объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-723

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

МЕТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Направлено в сборник:
"Актуальные проблемы физики"
/к 80-летию со дня рождения проф.Д.Д.Иваненко/

1985

1. ДРЕВНИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ПРЯМОГО УГЛА НА ЗЕМЛЕ

Древние следы свидетельствуют о том, что землемеры научились чертить прямой угол на земле в давно прошедшие времена. Для выполнения этой операции, по-видимому, уже тогда был изобретен инструмент, который можно изготовить из веревки и трех кольев /1/. Прикладывая к веревке /в качестве единицы длины/ какую-нибудь палку, надо равномерно нанести на веревку тринадцать меток, первую метку скрепить с последней, а остальную часть веревки отрезать. В результате получается веревочное кольцо с двенадцатью метками. Остается привязать колья к этому кольцу в местах первой, пятой и девятой меток. Если затем разнести колья до отказа так, что веревочное кольцо натянется в виде прямолинейного треугольника и вбить колья в землю, то на земле получится прямой угол с вершиной в первой метке. Этот угол прямой потому, что треугольник, в виде которого натягивается веревочное кольцо, имеет стороны длиной в три, четыре и пять палок и, следовательно, удовлетворяет условию Пифагора

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0 \qquad /1/$$

для прямоугольного треугольника с катетами x, y и гипотенузой t.

Вместо тринадцати можно нанести на веревку тридцать одну метку и получить кольцо с тридцатью метками, а колья привязать в местах первой, тринадцатой и двадцать шестой меток. В этом случае получается веревочный треугольник со сторонами длиной в пять, двенадцать и тринадцать палок. Он тоже удовлетворяет условию /1/.

Первым инструментом удобно пользоваться на просторных площадках, вторым - в тесных местах. Подобно этому, современные чертежники пользуются двумя прямоугольными треугольниками, в первом из которых катеты одинаковы, а во втором один из катетов вдвое меньше гипотенузы.

2. ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Тройка натуральных /т.е. положительных целых/ чисел x, y, t, связанных условием /1/, называется пифагоровой. Если к тому же эти числа взаимно простые /т.е. их общий наибольший делитель равен 1/, то пифагорова тройка называется примитивной. Любая пифагорова тройка получается путем умножения чисел некоторой примитивной пифагоровой тройки на одно и то же натуральное число. Переставив местами числа x и y, из одной пифагоровой тройки получаем другую.

Числа, составляющие примитивную пифагорову тройку, являются не только взаимно, но и попарно простыми. Из двух первых чисел такой тройки одно обязательно четное. Условившись, что четным является второе число, входящее в состав примитивной пифагоровой тройки, находим

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta, \quad t = \xi^2 + \eta^2, \qquad /2/$$

где ξ, η - взаимно простые натуральные числа, из которых одно четное и $\xi > \eta$.

Если считать, что ξ и η - любые положительные /не обязательно целые/ числа, и сохранить условие $\xi > \eta$, то катеты и гипотенуза любого прямоугольного треугольника представятся в виде /2/, где, наоборот,

$$\xi = \sqrt{\frac{t+x}{2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{t-x}{2}}. \qquad /3/$$

3. СПИНОРЫ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Будем теперь считать, что произвольные вещественные числа x, y, t являются координатами псевдоевклидова пространства, и что квадрат длины вектора $\vec{x} = |x, y, t|$, приложенного к началу координат, равен

$$\vec{x}^2 = x^2 + y^2 - t^2. \qquad /4/$$

По определению, изотропные векторы лежат на световом конусе /1/ и, следовательно, представляются по формулам /2/. Числа /3/ из области $\xi > \eta > 0$ являются параметрами на той части светового конуса /1/, где $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$. Если мы пожелаем охватить всю "верхнюю" часть светового конуса, т.е. ту его часть, где $t > 0$, то мы должны положить

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{t+x}{2}}, \qquad \eta = \frac{t-x}{y}\xi. \qquad /5/$$

При этом каждой паре вещественных параметров ξ, η ставится в соответствие направленный в "будущее" изотропный вектор /2/, а каждому такому вектору ставятся в соответствие две взаимно противоположные пары /5/ параметров ξ, η.

Мировая траектория светового луча, проходящего в момент времени $t = 0$ через точку $x = 0$, $y = 0$, является прямолинейной об-

разующей светового конуса /1/. Ее можно задать системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} -y\,\xi \;+\; (t+x)\,\eta &= 0 \\ -(t-x)\,\xi \;+\; y\,\eta &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad /6/$$

Здесь мы вплотную подошли к теории спиноров псевдоевклидова пространства[4].

