объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-725

К.В.Рерих

О НОВОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЧУ-ЛОУ

Направлено на XIX Международный симпозиум
по теории элементарных частиц
/Аренсхооп, ГДР, 1985/

1985

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно[1], широкий класс уравнений Чу-Лоу и им подобных, отличающихся от последних по существу только матрицей кроссинг-симметрии, допускает формулировку их в виде следующей системы нелинейных разностных уравнений[1,3]:

$$S_i(w)\cdot S_i(1-w)=1$$
$$S_i(w+1)=1/\sum_j A_{ij}S_j(w). \qquad /1/$$

Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S-матрицы в состояниях i, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии $n\times n$ со свойствами $A^2=E$, $\sum_j A_{ij}=1$. Решения системы /1/ должны быть мероморфными действительными функциями униформизующей переменной $w=\frac{1}{\pi}\arcsin\omega$, где ω - энергия пиона в лабораторной системе, и удовлетворять некоторым локальным условиям требуемого порогового поведения и поведения в борновском полюсе.

Ввиду отсутствия общих методов решения нелинейных разностных уравнений система /1/ представляет собой привлекательную, но весьма трудную нелинейную задачу, решение которой, как и любой нелинейной системы, представляет самостоятельный интерес. Этой проблеме посвящены многолетние исследования ряда авторов[1,3–14], направленные на поиск частных решений и построение общего решения системы уравнений /1/, которое в явном виде известно только для случая матрицы $A(2\times 2)$[4,6].

Отношения $x_i(w)=S_i(w)/S_n(w)$ для известных частных решений /1/ / $n=3$/ являются рациональными функциями w[1,5], либо рациональными функциями e^{aw}[7], где a – const. Эти решения всегда могут быть усложнены за счет известного β-D произвола путем замены $S_i(w)\to S_i(w+\beta(w))\cdot D(w)$, где $\beta(w)$ и $D(w)$ имеют свойства

$$\beta(-w)=-\beta(w),\quad \beta(w+1)=\beta(w),\quad D(-w)=D(w),\quad D(1-w)\,D(w)=1.$$

Чрезвычайная трудность получения общего решения системы /1/ уже для $n=3$ и матрицы $A^{\text{Chew-Low}}$ прояснилась из[8], где было показано, что никаким преобразованием Кремона[15] конечного порядка среди искомых функций $x_i(w)$ нельзя трансформировать систему /1/ к полусепарабельному виду, когда хотя бы для одного i

уравнение из системы /1/ приняло бы вид

$$x_i(w+1)=\frac{a\,x_i(w)+\beta}{\gamma x_i(w)+\delta}\quad .$$

В принципе эта трудность разрешена в развитом в[12,13] подходе к проблеме построения общего решения уравнений Чу-Лоу /1/, использующем аппарат теории преобразований Кремона[15].

В рамках этого подхода было получено общее функциональное уравнение на инвариантные формы двух переменных x_i, отношение которых при возведении их в подходящие степени дает первый интеграл системы /1/ с матрицей $A^{\text{Chew-Low}}$ - четную антипериодическую функцию $C(w)$, локальная зависимость от которой общего решения этих уравнений была установлена ранее в[10] на основе другого подхода[9]. Предложенный в[13] алгоритм построения общего решения уравнений Чу-Лоу, удовлетворяющего требуемому поведению в борновском полюсе, позволяет получить его рекуррентно в виде ряда по степеням $C(w)$, хотя и оставляет вопрос о получении общего решения в явном виде открытым.

Решение этого вопроса было бы проще, если бы удалось придать исходным уравнениям /1/ максимально простой вид. В методическом отношении представляет интерес исследовать в этом направлении систему уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$

$$A(1,1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}, \qquad /2/$$

которая исследовалась ранее в[1,7] и затем в рамках двух указанных выше подходов[11,14], в которых была найдена структура первого интеграла $C(w)$ с такими же свойствами. В настоящей работе, благодаря найденным квадратичным преобразованиям Кремона искомых функций, исходным уравнениям придан весьма простой вид. Получены новые частные решения исходной системы уравнений, а также новый первый интеграл $\gamma(w)$ - четная периодическая функция w. Установлена связь этих частных решений с найденным первым интегралом и структура соответствующего общего решения.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРЕМОНА И НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать систему уравнений /1/ с матрицей $A(1,1)$ из /2/ в форме, предложенной в[11]:

