сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-85-722

Р.М.Ямалеев

СПЕКТР АТОМА ВОДОРОДА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ С ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$

1985

1. НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

В теории Паули, теории движения частиц со спином 1/2, оператор Гамильтона определяется как инвариант, образованный с помощью скалярного произведения векторов импульса и спина:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}\vec{\sigma})(\vec{p}\vec{\sigma}), \quad S = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}. \qquad /1.1/$$

Матрицы Паули $\vec{\sigma}$ являются генераторами группы $SU(2)$- группы унимодулярных матриц, действующих в двумерном комплексном пространстве. Эти матрицы обладают замечательными свойствами умножения кватернионов. Используя свойства базиса $\{\sigma_k\}$, можно показать, что группа $SU(2)$ связана и изоморфна группе движений на трехмерной сфере четырехмерного евклидова пространства /1/. Точнее, мы имеем изоморфизм групп $SO(4)$ и $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$. Указанный изоморфизм принимает наиболее наглядную форму, если использовать векторную параметризацию групп. Согласно /2/ имеем

$$SO(4) = \frac{(1+\hat{a}_+)(1+\hat{b}_-)}{\sqrt{(1+\vec{a}^2)(1+\vec{b}^2)}} = T_+(\vec{a})\,T_-(\vec{b}). \qquad /1.2/$$

Можно показать, что матрицы

$$\vec{r}_+ = \partial T_+/\partial\vec{a}\,(\vec{a}=0), \quad \vec{r}_- = \partial T_-/\partial\vec{b}\,(\vec{b}=0) \qquad /1.3/$$

совпадают с матрицами спина 1/2, определенными в декартовом базисе. В отличие от матриц Паули операторы $\vec{r}_\pm$ действуют в четырехмерном евклидовом пространстве. Бесконечномерными аналогами операторов спина 1/2

$$\vec{S} = -i\hbar\vec{r}_\pm/2 \qquad /1.4/$$

являются операторы

$$\vec{\mathfrak{M}}_\pm/2 = (\vec{M}\pm\vec{N})/2, \qquad /1.5/$$

где

$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}], \quad \vec{N} = r_4\vec{p} - \vec{r}p_4. \qquad /1.6/$$

Операторы $\vec{S}_\pm$ и $\vec{\mathfrak{M}}_\pm/2$ реализуют конечно- и бесконечномерные представления группы $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$, т.е. являются объектами одинаковой природы.

Для построения теории движения частиц со спином 1/2 связь группы SU(2) с группой движений на трехмерной сфере имеет фундаментальное значение. На трехмерной сфере оператор Гамильтона выражается исключительно в терминах группы $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$, а именно операторов /1.4/ и /1.5/, принимая тем самым канонический вид /3/:

$$H=\frac{2}{mR^2}\left(\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{2}+\vec{S}\right)^2=\frac{1}{2mR^2}\left((2\hbar-i\vec{r}\,\vec{\mathfrak{M}})^2-\hbar^2\right). \qquad /1.7/$$

В связи с каноническим представлением оператора Гамильтона частицы со спином 1/2 введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Инвариант, образованный путем скалярного произведения векторов /тензоров, спиноров/ - операторов, которые принадлежат к одной и той же группе по свойствам коммутации /скобок Пуассона/ своих компонент, будем называть каноническим инвариантом.

Далее, согласно этому определению можно развить принцип канонической относительности. По теории канонической относительности истинными инвариантами являются только канонические инварианты. Таким образом, выражение /1.7/ удовлетворяет принципу канонической относительности, а оператор /1.1/ не удовлетворяет.