Следуя Картану, спинором, приложенным к началу координат, называем столбец

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \qquad /7/$$

Вектор, приложенный к началу координат, представляем в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} -y & t+x \\ x-t & y \end{pmatrix}. \qquad /8/$$

В матричных обозначениях система уравнений /6/ записывается в виде

$$X\Xi = 0. \qquad /9/$$

Изотропному вектору /2/ соответствует матрица

$$X = 2\begin{pmatrix} -\xi\eta & \xi^2 \\ -\eta^2 & \xi\eta \end{pmatrix}. \qquad /10/$$

Определитель матрицы /8/ равен

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 = -\vec{x}^2. \qquad /11/$$

Отсюда следует, что система /6/ совместна тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ - изотропный вектор.

Квадрат матрицы /8/ равен

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2+y^2-t^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2-t^2 \end{pmatrix} = \vec{x}^2. \qquad /12/$$

Скалярную матрицу отождествляем с числом. Пусть X_1, X_2 - произвольные векторы, а λ - произвольное число. Согласно /12/,

$$(X_1+\lambda X_2)^2 = (\vec{x}_1+\lambda\vec{x}_2)^2,$$

а следовательно,

$$X_1X_2 + X_2X_1 = 2\vec{x}_1\vec{x}_2. \qquad /13/$$

Наряду со световым конусом /1/ весьма важное значение имеют однополостный гиперболоид

$$X^2 = 1 \qquad /14/$$

и двуполостный гиперболоид

$$X^2 = -1. \qquad /15/$$

На "верхней" части гиперболоида /15/

$$t = \sqrt{1+x^2+y^2}. \qquad /16/$$

С точки зрения внутренней геометрии, задаваемой метрикой

$$dx^2+dy^2-dt^2 = dx^2+dy^2-\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{1+x^2+y^2}, \qquad /17/$$

поверхность /16/ является плоскостью Лобачевского. Отсюда следует, что ортохронная группа Лоренца трехмерного пространства-времени совпадает с группой изометрий плоскости Лобачевского.

Простейшее из ортохронных преобразований Лоренца - это зеркальное отражение в плоскости, проходящей через начало координат и ортогональной к вектору, конец которого находится на однополостном гиперболоиде /14/. Обозначим этот вектор $\vec{e}$. Пусть $\vec{x}$ - произвольный вектор и $\vec{x}'$ - его зеркальный образ. Так как вектор $\vec{e}$ коллинеарен вектору $\vec{x}'-\vec{x}$ и ортогонален вектору $\vec{x}+\vec{x}'$, то

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{e}\vec{x})\vec{e}, \qquad /18/$$

а так как $2(\vec{e}\vec{x}) = EX+XE$ и $E^2=1$, то для соответствующих матриц справедливо соотношение

$$X' = -EXE. \qquad /19/$$

Зеркальным образом спинора Ξ является спинор

$$\Xi' = E\Xi. \qquad /20/$$

Ортохронное преобразование Лоренца с положительным якобианом получается в результате последовательного выполнения зеркальных отражений в двух таких плоскостях: $X'' = -E_2X'E_2$,

$X' = -E_1XE_1$, т.е. $X'' = E_2E_1XE_1E_2$. Следовательно,

$$X'' = SXS^{-1}, \quad \Xi'' = S\Xi, \qquad /21/$$

где $S = E_2E_1$, $S^{-1} = E_1E_2$.

Ортохронное преобразование Лоренца с отрицательным якобианом - это либо одно зеркальное отражение, либо результат трех таких отражений: $X''' = -E_3X''E_3$, $X'' = -E_2X'E_2$, $X' = -E_1XE_1$, т.е. $X''' = -E_3E_2E_1XE_1E_2E_3$. Следовательно,

$$X''' = -TXT^{-1}, \quad \Xi''' = T\Xi, \qquad /22/$$

где

$$T = E_3E_2E_1, \quad T^{-1} = E_1E_2E_3.$$

В частности, если $E_3=E_2$, то $T = E_1 = T^{-1}$.

Плоскость

$$\vec{e}\vec{x} = 0, \quad \vec{e}^2 = 1 \qquad /23/$$

пересекает поверхность /16/ по "верхней" ветви гиперболы, которая представляет прямую на плоскости Лобачевского. Зеркальное отражение пространства в плоскости /23/ взаимно однозначно сопровождается зеркальным отражением плоскости Лобачевского в этой прямой.