$$x' = F_1(x,y)/D(x,y), \qquad F_1(x,y) = x + 3x^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{5}{4}y^2$$

$$y' = F_2(x,y)/D(x,y), \qquad F_2(x,y) = -y + 2x^2 + 2xy - \frac{5}{4}y^2 \qquad /3.1/$$

$$x' = x(w+1),\ y' = y(w+1), \quad D(x,y) = 1 + 4x + \frac{13}{4}y + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{4}y^2$$

$$x(-w) = -x(w), \quad y(-w) = y(w), \qquad /3.2/$$

$$t' \cdot t = (1 - \frac{5}{4}y + 2x)(1 - \frac{5}{4}y' - 2x'), \quad t' = t(w+1), \quad t(-w) = t(w). \qquad /4/$$

Связь $S_i(w)$ в /1/ с функциями $x(w)$, $y(w)$ и $t(w)$ из /3/ и /4/ дается формулой

$$S_i(w) = (\xi_i + \eta_i \cdot y(w) + \mu_i x(w))/t(w), \qquad /5/$$

где ξ, η, μ - собственные векторы матрицы A из /2/:

$$A(\xi, \eta) = (\xi, \eta), \quad A\mu = -\mu,$$

$$\xi = (1, 1, 1), \quad \eta = (\frac{15}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}), \quad \mu = (-4, -2, 2). \qquad /6/$$

Поскольку функция $t(w)$ из /4/ не входит в систему /3/, то целесообразно рассматривать уравнение /4/ для $t(w)$ при найденном полностью решении системы /3/. Поэтому ниже мы будем рассматривать только систему /3/.

Как известно [14] уравнения /3.1/, рассматриваемые как преобразования плоскости x, y, являются преобразованиями Кремона [15]. Они оставляют инвариантными 3 алгебраические кривые: $y - x^2 = 0$, $y^2 - 4x^2 = 0$, $y - 4 = 0$, из которых последняя проходит через неподвижные точки преобразования /3.1/ $x = \pm 2\sqrt{5}$, $y = 4$, а две первые - через неподвижную точку $x = y = 0$. Используя трансформационные свойства форм, определяющих эти кривые [14], легко получить, что следующее квадратичное преобразование Кремона

$$u(w) = \frac{x(y-4)}{y^2 - 4x^2}, \qquad x = \frac{4u}{v + 4u^2 - v^2}$$

$$v(w) = \frac{y(y-4)}{y^2 - 4x^2}, \qquad y = \frac{4v}{v + 4u^2 - v^2} \qquad /7/$$

приводит уравнения /3.1/ для новых функций $u(w)$ и $v(w)$ к более простому виду

$$u' = \frac{6u + 5v + u(2u + v)}{4 + 2u + v}, \quad v' = \frac{4u + 6v - v(2u + v)}{4 + 2u + v}. \qquad /8/$$

Как следует из /3.2/ и /7/, свойства четности сохраняются: $u(-w) = -u(w)$, $v(-w) = v(w)$. Линейная часть по u и v преобразований /8/ недиагональна. Диагонализация /8/ достигается следующим преобразованием от функций u и v к $u_1(w)$ и $u_2(w)$:

$$u_1(w) = \frac{1}{2(\lambda+1)}\left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}v + u\right), \qquad u = (\lambda+1)(u_1 - u_2)$$

$$u_2(w) = \frac{1}{2(\lambda+1)}\left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}v - u\right), \qquad v = 2(\lambda - 1)(u_1 + u_2), \qquad /9/$$

где число $\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ есть корень уравнения $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Исходные уравнения /3.1/ для $u_1(w)$ и $u_2(w)$ принимают предельно простой вид:

$$u_1' = \frac{\lambda u_1 - u_2(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2}, \quad u_2' = \frac{\lambda^{-1}u_2 - u_1(\lambda u_1 - u_2)}{1 + \lambda u_1 - u_2}. \qquad /10/$$