2. ПУТИ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ /1.7/ НА РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Сравнивая /1.7/ с теорией Шредингера на трехмерной сфере [4] важно отметить, что в случае частицы со спином 1/2 оператор импульса $\vec{p}=-i\hbar\partial/\partial\vec{x}$ заменяется не на оператор трансляции на трехмерной сфере $\vec{N}/R=r_4\vec{p}-\vec{r}p_4$, $(r_4^2+\vec{r}^{\,2}=R^2)$, а на сумму /или разность/ операторов:

$$\pm\vec{p}\to\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}/R=(\vec{M}\pm\vec{N})/R, \qquad /2.1/$$

что, вообще говоря, соответствует не только искривлению, но и кручению пространства.

При обобщении /1.7/ с учетом социальной теории относительности, на первый взгляд, достаточно перейти от трехмерной сферы в пространство де-Ситтера[5]. Однако для частиц со спином 1/2 это не так.

Как известно, трансформационные свойства уравнений движения частицы со спином 1/2 в нерелятивистском случае основаны на двухкратно накрывающем локальном изоморфизме

$$SU(2)\to SO(3).$$

В канонической формулировке мы достигаем глобального изоморфизма, поскольку

$$SU(2)\to SU(2).$$

Трансформационные свойства /1.7/ исследованы в [3] . Указанный выше локальный изоморфизм продолжается до своего релятивистского аналога:

$$SL(2,C)\to O_+^{\uparrow}(1,3),$$

где справа стоит собственная группа Лоренца. Для того, чтобы превратить этот изоморфизм в глобальный, необходимо изменить оператор

$$\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}=[\vec{r}\times\vec{p}]\pm(r_4\vec{p}-\vec{r}p_4) \qquad /2.2/$$

так, чтобы он, с одной стороны, имел лоренцев ковариантный вид, с другой - сохранил свойства углового момента. Таким образом, генератор группы $SU(2)\times SU(2)/\pm 1$ должен перейти в генератор группы $SL(2,C)\times SL(2,C)/\pm 1$, реализующий бесконечномерное представление. Эта процедура аналогична "релятивизации" матриц Паули, когда

$$\vec{r}\to\begin{pmatrix}\vec{r} & 0\\ 0 & \vec{r}\end{pmatrix}. \qquad /2.3/$$

спинор переходит в биспинор. Поэтому если /2.2/ переписать схематично как

$$\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}=(r_4,\vec{r})(\vec{r}_{\pm})\begin{pmatrix}p_4\\ \vec{p}\end{pmatrix}, \qquad /2.4/$$

то при "релятивизации" /2.3/ выражение /2.4/ переходит в

$$\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}=(r_4\vec{r}p_4\vec{p})\begin{pmatrix}\vec{r}_{\pm} & 0\\ 0 & \vec{r}_{\pm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_4\\ \vec{p}\\ \pi_4\\ \vec{\pi}\end{pmatrix}. \qquad /2.5/$$

Аналогичным способом можно составить выражение для оператора $\vec{T}$:

$$\vec{T}_{\pm}=(r_4\vec{r}p_4\vec{p})\begin{pmatrix}0 & \vec{r}_{\pm}\\ \vec{r}_{\pm} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_4\\ \vec{p}\\ \pi_4\\ \vec{\pi}\end{pmatrix}. \qquad /2.6/$$

Компоненты операторов $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{T}$ будут удовлетворять тем же коммутационным соотношениям, что и матрицы

$$-i\hbar\vec{r} \equiv -i\hbar\begin{pmatrix} \vec{r} & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix}, \quad -i\hbar\vec{t} \equiv -i\hbar\begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \\ \vec{r} & 0 \end{pmatrix}, \qquad /2.7/$$

являясь жордановыми отображениями последних. Отсюда следует, что $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{T}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям группы Лоренца. Операторы $\vec{\mathfrak{M}}$ и $\vec{T}$ определены в восьмимерном пространстве с сигнатурой /+ + + + - - - -/. Как показано в /6/, единственным базисом, пригодным для построения уравнений движения, в этом случае является базис октав. В базисе октав на семимерной псевдосфере уравнение движения принимает вид

$$(mcR)^2\Psi = (\mathfrak{M}_n + S_n)(\mathfrak{M}_n + S_n)\Psi, \qquad /2.8/$$

где

$$S_n = -i\hbar\Sigma_n, \qquad /2.9/$$

$\Sigma_n(\vec{\Sigma}_m, \vec{\Sigma}_{\mathcal{J}}, \Sigma_{\mathcal{J}_4})$ - базис октав, а