Переход к комплексным числам ξ и η приводит к спинорам трехмерного евклидова пространства как над полем комплексных, так и над полем вещественных чисел [4].

4. СПИНОРЫ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Спиноры n-мерного евклидова пространства были открыты Эли Картаном в 1913 г.[5]. В начальном случае $n = 3$ Картан исходит из формул Пифагора /2/. Если $n=2\nu$ или $n=2\nu+1$, где ν - целое число, то вектор $\vec{x}$ представляется квадратной матрицей X порядка 2^ν, а спинор Ξ - столбцом из 2^ν чисел. Как и в трехмерном случае, квадрат матрицы X равен скалярному квадрату вектора $\vec{x}$, а следовательно, для двух таких матриц X_1 и X_2 справедливо равенство /13/. Матрица, представляющая вещественный вектор, эрмитова. Чтобы обосновать известную теорию Дирака, надо положить $\nu=2$.

Зеркальное отражение /18/ в гиперплоскости $\vec{e}\vec{x}=0$, $\vec{e}^2=1$ и в n-мерном случае представляется в виде /19/ и /20/. Каждое вращение пространства вокруг начала координат является произведением четного числа $\leq n$ отражений в таких плоскостях.

Пусть векторы $\vec{h}_a$, где $a \in \{1,\dots,n\}$, составляют базис, а их скалярные произведения равны $\vec{h}_a\vec{h}_b = h_{ab}$. Согласно /13/, соответствующие матрицы H_a удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$H_aH_b + H_bH_a = 2h_{ab}. \qquad /24/$$

Наряду с матрицами H_a введем матрицы H^a из условия

$$H_a = \sum_{b=1}^{n} h_{ab}H^b . \qquad /25/$$

Матрица X, представляющая вектор

$$\vec{x} = \sum_{a=1}^{n} x^a\vec{h}_a , \qquad /26/$$

равна

$$X = \sum_{a=1}^{n} x^a H_a = \sum_{a=1}^{n} x_a H^a, \qquad /27/$$

где

$$x_a = \sum_{b=1}^{n} h_{ab}x^b. \qquad /28/$$

Линейное преобразование

$$x'^a = \sum_{b=1}^{n} L^a_b x^b \qquad /29/$$

пространства называется вращением пространства вокруг начала координат, если удовлетворяются условия

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} h_{pq}L^p_aL^q_b = h_{ab}, \qquad \det(L^a_b) = 1. \qquad /30/$$

Этому преобразованию соответствует квадратная матрица S порядка 2^ν такая, что

$$X' = SXS^{-1}, \quad \Xi' = S\Xi. \qquad /31/$$

Отсюда следует, что

$$SH_aS^{-1} = \sum_{b=1}^{n} L^b_a H_b, \qquad S^{-1}H^aS = \sum_{b=1}^{n} L^a_bH^b. \qquad /32/$$

В случае бесконечно малого вращения

$$\delta x^a = x'^a - x^a = \sum_{b=1}^{n} \omega^{ab}x_b, \qquad /33/$$

где

$$\omega^{ab} + \omega^{ba} = 0. \qquad /34/$$

В этом случае $S = 1 + \Omega$, где

$$\Omega = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\omega^{pq}H_pH_q , \qquad /35/$$

так что

$$\delta X = X' - X = \Omega X - X\Omega, \qquad /36/$$

$$\delta\Xi = \Xi' - \Xi = \Omega\Xi.$$

5. АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

Если некоторые векторы $\vec{e}_a$, где $a \in \{1,\dots,n\}$, образуют ортонормированный базис, то соответствующие матрицы E_a удовлетворяют перестановочным соотношениям Клиффорда

$$E_aE_b + E_bE_a = 2\delta_{ab}. \qquad /37/$$

Алгебра K_n, порожденная единицей 1 и другими элементами $E_1,\dots,E_n$, удовлетворяющими соотношениям /37/, называется алгеброй Клиффорда. Генераторы $1, E_1,\dots,E_n$ и произведения $E_{a_1}\dots E_{a_m}$, где $2 \le m \le n$, $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, составляют базис алгебры K_n. Следовательно, размерность этой алгебры как векторного пространства равна 2^n. Действительно, по биному Ньютона

$$1 + n + c^2_n + \dots + c^n_n = (1+1)^n .$$

При $n = 2\nu$ алгебра $K_{2\nu}$ простая. Она эквивалентна алгебре квадратных матриц порядка 2^ν.