Как следует из свойств четности $u(w)$ и $v(w)$,

$$u_2(w) = u_1(-w). \qquad /11/$$

Отметим, что преобразования /7/, /9/ отображают инвариантную прямую $y - 4 = 0$ /а следовательно, и две неподвижные точки на ней/ в точку $u_1 = u_2 = 0$, кривую $y^2 - 4x^2 = 0$ - в бесконечно удаленную точку, а параболу $y - x^2 = 0$ - в прямую $u_1 + u_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

3. НОВЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Система уравнений /10/ представляет собой частный случай системы нелинейных разностных уравнений, исследованной в [16]. Согласно результатам [16] /см. замечание [16] на стр.74/, можно утверждать, что система /10/ имеет два решения вида

$$u_i^{I}(w) = P_i^{I}(z_1(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k}^{I} z_1^k, \qquad /12.1/$$

$$u_i^{II}(w) = P_i^{II}(z_2(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k}^{II} z_2^k, \qquad /12.2/$$

где функции $P_i^{I,II}(z)$ являются голоморфными в области $|z| < R(\lambda)$, а $z_1(w)$ и $z_2(w)$ являются решениями уравнений

$$z_1(w+1) = \lambda z(w), \qquad /13.1/$$

$$z_2(w+1) = \lambda^{-1} z_2(w) \qquad /13.2/$$

и имеют вид

$$z_1 = \exp((\ln\lambda)\cdot w + \beta(w)), \qquad z_2 = \exp(-(\ln\lambda) w - \beta(w)). \qquad /14/$$

Комбинируя первое уравнение /10/ со вторым, можно получить линейное соотношение

$$u_1' - \lambda u_2' = \lambda u_1 - u_2. \qquad /15/$$

Подставляя /12.1/ в /15/ и в первое уравнение /10/ с учетом /13.1/, получим коэффициенты $P^I_{i,k}$:

$$p^I_{1,k} = (-1)^{k-1} \frac{a_k}{(\sqrt{\lambda})^{k+1}}, \qquad p^I_{2,k} = \frac{\lambda(\lambda^{k-1}-1)}{\lambda^{k+1}-1} p^I_{1,k}, \qquad /16/$$

где a_k определяются рекуррентным соотношением

$$a_k = \frac{(\lambda-1)(\lambda^2-1)(\lambda^k-1)}{(\lambda^{k-1}-1)} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{a_m a_{k-m} \lambda^{m-1}}{(\lambda^{k-m+1}-1)(\lambda^{m+1}-1)}. \qquad /17/$$

Выбирая $a_1 = 1$, получим, что $a_2 = a_3 = 1$, а для остальных $(k > 3)$ будем иметь

$$a_k > 0, \qquad a_{k+1} < a_k, \qquad a_k \to 0. \qquad /18/$$

Для второго решения /12.2/ получим

$$p^{II}_{1,k} = p^I_{2,k}, \qquad p^{II}_{2,k} = p^I_{1,k}. \qquad /19/$$

Из /13/, /14/ и /19/ следует, что

$$u^{II}_2(w) = u^I_1(-w), \qquad u^{II}_1(w) = u^I_2(-w).$$

Из /16/-/19/ вытекает, что разложения /12.1/ и /12.2/ сходятся абсолютно в области $|z_i| < \sqrt{\lambda}$.

Как нетрудно заметить из /16/, /19/, разложения для функций $P^I_2(z)$ и $P^{II}_1(z)$ начинаются с z^2. Это означает, что /12.1/ и /12.2/ параметрически задают кривые, касающиеся осей $u_2 = 0$ и $u_1 = 0$ соответственно. Если рассматривать /10/ как преобразования плоскости u_1, u_2, то эти кривые будут инвариантны относительно последних. Это находится в полном соответствии с результатом P.Montel /см.[17], с.281/ о кривых, инвариантных относительно класса преобразований, частным случаем которых является /10/. Отметим, что локальное поведение этих инвариантных кривых в окрестности каждой из двух неподвижных точек $x = \pm 2\sqrt{5}$, $y = 4$ исследовалось в [11]. Выше был установлен вид частных решений,

соответствующих этих кривым, а также область сходимости соответствующих рядов. Из вида параметризации /14/ можно сделать предположение, что /12.1/ и /12.2/ являются ветвями одной кривой $F(u_1, u_2) = 0$, первая из которых соответствует достаточно большим отрицательным Rew, а вторая - достаточно большим положительным Rew. Ниже будет показано, что это действительно так.

4. НОВЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ СИСТЕМЫ /10/

Как уже отмечалось, система /10/ может рассматриваться как преобразование Кремона [15]. Оно имеет фундаментальные точки $O_1 = \{-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2}\}$, $O_2 = O_3 = \{c, \lambda c\}_{c\to\infty}$ и соответствующие им основные прямые $j_1 = 1 - \lambda u_1 + u_2 = 0$, $j_2 = j_3 = 1 + \lambda u_1 - u_2 = 0$.

Согласно подходу [14] инвариантная кривая, проходящая через точки $O_2 = O_3$, будет определяться уравнением

$$F(u_1', u_2') = F(u_1, u_2). \qquad /20/$$

Вследствие /11/ и инвариантности $F(u_1(w), u_2(w))$ относительно замены $w \to -w$ функция $F(u_1, u_2)$ должна быть симметричной по переменным u_1, u_2. Из /20/ и /10/ следует, что разложение искомой функции $F(u_1, u_2)$ в окрестности $u_1 = u_2 = 0$ должно начинаться с члена $u_1 u_2$ и имеет вид

$$F(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{m=0}^{E(k/2)} f_{k,m} (\sqrt{\lambda})^{k-2} (u_1^{k-m} u_2^m + u_1^m u_2^{k-m}). \qquad /21/$$

Полагая в /20/ $u_2 = -\lambda u_1$ и используя симметрию $F(u_1, u_2)$ по u_1, u_2, получим $F(\lambda u_1, -u_1) = F(-\lambda u_1, u_1)$. Это означает, что сумма в /21/ по нечетным k обращается в нуль на прямых $u_2 = -\lambda u_1$ и $u_1 = -\lambda u_2$ /ввиду симметрии по u_1, u_2 /. Что касается членов четного порядка в /21/, то можно утверждать, что, поскольку уравнению /20/ будет также удовлетворять функция $\phi(u_1, u_2) = F(u_1, u_2) + cF^k(u_1, u_2)$, где F есть какое-нибудь решение /20/, то коэффициенты при членах вида $(u_1 u_2)^k$, где $k \geq 2$ будут произвольны. Определим их, потребовав, чтобы сумма по четным k в /21/ также обращалась в нуль на прямых $u_2 = -\lambda u_1$ и $u_1 = -\lambda u_2$. Это условие определяет $f_{2k,k}$ через $f_{2k,m}$ $(m = 0,1,\ldots, k-1)$:

$$f_{2k,k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} f_{2k,m} (\lambda^{k-m} + \lambda^{-(k-m)}).$$

Таким образом, искомое решение имеет следующую структуру:

$$F(u_1, u_2) = u_1 u_2 + (u_1 + \lambda u_2)(u_2 + \lambda u_1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{E(k/2)} (\sqrt{\lambda})^{k-2} \tilde{f}_{k,m} (u_1^{k-m} u_2^m + u_1^m u_2^{k-m}), \qquad /21a/$$

где $\bar{f}_{k,m}$ связано с f_{km} из /21/ следующим образом ($k \geq 3$, $m = 0,\ldots, E(\frac{k-2}{2})$):

$$\bar{f}_{k-2,m} = (f_{k,m} - 3\bar{f}_{k-2,m-1} - \bar{f}_{k-2,m-2}) \cdot 2^{-\epsilon}, \quad \epsilon = \delta_{m,E(\frac{k-2}{2})} \cdot (2E(\frac{k}{2}) + 1 - k).$$

Подставляя /21/ в /20/, получим следующее рекуррентное соотношение, определяющее коэффициенты $f_{k,m}$ ($k \geq 3$, $m = 0,\ldots, E(\frac{k-1}{2})$) / $f_{2k,k}$ – в соответствии с условием выше/:

$$f_{k,m} = -a_{k,m}(2,1)\, c_{k,m}(2,1) - \sum_{r=3}^{k-1} \sum_{s=0}^{E(r/2)} f_{r,s}\,[a_{k,m}(r,s) \cdot c_{k,m}(r,s) + a_{k,m}(r, r-s)\, c_{k,m}(r, r-s)]. \qquad /22/$$

