\} + C = k_a q^a_{\alpha}\frac{\sigma}{2\pi}. \tag{32}$$

Здесь k^a – вектор, определяющий элемент $(k^a T_a)$ алгебры Ли группы G, такой, что $k_a \bar{q}^a_{\alpha} \neq 0$, а $\int^{\sigma} d\sigma' \int d\theta \{\phi^a_{\alpha}(\sigma',\theta) k_a\}$ – монотонно возрастающая функция; C – константа, не зависящая от σ и θ, символы $\bar{q}^a_{\alpha}$ приняты для обозначения генераторов группы $G_L \otimes G_R$,

$$\bar{q}^a_L = -\frac{1}{2}\int d\sigma (B^a + i t^{abc}\psi_{Lb}\psi_{Lc}),\quad \bar{q}^a_R = \frac{1}{2}\int d\sigma (A^a - i t^{abc}\psi_{Rb}\psi_{Rc}). \tag{33}$$

Из условия (32) получаем следующее уравнение на параметры Σ_o и Θ_o преобразования (30):

$$Q(\Sigma^{o}_{\alpha}(\sigma,\theta), \Theta^{o}_{\alpha}(\sigma,\theta)) = k_a \bar{q}^a_{\alpha}\frac{\sigma}{2\pi}. \tag{34}$$

При выводе этого уравнения мы опять же по аналогии с теорией открытой фермионной струны положили $\Sigma^{o}_{\alpha}(0,0) = \Theta^{o}_{\alpha}(0,0) = 0$.

Из уравнения (34) и условий (I5) сразу же получаем явный вид суперфункций $(\Sigma^{-1})^{o}_{\alpha}$ и $(\Theta^{-1})^{o}_{\alpha}$ (обратных к суперфункциям Σ^{o}_{α} и Θ^{o}_{α}), необходимых для явного построения функционалов $A^a_{\alpha}(n)$ и $\Sigma^a_{\alpha}(n)$,

$$(\Sigma^{-1})^{o}_{\alpha} = 2\pi(k_a \bar{q}^a_{\alpha})^{-1} Q(\sigma,\theta),\quad i(\Theta^{-1})^{o}_{\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi}{(k\bar{q}_{\alpha})}}\,\frac{\hat{D}_{\alpha} Q}{\sqrt{Q'}}. \tag{35}$$

Подставляя решения (35) в формулу (3I), получаем искомые выражения для вершинных функционалов,

$$A^a_{\alpha}(n) = \int d\sigma \left(q^a_{\alpha} + \left(\frac{\psi^a_{\alpha} Q_1}{Q_0'}\right)'\right) \exp\{in2\pi(k\bar{q}_{\alpha})^{-1} Q_0\},$$

$$\Sigma^a_{\alpha}(n) = \int d\sigma \sqrt{\frac{2\pi}{(k\bar{q}_{\alpha})}} \left\{-\psi^a_{\alpha}\left((Q_0')^{1/2} + \frac{i a_{\alpha}}{2} Q_1' Q_1 (Q_0')^{-3/2}\right) - \right. \tag{36}$$

$$\left. - i a_{\alpha} q^a_{\alpha} Q_1 (Q_0')^{-1/2}\right\} \times \exp\{in2\pi(k\bar{q}_{\alpha})^{-1} Q_0\},$$

где $\quad \Phi^a_{\alpha} = \psi^a_{\alpha} + \theta q^a_{\alpha},\quad Q = Q_0 + \theta Q_1.$

5. Элементы квантовой теории фермионной струны, "живущей" в пространствах групп Ли

Квантовую теорию будем строить согласно правилу $[\hat{A},\hat{B}] = -i\{A,B\}$, выражающему коммутатор двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ через

скобки Пуассона соответствующих канонических переменных. Тогда скобки Пуассона (2) приведут к следующим коммутаторам:

$$[\bar{J}^a_n, \bar{J}^b_m] = t^{ab}{}_c \bar{J}^c_{n+m} - \frac{N}{2} n \eta^{ab}\delta_{n+m,0};\quad [\bar{\Psi}^a_n, \bar{\Psi}^b_m]_+ = \eta^{ab}\delta_{n+m,0};$$

$$[J^a_n, J^b_m] = t^{ab}{}_c J^c_{n+m} + \frac{N}{2} n \eta^{ab}\delta_{n+m,0};\quad [\psi^a_n, \psi^b_m]_+ = \eta^{ab}\delta_{n+m,0}; \tag{37}$$