При $n = 2\nu + 1$ алгебра $K_{2\nu+1}$ полупростая. Она является прямой суммой двух одинаковых подалгебр, каждая из которых эквивалентна $K_{2\nu}$. Картан выбирает ту из подалгебр, в которой

$$E_1\dots E_{2\nu+1} = i^\nu . \qquad /38/$$

Теперь понятно, почему число компонент спинора при $n = 2\nu$ и при $n = 2\nu+1$ равно 2^ν.

6. КОНЕЧНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В 2ν-мерном пространстве базис

$$A_k = \frac{1}{2}(E_{2k-1} + iE_{2k}), \quad A^+_k = \frac{1}{2}(E_{2k-1} - iE_{2k}), \qquad /39/$$

$$k \in \{1,\dots,\nu\}$$

приводит к конечномерной модели фермионного поля. Действительно, из перестановочных соотношений Клиффорда /37/ получаем перестановочные соотношения между операторами уничтожения и рождения ферми-частиц, а именно:

$$A_k A_\ell + A_\ell A_k = 0, \qquad \overset{+}{A}_k A_\ell + A_\ell \overset{+}{A}_k = \delta_{k\ell}\,, \qquad \overset{+}{A}_k \overset{+}{A}_\ell + \overset{+}{A}_\ell \overset{+}{A}_k = 0. \qquad /40/$$

Векторы A_k лежат в ν-мерной полностью изотропной плоскости П. Алгебра Γ_ν, порожденная единицей 1 и другими элементами $A_1, \ldots, A_\nu$, удовлетворяющими соотношениям $A_k A_\ell + A_\ell A_k = 0$, называется алгеброй Грассмана. Генераторы $1, A_1, \ldots, A_\nu$ и произведения $A_{k_1} \ldots A_{k_\mu}$, где $2 \le \mu \le \nu$, $k_1 < k_2 < \ldots < k_\mu$, составляют базис алгебры Γ_ν, так что размерность этой алгебры равна 2^ν, т.е. числу компонент спинора. Алгебра Грассмана является подалгеброй алгебры Клиффорда.

Все это в равной мере относится и к векторам $\overset{+}{A}_k$, лежащим в плоскости $\overset{+}{П}$. Картан представляет спинор в виде столбца антисимметричных компонент $\xi_{k_1 \ldots k_\mu}$. Каждому такому столбцу взаимно однозначно соответствует элемент

$$\hat{\Xi} = \xi_0 + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu!} \sum_{k_1=1}^{\nu} \ldots \sum_{k_\mu=1}^{\nu} \xi_{k_1 \ldots k_\mu} \overset{+}{A}_{k_1} \ldots \overset{+}{A}_{k_\mu} \qquad /41/$$

алгебры Грассмана $\overset{+}{\Gamma}_\nu$. Если заменить здесь $\mu!$ на $\sqrt{\mu!}$, то получится функционал Фока.

Вакуумное состояние $|0\rangle$ представляется простым спинором и изображается плоскостью П. Так называемый вектор состояния, равный

$$|\rangle = \hat{\Xi}\,|0\rangle = \Xi, \qquad /42/$$

на самом деле является спинором. Вектор состояния бозонного поля следовало бы также называть спинором, но уже не евклидова, а симплектического пространства. Представление о гамильтониане поля дает оператор /35/.

Спиноры Картана находятся в таком же отношении к векторам, в каком волновая функция Шредингера - к операторам координат и импульсов. Поэтому квантовую механику можно называть теорией спиноров симплектического пространства /по меньшей мере, если уравнения Гамильтона линейные/. В свою очередь, теория спиноров Картана является квантовой геометрией евклидова пространства.

7. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Ковариантная производная спинорного поля была введена /6/ В.А.Фоком и Д.Д.Иваненко в 1929 году. Сделать это было весьма трудной задачей потому, что мы знаем, как преобразуется спинор при ортогональных преобразованиях пространства, но не знаем и не можем знать, как он преобразуется при других преобразованиях. Поэтому спинорное поле мы можем рассматривать только в репере специального вида, в котором метрический тензор имеет постоянные коэффициенты. Если же нет метрического тензора, то нет и спинорных полей. Сначала рассмотрим произвольный репер.