Величины $a_{k,m}(r,s)$ и $c_{k,m}(r,s)$ определяются следующими формулами ($c = \ln\sqrt{\lambda}$):

$$a_{k,m}(r,s) = \sum_{p=0}^{r-s} \sum_{q=\max(0,p+s-m)}^{\min(s,k-r-p,p+s-m+k-r)} (-1)^{k-m-r+s-p+q}\, C^{p}_{r-s}\, C^{q}_{s}\, C^{r-1}_{k-1-p-q}\, C^{m-p-s+q}_{k-r}, \qquad /23/$$

$$c_{k,m}(r,s) = \frac{(1+(-1)^{k+r})\,\mathrm{ch}[(k+r-2s-2m)c] + (1-(-1)^{k+r})\,\mathrm{sh}[(k+r-2s-2m)c]}{4\,\mathrm{sh}^2[(k-2m)c]}. \qquad /24/$$

Приведем вычисленные с помощью ЭВМ $\bar{f}_{k,m}$ для $k \leq 4$:

$$\bar{f}_{1,0} = \frac{1}{4}; \quad \bar{f}_{2,0} = \frac{5}{12}, \quad \bar{f}_{2,1} = \frac{3}{8}; \quad \bar{f}_{3,0} = \frac{47}{66}, \quad \bar{f}_{3,1} = \frac{503}{264};$$

$$\bar{f}_{4,0} = \frac{2625}{32 \cdot 66}, \quad \bar{f}_{4,1} = \frac{9373}{32 \cdot 66}, \quad \bar{f}_{4,2} = \frac{13}{4}.$$

Анализ этих расчетов показывает, что имеют место следующие оценки:

$$\bar{f}_{k,m} > 0, \quad \bar{f}_{k,m} < \bar{f}_{k,0}\, C^{m}_{k}, \quad \bar{f}_{k+1,0} < \bar{f}_{k,0} \cdot R, \qquad /25/$$

где $R \simeq 2$. Эти оценки достаточны для того, чтобы функция $F(u_1, u_2)$ /см./21а// была голоморфна в области $|u_1| < \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\,R}$, $|u_2| < \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\,R}$.
Если мы подставим в /21/ с вычисленными коэффициентами $f_{k,m}$ полученные выше частные решения /12.1/ и /12.2/, заданные соотношениями /16/, /17/ и /19/, то получим, что в каждом порядке по $z_1(z_2)$ выполнено $F(u_1(z_i), u_2(z_i)) = 0$. Это означает, что

инвариантные кривые, которым соответствуют частные решения /12.1/ и /12.2/, являются двумя ветвями кривой $F(u_1, u_2) = 0$, пересекающимися под прямым углом в начале координат.

Таким образом, соотношения /21/-/24/ определяют функцию двух переменных $F(u_1, u_2)$ как инвариантную относительно замены $w \to w+1$ и $w \to -w$. Это означает, что $F(u_1, u_2)$ является первым интегралом системы /10/.

$$F(u_1(w), u_2(w)) = \gamma(w), \qquad /26/$$

где функция $\gamma(w)$ имеет следующие свойства:

$$\gamma(w+1) = \gamma(w), \qquad \gamma(-w) = \gamma(w). \qquad /27/$$

5. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Естественно, что общее решение уравнений /10/, зависящее от новой периодической функции $\gamma(w)$, можно представить в виде ряда по степеням $\bar{\gamma}(w) = \sqrt{\gamma(w)}$, где $\bar{\gamma}(w)$ будем считать также удовлетворяющей свойствам /27/:

$$u_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\gamma}^k(w)\, \phi_k(w), \qquad u_2(w) = u_1(-w). \qquad /28/$$

Основываясь на параметризации частных решений, можно думать, что $\phi_k(w)$ будет рационально зависеть только от $z(w) = \exp(\ln\lambda \cdot w)$. Оказывается, что это не совсем так. Подставляя разложения /28/ в /26/ и в /10/ и решая полученные уравнения для $\phi_k(w)$, найдем первые коэффициентные функции:

$$\phi_1(w) = z(w), \qquad \phi_2(w) = -\sqrt{\lambda}\, z^2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{4} z^{-2},$$

$$\phi_3(w) = \lambda z^3 - \frac{85}{96}\lambda z + \frac{\lambda}{3} z^{-3} - \frac{\lambda}{2} z^{-1} - \frac{\sqrt{\lambda}(\lambda+1)}{2}\, w \cdot z. \qquad /29/$$