остальные коммутаторы равны нулю. Операторы из соотношений (37) определяются как фурье-компоненты канонических переменных

$$B^a(\sigma) = -\frac{2i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma} J^a_n,\quad A^a(\sigma) = \frac{2i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma}\bar{J}^a_n,$$

$$\psi^a_L(\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma}\psi^a_n,\quad \psi^a_R(\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\sigma}\bar{\Psi}^a_n. \tag{38}$$

Из равенств (37) ясно, что возможно непротиворечивое определение вакуумного вектора $|0\rangle$, такого, что $\langle 0|0\rangle = 1$,

$$J^a_n|0\rangle = \psi^a_n|0\rangle = 0,\quad \text{когда } n<0; \tag{39}$$

$$\bar{J}^a_n|0\rangle = \bar{\Psi}^a_n|0\rangle = 0,\quad \text{когда } n>0. \tag{40}$$

Введем теперь в рассмотрение квантовые аналоги функций связей (3)

$$F_{\substack{R\\L}}(\sigma) = \pm\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\sum_n e^{in\sigma} F^n_{\substack{R\\L}},\quad T_{\substack{R\\L}}(\sigma) = \pm\frac{(N+c_V)}{\pi^2}\sum_n e^{in\sigma} T^n_{\substack{R\\L}}, \tag{4I}$$

где

$$F^n_R = \sum_m \bar{J}^a_{n-m}\bar{\Psi}_{ma} - \frac{1}{6} t_{abc}\sum_{me} :\bar{\Psi}^a_{n-m-e}\bar{\Psi}^b_m \bar{\Psi}^c_e:, \tag{42а}$$

$$F^n_L = \sum_m J^a_{n-m}\psi_{ma} - \frac{1}{6} t_{abc}\sum_{me} :\psi^a_{n-m-e}\psi^b_m \psi^c_e:; \tag{42б}$$

$$-(N+c_V)T^n_R = \sum_m :\bar{J}^a_{n-m}\bar{J}_{ma}: - \frac{(N+c_V)}{2}\sum_m m:\bar{\Psi}^a_{n-m}\bar{\Psi}_{ma}:, \tag{42в}$$

$$(N+c_V)T^n_L = \sum_m :J^a_{n-m}J_{ma}: + \frac{(N+c_V)}{2}\sum_m m:\psi^a_{n-m}\psi_{ma}:. \tag{42г}$$

Отметим, что операторы $T_R(\sigma)$ и $T_L(\sigma)$ отличаются от связей (3б) и (3г) не только нормальным упорядочением, но и заменой (конечной перенормировкой) параметра N на $N+c_V$. Такая замена однозначно диктуется требованием, чтобы операторы (42) образовали супералгебру Невье-Шварца-Рамона:

$$\mp\frac{1}{(N+c_V)}[F^n_{\substack{R\\L}}, F^m_{\substack{R\\L}}]_+ = T^{n+m}_{\substack{R\\L}} \pm \left(\frac{c}{4}n^2 + \frac{c_0}{24}\right)\delta_{n+m,0}, \tag{43}$$

$$[T^m_{\substack{R\\L}}, F^n_{\substack{R\\L}}]_- = \left(\frac{m}{2} - n\right) F^{m+n}_{\substack{R\\L}},$$

$$[T^n_{\substack{R\\L}}, T^m_{\substack{R\\L}}]_- = (n-m) T^{n+m}_{\substack{R\\L}} \pm \left(\frac{c}{8} n^3 + \frac{c_0}{12} n\right) \delta_{n+m,0} .$$

Здесь

$$c = \frac{N + c_V/3}{N + c_V} D , \quad c_0 = \frac{c_V D}{c_V + N} . \qquad (44)$$

Квантовые аналоги суперполей (7) естественно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \Phi^a_L \\ \Phi^a_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^a_L(\sigma) - \frac{1}{2}\theta_L \left(B^a(\sigma) + i t^{abd} : \psi_{Lb}(\sigma)\psi_{Ld}(\sigma):\right) \\ \psi^a_R(\sigma) + \frac{1}{2}\theta_R \left(A^a(\sigma) - i t^{abd} : \psi_{Rb}(\sigma)\psi_{Rd}(\sigma):\right) \end{pmatrix} . \qquad (45)$$