Координатный репер состоит из линейных форм $d^\alpha = dx^\alpha$. Дуальный к нему репер состоит из векторных полей $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. Произвольный репер состоит из линейных форм $f^\alpha = f^\alpha_\beta d^\beta$, $d^\alpha = e^\alpha_\beta f^\beta$, где $f^\alpha_\gamma e^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\beta$ и, следовательно, $e^\alpha_\gamma f^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta$. Дуальный к f^α репер состоит из векторных полей $e_\alpha = e^\beta_\alpha \partial_\beta$, а следовательно, $\partial_\alpha = f^\beta_\alpha e_\beta$. Векторное поле можно задать как в координатном репере ∂, так и в произвольном репере e: $A^\alpha e_\alpha = a^\alpha \partial_\alpha$, откуда $A^\alpha = a^\beta f^\alpha_\beta$, $a^\alpha = A^\beta e^\alpha_\beta$. Аналогично ковекторное поле задается как в координатном репере d, так и в произвольном репере f: $A_\alpha f^\alpha = a_\alpha d^\alpha$, откуда $A_\alpha = e^\beta_\alpha a_\beta$, $a_\alpha = f^\beta_\alpha A_\beta$. Компоненты произвольного тензорного поля преобразуются, как и произведения векторных и ковекторных полей.

Ковариантные производные векторного и ковекторного полей записываются в виде

$$D_\beta A^\alpha = e_\beta A^\alpha + \omega^\alpha_{\beta\mu} A^\mu\,,$$
$$D_\beta A_\alpha = e_\beta A_\alpha - \omega^\mu_{\beta\alpha} A_\mu\,. \qquad /43/$$

Тензорные поля дифференцируются как и произведения векторных и ковекторных полей. Например,

$$D_\gamma A^{\alpha\beta} = e_\gamma A^{\alpha\beta} + \omega^\alpha_{\gamma\mu} A^{\mu\beta} + \omega^\beta_{\gamma\mu} A^{\alpha\mu}\,,$$
$$D_\gamma A^\alpha_\beta = e_\gamma A^\alpha_\beta + \omega^\alpha_{\gamma\mu} A^\mu_\beta - \omega^\mu_{\gamma\beta} A^\alpha_\mu\,, \qquad /44/$$
$$D_\gamma A_{\alpha\beta} = e_\gamma A_{\alpha\beta} - \omega^\mu_{\gamma\alpha} A_{\mu\beta} - \omega^\mu_{\gamma\beta} A_{\alpha\mu}\,.$$

Операция Ли

$$e_\alpha e_\beta - e_\beta e_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma \qquad /45/$$

задает коэффициенты неголономности репера, равные

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = e^\mu_\alpha e^\nu_\beta (\partial_\nu f^\gamma_\mu - \partial_\mu f^\gamma_\nu). \qquad /46/$$

Комбинация

$$S^\alpha_{\mu\nu} = \omega^\alpha_{\mu\nu} - \omega^\alpha_{\nu\mu} - c^\alpha_{\mu\nu} \qquad /47/$$

называется тензором кручения, а комбинация

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha}\omega^{\mu}_{\beta\gamma} - e_{\beta}\omega^{\mu}_{\alpha\gamma} - c^{\sigma}_{\alpha\beta}\omega^{\mu}_{\sigma\gamma} + \omega^{\mu}_{\alpha\sigma}\omega^{\sigma}_{\beta\gamma} - \omega^{\mu}_{\beta\sigma}\omega^{\sigma}_{\alpha\gamma} \qquad /48/$$

– тензором кривизны.

Пусть теперь задан метрический тензор $h_{\alpha\beta} f^{\alpha} \otimes f^{\beta}$, коэффициенты $h_{\alpha\beta}$ которого в некотором репере f постоянны. Это значит, что $e_{\gamma} h_{\alpha\beta} = 0$. Подчиним связность $\omega^{\gamma}_{\alpha\beta}$ двум условиям, полагая, что тензор кручения /47/ равен нулю и что ковариантная производная $D_{\gamma} h_{\alpha\beta}$ метрического тензора равна нулю. Из /47/ и /44/ находим

$$\omega^{\gamma}_{\alpha\beta} - \omega^{\gamma}_{\beta\alpha} = c^{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad \omega^{\mu}_{\alpha\beta} h_{\mu\gamma} + \omega^{\mu}_{\alpha\gamma} h_{\beta\mu} = 0. \qquad /49/$$

Обозначая

$$\omega_{\gamma\beta\alpha} = h_{\nu\mu}\omega^{\mu}_{\alpha\beta}, \quad c_{\alpha\beta\nu} = c^{\mu}_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}, \qquad /50/$$

находим решение уравнений /49/:

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}\left(c_{\nu\beta\alpha} + c_{\alpha\beta\nu} - c_{\alpha\nu\beta}\right). \qquad /51/$$

Ковариантная производная спинорного поля ψ равняется [7,8]

$$D_{\nu}\psi = e_{\nu}\psi + \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta\nu} H^{\alpha} H^{\beta}\psi, \qquad /52/$$

а ковариантная производная сопряженного с ним поля $\bar{\psi} = \psi^{*} H_0$ равняется

$$D_{\nu}\bar{\psi} = e_{\nu}\bar{\psi} - \bar{\psi}\frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta\nu} H^{\alpha} H^{\beta}. \qquad /53/$$

Ковариантные производные матриц H^{α} равны нулю.

Встречаются объекты, имеющие и спинорный и тензорный характер. Правила /43/, /52/ и /53/ позволяют находить их ковариантные производные. Например, спинорный и векторный характер имеет ковариантная производная $\psi_{\nu} = D_{\nu}\psi$ спинорного поля ψ. Вторая ковариантная производная этого поля равна

$$D_{\mu}\psi_{\nu} = e_{\mu}\psi_{\nu} + \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta\mu} H^{\alpha} H^{\beta}\psi_{\nu} - \omega^{\alpha}_{\mu\nu}\psi_{\alpha}. \qquad /54/$$

Альтернированная вторая ковариантная производная спинорного поля выражается через тензор кривизны /48/:

$$(D_{\alpha} D_{\beta} - D_{\beta} D_{\alpha})\psi = -\frac{1}{4} R_{\alpha\beta\mu\nu} H^{\mu} H^{\nu}\psi, \qquad /55/$$

где

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\sigma}_{\alpha\beta\mu} h_{\sigma\nu}. \qquad /56/$$

Введенное В.А.Фоком и Д.Д.Иваненко понятие ковариантной производной спинорного поля дало возможность написать уравнение Дирака в ОТО, а именно:

$$\sum_{\nu=0}^{3} H^{\nu} D_{\nu}\psi = \frac{imc}{\hbar} H^{4}\psi. \qquad /57/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А., Шавохина Н.С. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ, №6-85, Дубна, 1985, с.27.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. "Наука", М., 1972, с.22,107.
3. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. "Наука", М., 1982, с.21,31.
4. Картан Э. Теория спиноров. ИЛ, М., 1947, с.64.
5. Cartan E. Bull.Soc.Math.de France, 1913, 41, p.53.
6. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. ГИТТЛ, М.-Л., 1952, с.641.
7. Шавохина Н.С. ТМФ, 1972, 10, №3, с.412.
8. Черников Н.А. В сб.: Материалы III совещания по нелокальным теориям поля, ОИЯИ, Д2-7161, Дубна, 1973, с.218.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1985 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79.

Черников Н.А., Шавохина Н.С.
Р2-85-723
Метрическая природа спинорного поля

Исследована связь между следующими алгебраическими, геометрическими и физическими объектами, взятыми в исторической последовательности: тройки пифагоровых чисел, алгебры Грассмана, алгебры Клиффорда, спиноры Картана, уравнение Дирака, ковариантная производная Фока - Иваненко, фермионные и бозонные поля. Показано, что формулы Пифагора для прямоугольного треугольника прямо ведут к спинорному представлению ортохронной группы Лоренца. Указано, что вектор состояния в квантовой фермионной теории является спинором евклидова, а в квантовой бозонной теории - спинором симплектического пространства. Подчеркнута метрическая природа спинорного поля: если нет метрического тензора, то нет и спинорных полей. Практическая задача древности - начертить прямой угол на земле - оказалась тесно связанной с главными физическими теориями современности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Chernikov N.A., Shavokhina N.S.
P2-85-723
Metric Nature of Spinor Field

Connection is studied between the following algebraic, geometric, and physical objects (taken in a historical sequence): triples of Pythagoras numbers, Grassmann algebras, Clifford algebras, Cartan spinors, the Dirac equation, the Fock-Ivanenko covariant derivative, fermion and boson fields. Pythagoras formulae for a right triangle are shown to lead immediately to a spinor representation of the Lorentz orthochronous group. The state vector in quantum fermion theory is proved to be a spinor of the Euclidean space, and in quantum boson theory a spinor of the symplectic space. A metric nature of the spinor field is to be emphasized: no metric tensor, no spinor fields. The practical problem of ancient ages, to draw a right triangle on the Earth surface, appears to be closely related with basic physical theories of modern times.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985