Начиная с $k = 3$, $\phi_k(w)$ будут содержать структуры вида $w^{\ell} z^m$. Если совершить переход от $u_1(w)$ и $u_2(w)$ к функциям $u(w)$ и $v(w)$, то для последних получим ($c = \ln\lambda$)

$$u(w) = 2(\lambda+1)[\bar{\gamma}(w)\,\mathrm{sh}cw - \frac{3}{4}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}2cw \cdot \bar{\gamma}^2(w) + \lambda\bar{\gamma}^3(w)[\frac{2}{3}\mathrm{sh}3cw - \frac{37}{96}\mathrm{sh}cw - \frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}}\, w\, \mathrm{ch}cw] + \ldots]$$

$$v(w) = 4\sqrt{\lambda}[\bar{\gamma}(w)\,\mathrm{ch}cw - \frac{5}{4}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}2cw\, \bar{\gamma}^2(w) + \lambda\bar{\gamma}^3(w)[\frac{4}{3}\mathrm{ch}3cw - \frac{133}{96}\mathrm{ch}cw - \frac{\lambda+1}{2\sqrt{\lambda}}\, w\, \mathrm{sh}cw] + \ldots]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.
2. Chew G.F., Low F.E. Phys.Rev., 1956, 101, p.1570.
3. Meshcheryakov V.A., Rerikh K.V. Ann.of Phys., 1970, 59, p.408; ТМФ, 1970, 3, с.78.
4. Wanders G. Nuovo Cim., 1962, 23, p.817.
5. Rothelutner T. Zs.Phys., 1964, 177, p.287.
6. Мещеряков В.А. ЖЭТФ, 1966, 51, с.648.
7. Журавлев В.И., Мещеряков В.А., Рерих К.В. ЯФ, 1968, 10, с.168.
8. Kaiser H. Ann.Phys., 1971, 27, 7F, No.2, p.149.
9. Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-5906, Дубна, 1971; Р2-7047, Дубна, 1973.
10. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ТМФ, 1975, 24, с.155.
11. Гердт В.П., Мещеряков В.А. ОИЯИ, Р2-7976, Дубна, 1974.
12. Рерих К.В. ТМФ, 1982, 50, №2, с.251.
13. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-82-813, Дубна, 1982.
14. Рерих К.В. ОИЯИ, Р2-80-718, Дубна, 1980.
15. Hudson H. Cremona Transformations in Plane and Space. Cambridge: Univ.Press, 1927.
16. Harris W.A., Jr., Sibuya Y. Trans.of Amer.Math.Soc., 1965, vol.115, p.62.
17. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1985 года.

Рерих К.В. Р2-85-725

О новом решении уравнений Чу-Лоу

Исследуется система уравнений типа Чу-Лоу, определяемая матрицей кроссинг-симметрии $A(1,1)$ для матричных элементов S-матрицы как функций униформизующей переменной w, в которой эта система имеет вид нелинейных разностных уравнений. Найдено квадратичное преобразование Кремона искомых функций, приводящее исходные уравнения к весьма простому виду. Получены новые частные решения, зависящие от $\exp(cw)$. Установлено существование нового первого интеграла $y(w)$-четной периодической функции w. Обсуждается структура зависящего от $y(w)$ общего решения и связь найденных частных решений с первым интегралом.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Rerikh K.V. P2-85-725

On a New Solution of Chew-Low Type Equations

The system is investigated of Chew-Low type equations, defined by the crossing symmetry matrix $A(1,1)$ for S-matrix elements as functions of the uniformizing variable w, in terms of which this system is a system of nonlinear difference equations. The quadratic Cremona transformation for unknown functions reducing the initial equations to a very simple form is found. New particular solutions are obtained as functions of variable $\exp(cw)$. Existence of the new first integral $y(w)$ that is an even periodical function of w is established. The structure of the general solution depending on $y(w)$ and the relation of the found particular solutions with the first integral are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985