$\mathfrak{M}_n(\vec{\mathfrak{M}}, \vec{\mathcal{J}}, \mathcal{J}_4)$ - соответствующие отображения Жордана конечномерных операторов S_n. Аналог уравнения Дирака имеет вид

$$\bar{m}cR\Psi = (4\hbar - i\Sigma_n\mathfrak{M}_n)\Psi, \qquad /2.10/$$

$$\bar{m} = m\sqrt{1 + 17\hbar^2/c^2R^2}.$$

Уравнения в базисе октав /2.8/, /2.10/ пока еще мало изучены, и поэтому для решения конкретных задач целесообразно искать другие, более простые пути "релятивизации" уравнения /1.7/. Представим /1.7/ в следующем виде:

$$2mH = \frac{(\vec{\sigma}\vec{\mathfrak{M}} + 2\hbar)}{R}\frac{(\vec{\sigma}\vec{\mathfrak{M}} + 2\hbar)}{R} - \frac{\hbar^2}{R^2}, \qquad /2.11/$$

Легко убедиться, что при $R \to \infty$ /2.11/ переходит в оператор энергии уравнения Паули

$$2mH = (\vec{p}\vec{\sigma})(\vec{p}\vec{\sigma}). \qquad /2.12/$$

Первым шагом к получению уравнения Дирака из /2.12/ является формула

$$\left(\frac{H}{c} - \bar{m}c\right)\left(\frac{H}{c} + \bar{m}c\right) = (\vec{p}\vec{\sigma})(\vec{p}\vec{\sigma}),$$
$$\bar{m}c = \sqrt{m^2c^2 - \hbar^2/R^2}. \qquad /2.13/$$

Аналогично можно записать и /2.11/:

$$\left(\frac{H}{c} - \bar{m}c\right)\left(\frac{H}{c} + \bar{m}c\right) = (\vec{\sigma}\vec{\mathfrak{M}} + 2\hbar)(\vec{\sigma}\vec{\mathfrak{M}} + 2\hbar). \qquad /2.14/$$

Операторное соотношение /2.14/ можно получить также из пятимерного уравнения

$$\left(\frac{H}{c} - \bar{m}c\right)\left(\frac{H}{c} + \bar{m}c\right) = (p_4 + i\vec{\sigma}\vec{p})(p_4 - i\vec{\sigma}\vec{p}), \qquad /2.15/$$

применяя условие

$$r_4^2 + \vec{r}^2 = R^2, \qquad /2.16/$$

или

$$r_4p_4 + \vec{r}\vec{p} = 0.$$

Последнее условие аналогично кулоновской калибровке в электродинамике /7/:

$$\operatorname{div}\vec{A} \sim (\vec{p}\vec{A}) = 0.$$

Записывая /2.14/ в матричной форме, получим уравнения Дирака на трехмерной сфере /2.16/ в пятимерном псевдоевклидовом пространстве:

$$\frac{H}{c}\Psi_{\pm} = \left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\mathfrak{M}}_{\pm}}{R} + \beta\bar{m}c + \gamma_5\frac{2\hbar}{R}\right)\Psi_{\pm}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \qquad /2.17/$$

При $R \to \infty$ /2.17/ переходит в уравнение Дирака.