Оператор Гамильтониана H является в нашем случае линейной комбинацией операторов (4I) и равняется

$$H = \int d\sigma \Big(-\frac{\pi}{2(N+c_V)} f_R(\sigma) T_R(\sigma) + \frac{4\pi}{(N+c_V)} i \eta_R(\sigma) F_R(\sigma) +$$
$$+ \frac{\pi}{2(N+c_V)} f_L(\sigma) T_L(\sigma) + \frac{4\pi}{(N+c_V)} i \eta_L(\sigma) F_L(\sigma) \Big) . \qquad (46)$$

Определяя квантовую эволюцию динамических переменных A согласно правилу $\dot{A} = i[H, A]$, мы получим следующие уравнения на квантовые суперполя (45)

$$\dot{\Phi}_\alpha(\sigma,\theta,\tau) = \left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\theta f'_\alpha + \frac{\partial}{\partial\sigma} f_\alpha \right) - \left(-a_\alpha \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial\sigma} \right) \eta_\alpha \right] \Phi_\alpha(\sigma,\theta,\tau), \qquad (47)$$

где индекс α принимает два значения L и R, $a_L = -\frac{4\pi}{(N+c_V)}$, $a_R = \frac{4\pi}{(N+c_V)}$. Явный вид уравнения (47) с точностью до замены констант совпадает с видом уравнений (8) для классических суперполей. Таким образом, эволюция квантового суперполя (45), так же, как и классического суперполя (8), сводится к суперперепараметризации $\sigma \mapsto \Sigma(\sigma,\theta)$, $\theta \mapsto \Theta(\sigma,\theta)$. Уравнение (47) показывает, что все результаты предыдущего пункта, связанные с построением классических аналогов операторов физических частиц, автоматически (необходимо, правда, считать, что $\eta^{ab} k_a k_b = 0$) переносятся и на квантовый случай. Это позволяет построить операторы типа вершинных операторов, описывающих испускание безмассовых частиц и обладающих нулевыми коммутационными соотношениями с операторами связей (4I). Для того чтобы доказать, что эти операторы действительно являются вершинными операторами и описывают испускание возбужденных безмассовых частиц, необходимо научиться коммутировать их друг с другом при разных значениях векторов k_a. Для этого необходимо выяснить: образующими какой алгебры они являются? Это непростой вопрос, который в настоящий момент автором до конца не прояснен. Имеется, правда, надежда,

что искомая алгебра будет алгеброй типа алгебры Замолодчикова – Фаддеева /2I/. Отметим здесь попытки других авторов построить дуальные амплитуды в аналогичном операторном формализме, предпринятые в работах /4,7/.

6. Заключение

Кратко резюмируем основные результаты, изложенные в данной статье.

Построено суперсимметричное действие (I), в которое включено слагаемое Весса-Зумино и которое описывает динамику главного кирального поля в искривленном двумерном пространстве-времени.

Предполагается, что это действие можно использовать для описания динамики фермионной струны в пространствах групп Ли. В рамках этого предположения изучаются гамильтоновы уравнения движения, вытекающие из действия (I), которые могут быть компактно записаны на суперполевом языке. Для этих уравнений получено решение задачи Коши и построено бесконечное число первых интегралов движения в инволюции. С использованием метода коллективных координат построены классические аналоги операторов физических частиц, что, в принципе, открывает возможность для получения дуальных амплитуд рассеяния, связанных с изучаемой теорией струны. Приведены основные формулы квантового описания рассматриваемой системы.

Автор благодарен Ал.Б. Замолодчикову и Е.А. Иванову за постоянный интерес к работе и стимулирующие обсуждения. Автор особенно благодарен Е.А. Иванову за ряд ценных критических замечаний.