3. ПЕРЕХОД В СФЕРИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КООРДИНАТ. СПЕКТР ЭНЕРГИИ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Спектр энергии и волновые функции частицы, свободное движение которой определено уравнением /2.17/, легко определяются если учесть что оператор $(\vec{\mathfrak{M}}\vec{\sigma}) + 2\hbar$ коммутирует с оператором энергии. Собственные значения этого оператора известны:

$$[\vec{\mathfrak{M}}\vec{\sigma} + 2\hbar]\Psi = \hbar(n+1)\Psi, \quad n = 0,1,2\ldots. \qquad /3.1/$$

Подставив /3.1/ в /2.17/, имеем следующую формулу для спектра энергии свободного состояния:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{\bar{m}^2 c^2 + \frac{\hbar^2 (n+1)^2}{R^2}}. \qquad /3.2/$$

Для решения уравнения /2.17/ в центрально-симметричном поле перейдем в сферическую систему координат. Решение при заданных j и m будем искать в виде

$$\Phi_{jm} = \begin{pmatrix} \phi^+ Y^+_{jm} + i\phi^- Y^-_{jm} \\ \\ \Psi^+ Y^+_{jm} + i\Psi^- Y^-_{jm} \end{pmatrix}. \qquad /3.3/$$

Для перевода оператора энергии в сферическую систему координат достаточно воспользоваться формулами

$$\frac{(\vec{\sigma}\vec{N})}{R} = \frac{\hbar}{i}\left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr} + \frac{(1+k)}{r}\right]\frac{(\vec{\sigma}\vec{r})}{r},$$

$$(\vec{\sigma}\vec{M})\, Y^{\pm}_{jm} = \hbar\left(J^2 - L^2 - \frac{3}{4}\right) Y^{\pm}_{jm} = -\hbar(1+k)\, Y^{\pm}_{jm},$$

$$Y^{(\pm)}_{jm} = \frac{(\vec{\sigma}\vec{r})}{r}\, Y^{(\pm)}_{jm}, \qquad /3.4/$$

$$k = \begin{cases} -(\ell+1), & j = \ell + 1/2, \\ +\ell, & j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

В итоге получим следующие уравнения для радиальных функций:

$$(\mathcal{E} - mc)\,\phi^+ = \frac{(\ell+1)}{R}\Psi^+ + \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r}\right]\Psi^-,$$

$$(\mathcal{E} + mc)\,\Psi^- = -\frac{(\ell-1)}{R}\phi^- - \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r}\right]\phi^+, \qquad /3.5/$$

$$(\mathcal{E} - mc)\,\phi^- = -\frac{\ell-1}{R}\Psi^- - \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr} + \frac{\ell+1}{r}\right]\Psi^+,$$

$$(\mathcal{E} + mc)\,\Psi^+ = \frac{\ell+1}{R}\phi^+ + \left[\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{d}{dr} - \frac{\ell-1}{r}\right]\phi^-.$$

При $R \to \infty$ система уравнений /3.5/ расщепляется на два уравнения Дирака. Зная спектр /3.5/ в отсутствие внешнего поля, мы можем проверить правильность записи /3.5/, решая его и сравнивая результат с /3.2/. Общий вид искомого решения тотчас будет подсказан, как только мы перейдем от r/R к угловым переменным по формулам

$$\operatorname{tg} x = r/R, \quad \sin x = (r/R)/\sqrt{1 + r^2/R^2}, \qquad /3.6/$$

поскольку коэффициентами системы будут функции $\cos x$ и $\sin x$:

$$\mathcal{E}^- \sin x\,\phi^+ = (\ell+1)\sin x\,\Psi^+ + \left(\sin x\frac{d}{dx} - (\ell-1)\cos x\right)\Psi^-,$$

$$\mathcal{E}^- \sin x\,\Psi^- = -(\ell-1)\sin x\,\phi^- - \left(\sin x\frac{d}{dx} + (\ell+1)\cos x\right)\phi^+, \qquad /3.7/$$

$$\mathcal{E}^- \sin x\,\phi^- = -(\ell-1)\sin x\,\Psi^- - \left(\sin x\frac{d}{dx} + (\ell+1)\cos x\right)\Psi^+,$$

$$\mathcal{E}^+ \sin x\,\Psi^+ = (\ell+1)\sin x\,\phi^+ + \left(\sin x\frac{d}{dx} - (\ell-1)\cos x\right)\phi^-,$$

$$\mathcal{E}^{\pm} = \mathcal{E} \pm \bar{m}c.$$

Решение /3.7/ будем искать в виде следующих рядов:

$$\phi^+ = \sum_k a_k \sin^k x, \quad \Psi^+ = \sum_k b_k \sin^k x,$$

$$\phi^- = \sum_k g_k \cos x \sin^{k-1} x, \quad \Psi^- = \sum_k c_k \cos x \sin^{k-1} x. \qquad /3.8/$$

Подставляя /3.8/ в систему /3.7/ и приравнивая коэффициенты при степенях $\sin^k x$, получим систему рекуррентных соотношений для a_k, b_k, g_k и c_k:

$$\mathcal{E}^- a_{k-1} = (\ell+1)\, b_{k-1} + (k - \ell + 1)\, c_{k+1} - (k-\ell)\, c_{k-1},$$

$$\mathcal{E}^+ b_{k-1} = (\ell+1)\, a_{k-1} + (k - \ell + 1)\, g_{k+1} - (k-\ell)\, g_{k-1}, \qquad /3.9/$$

$$\mathcal{E}^- g_k = -(\ell-1)\, c_k - b_k (k + \ell + 1),$$

$$\mathcal{E}^+ c_k = -(\ell-1)\, g_k - a_k (k + \ell + 1).$$

Последние два соотношения существенно облегчают решение задачи. Из них мы находим

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}^{+} & \ell-1 \\ \ell-1 & \mathcal{E}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ g_{k-1} \end{pmatrix} = -(k+\ell) \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} . \qquad /3.10/$$

Подставляя (b_{k-1}, a_{k-1}) из /3.10/ в первые два соотношения /3.9/, находим

$$(k+\ell)(k-\ell+1) \begin{pmatrix} g_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = (\hat{A}) \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ g_{k-1} \end{pmatrix} , \qquad /3.11/$$

где матрица $(\hat{A})$ имеет следующий вид:

$$(\hat{A}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{-}\mathcal{E}^{+} + 1 - k^2 & -2\mathcal{E}^{-} \\ -2\mathcal{E}^{+} & \mathcal{E}^{-}\mathcal{E}^{+} + 1 - k^2 \end{pmatrix} . \qquad /3.12/$$

Как известно из общей теории определения собственных значений и собственных функций [8], для определения N-го собственного значения необходимо оборвать ряды /3.8/ так, что в /3.11/ $(g_{N+1}, c_{N+1}) = 0$. Тогда с необходимостью

$\det(\hat{A}) = 0$,

т.е.

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = \bar{m}^2 c^2 + (N+1)^2/R^2 , \qquad /3.13/$$

что совпадает с формулой /3.2/.

После добавления кулоновского потенциала левая часть /3.7/ претерпевает следующее изменение:

$$\mathcal{E}^{\pm} \sin x \to \mathcal{E}^{\pm} \sin x + \frac{\alpha}{R} \cos x , \qquad /3.14/$$

где $\alpha = \ell^2/(\hbar \cdot c)$.

В этом случае решение системы следует искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi^{+} &= \exp(-Dx)[\sum_k a_k \sin^{k+s} x + A_k \cos x \sin^{k-1+s} x] , \\ \Psi^{+} &= \exp(-Dx)[\sum_k [b_k \sin^{k+s} x + B_k \cos x \sin^{k-1+s} x] , \\ \phi^{-} &= \exp(-Dx)\sum_k [g_k \cos x \sin^{k-1+s} x + G_k \sin^{k+s} x] , \\ \Psi^{-} &= \exp(-Dx)\sum_k [c_k \cos x \sin^{k-1+s} + E_k \sin^{k+s} x] . \end{aligned} \qquad /3.15/$$