Литература

1. Di Vecchia, P., Knizhnik V.G., Petersen J.L., Rossi P.- Nucl.Phys., 1985, B253, N 3,4, 701.
   Волович И.В. ТМФ, I985, 63, №2, с.3I2.
   Abdalla E., Abdalla M.C.B. Phys.Lett., 1985, 152B, N 1, 59-62.
   Goddard P., Nahm W., Olive D. Phys.Lett., 1985, 160B, N 1,2,3,111.
2. Curtright T., Zachos C. Phys.Rev.Lett., 1984, 53, N 19, 1799.
   Rohm R. Anomalous interactions for the supersymmetric nonlinear sigma-model in two dimensions. Princeton preprint, 1984.
3. Nemeschansky D., Yankielowicz S. Phys.Rev.Lett., 1985, 54, p.620.
4. Altschuler D., Nilles H.P. Phys.Lett., 1985, B154, N2,3, p.135.
5. Isaev A.P. Bosonic and fermionic string models in the space of Lie groups. JINR Communication, E2-85-82, Dubna, 1985.

6. Kao V.G. Lecture Notes in Physics, 1979, 94, p.441.
7. Bershadsky M.A., Knizhnik V.G., Teitelman M.G. Phys.Lett., 1985, 151B, N 1, p.34.
8. Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B. Nucl. Phys., 1984, B247, N 1, p.83
Friedan D., Qui Z., Shenker S. Phys.Lett., 1985, 151B, N 1, p.37.
Eichenhern H. Phys.Lett., 1985, 151B, N 1, p.26.
Todorov I.T. Phys.Lett., 1985, 153B, N 1, p.77.
Goddard P., Olive D. Nucl. Phys., 1985, B257 FS14, N 2, p.226.
Goddard P., Kent A., Olive D. Phys.Lett., 1985, 152B, N 1, p.88.
9. Mandelstam S. Phys.Rep., 1974, 13C, N 6, p.259.
10. Исаев А.П. Письма в ЖЭТФ, 1981, т.33, вып.7, с.357.
Borodulin V.I., Isaev A.P. Phys.Lett., 1982, 117B, N 1,2, p.69.
11. Кулиш П.П., Цыпляев С.А. ТМФ, 1981, 46, №2, с.172.
Кулиш П.П., Цыпляев С.А. Зап.научного сем.ЛОМИ,"Наука",Л.1982,120, с.122.
12. Witten E. Commun.Math.Phys., 1984, 92, p.455.
13. Polyakov A.M. Phys.Lett., 1981, 103B, N 3, p.207, p.211.
14. Collins P.A., Tucker R.W. Nucl. Phys., 1977, B121, N 2, p.307.
15. Ivanov E.A., S.O. Krivonos. Lett. Math. Phys., 1983, 7, 523.
16. Исаев А.П. Вспомогательная спектральная задача в теории фермионной струны. Препринт ОИЯИ Р2-86-16, Дубна; 1985.
17. Разумов А.В., Таранов Г.А. Коллективные координаты на симплектических многообразиях. Препринт ИФВЭ 81-49, Серпухов:ИФВЭ, 1981.
18. Боголюбов Н.Н. УМЖ, 1950, 2, №2, с.3.
19. Pron'ko G.P., Razumov A.V., Soloviev L.D. Some new results in classical theory of relativistic string. Preprint IHEP 82-106, Serpukhov, 1982.
20. Исаев А.П. ТМФ, 1983, 54, №2, с.209.
21. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B. Ann.of Phys., 1979, 120, p.253.
Фаддеев Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. Дубна, Р2-12462, 1979, с.249.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1985 года.

Исаев А.П. Р2-85-942
Модель фермионной структуры в пространствах групп Ли

Рассматривается теория струны (с фермионными степенями свободы), которая эволюционирует в искривленном пространстве времени (в пространстве группы Ли). Цель работы - изучение динамики фермионных струн в некомпактных простых группах Ли. Изучение ведется методами теории поля. В работе получено общее решение задачи Коши и построен бесконечный набор интегралов движения в инволюции. Методом коллективных координат конструируются классические аналоги операторов физических частиц, что в принципе открывает возможность построения в рассматриваемой теории дуальных амплитуд рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод автора

Isaev A.P. P2-85-942
Fermionic String Model in Lie Group Spaces

Theory of string (with fermionic degrees of freedom) moving in a curved space-time (in Lie group space) is discussed. Dynamics of fermionic string in the noncompact simple group Lie spaces is studied using field theory methods. The general solution of Cauchi problem is obtained, and a complete set of integrals of motion is constructed. The classical analogues of physical particles operators are obtained by the collective coordinate method. It enables one to construct dual resonance amplitudes in the theory considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985