Показатели D и s могут быть найдены из решения /3.15/ в особых точках, при $\cos x \to 0$ и при $\sin x \to 0$. Полагая $\sin x = 0$, получим $s = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$; решая систему при $\cos x \to 0$, получим D:

$$D = (-\mathcal{E}^{-}\mathcal{E}^{+} + \frac{(\ell^2 - 1)}{R^2} + \frac{2}{R}\sqrt{\mathcal{E}^{-}\mathcal{E}^{+}})^{1/2} . \qquad /3.16/$$

Следующий этап состоит в подстановке /3.15/ в систему уравнений /3.7/ с учетом замены /3.14/ и приравнивании к нулю выражений при одинаковых степенях $\sin^k x$ и $\cos x \sin^{k-1} x$. Таким образом, мы получим следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^{-} a_k - \frac{\alpha}{R^2} A_k = \frac{\ell+1}{R} b_k - \frac{k+s-\ell}{R} c_k - \frac{D}{R} E_k - \\ &- \frac{\alpha}{R^2} A_{k+2} + \frac{k+s+\ell+1}{R} c_{k+2} , \\ &\mathcal{E}^{+} b_k - \frac{\alpha}{R^2} B_k = \frac{\ell+1}{R} b_k - \frac{k+s-\ell}{R} g_k - \frac{D}{R} G_k - \\ &- \frac{\alpha}{R^2} B_{k+2} + \frac{k+s+\ell+1}{R} g_{k+2} , \end{aligned} \qquad /3.17/$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{E}^{-}}{R} G_k - \frac{\alpha}{R} g_k = -\frac{\ell-1}{R^2} E_k + \frac{k+s+\ell}{R^2} B_k + D b_k - \\ &- \frac{\alpha}{R} g_{k+2} - \frac{k+s-\ell-1}{R^2} B_{k+2} , \\ &\frac{\mathcal{E}^{+}}{R} E_k - \frac{\alpha}{R} c_k = -\frac{\ell-1}{R^2} G_k + \frac{k+s+\ell}{R^2} A_k + D a_k - \\ &- \frac{\alpha}{R} c_{k+2} - \frac{k+s-\ell-1}{R^2} A_{k+2} ; \\ &\mathcal{E}^{-} g_k + \frac{\alpha}{R^2} G_k = -\frac{\ell-1}{R} c_k - b_k \frac{k+s+\ell+1}{R} + \frac{D}{R} B_k , \\ &\mathcal{E}^{+} c_k + \frac{\alpha}{R^2} E_k = -\frac{\ell-1}{R} g_k - a_k \frac{k+s+\ell+1}{R} + \frac{D}{R} A_k , \\ &\frac{\mathcal{E}^{-}}{R} A_k + \frac{\alpha}{R} a_k = \frac{\ell+1}{R^2} B_k + E_k \frac{k+s+1-\ell}{R^2} - D c_k , \\ &\frac{\mathcal{E}^{+}}{R} B_k + \frac{\alpha}{R} b_k = \frac{\ell+1}{R^2} A_k + G_k \frac{k+s+1-\ell}{R^2} - D g_k . \end{aligned} \qquad /3.18/$$

В уравнениях /3.17/ коэффициенты с индексом k перенесем в одну, а с индексом $k+2$ в другую сторону. Для определения собственных значений обрываем ряд на $k=N$ -члене. Заменяя в /3.17/ и /3.18/ индекс k на N и приравнивая члены с индексом $N+2$ нулю, получим 8 уравнений на 8 неизвестных. Поскольку мы имеем однородную систему уравнений с нетривиальными решениями, то детерминант системы с необходимостью равен нулю. Это условие и определяет собственные значения системы. Методом исключения неизвестных можно свести задачу к уравнению

$$\det\begin{pmatrix} 2D(N+s)-2a\mathcal{E}-\dfrac{a^2-(N+s)^2+\ell^2}{R^2} & 2\dfrac{a}{R} \\ -2\dfrac{a}{R} & 2D(N+s)-2a\mathcal{E}-\dfrac{a^2-(N+s)^2+\ell^2}{R^2} \end{pmatrix}=0.$$

Решая полученное уравнение относительно $\mathcal{E}$, имеем

$$\mathcal{E}_{1,2}=-\frac{Z_{1,2}}{(N+s)^2+a^2}+\sqrt{\frac{\bar{\bar{m}}^2}{1+\dfrac{a^2}{(N+s)^2}}-\frac{Z_{1,2}^2}{(N+s)^2+a^2}+\frac{Z_{1,2}^2}{[(N+s)^2+a^2]^2}},$$

$$Z_1=\frac{a^2-(N+s)^2+\ell^2+2a}{2R},$$

$$Z_2=\frac{a^2+(N+s)^2-\ell^2-2a}{2R}, \qquad /3.19/$$

$$\bar{\bar{m}}^2=\bar{m}^2+\frac{\ell^2-1}{R^2}, \quad (c=1).$$

При $R\to\infty$ формула /3.19/ переходит в известную формулу Зоммерфельда - Дирака - Дарвина. Подставив /3.19/ в соотношения /3.17/ - /3.18/, по рекуррентным формулам мы определим коэффициенты решений /3.15/. Слагаемые, содержащие $Z_{1,2}$, обусловлены вкладом от спектра несвязанных состояний. Дело в том, что в отличие от обычного случая формула /3.19/, равно как и формулы /3.17/ - /3.18/, определяющие решения уравнения, одинаково пригодны как для связанных, так и несвязанных состояний. Между этими состояниями нет резкой границы, поскольку несвязанные состояния также определяются дискретным спектром.

До решения задачи мы вправе были ожидать расщепления дираковских уравнений энергии двух типов. Первый тип расщепления должен был возникнуть в силу удвоения числа уравнений системы, второй - за счет кривизны пространства, а именно за счет применения базисов $\sin^k x$ и $\cos x \sin^{k-1} x$. Как видно из предыдущих формул, первый тип расщепления, который можно было бы связать со сдвигом Лэмба, не состоялся. Второй тип расщепления выражен в формуле /3.19/. Он аналогичен сверхтонкому расщеплению, однако поведение его при $N\to\infty$ и $\ell\to\infty$ существенно отличается от поведения по известной формуле Ферми [9]. В нашем случае при увеличении N и ℓ $\Delta E=|\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1|$ медленно, но растет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. "Наука", М., 1985.
2. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. "Наука", М., 1979.
3. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р4-84-727, Дубна, 1984.
4. Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике. "Наука", М., 1976, с.239-247.
5. Пестов А.Б., Шавохина Н.С. ОИЯИ, Р2-11022, Дубна, 1977.
6. Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р2-85-233, Дубна, 1985.
7. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. ГТТИ, М., 1952.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. "Наука", М., 1976.
9. Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. "Наука", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1985 года.

Вниманию организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамп, п/я 79.

Ямалеев Р.М. P2-85-722

Спектр атома водорода в трехмерном пространстве постоянной кривизны с группой движений $SU(2)\times SU(2)/\pm1$

Рассмотрено уравнение Дирака на трехмерной сфере с группой движений $SU(2)\times SU(2)/\pm1$ в пятимерном псевдоевклидовом пространстве, получена формула для спектра энергии и волновые функции электрона в кулоновском поле атома водорода. Показано, что при $R\to\infty$/ R -радиус сферы/ полученная формула переходит в известную формулу Дирака - Зоммерфельда - Дарвина. Получено расщепление уровней, аналогичное известному сверхтонкому расщеплению. Полученные формулы одинаково пригодны для описания состояния электрона как в связанном, так и в несвязанном /для задачи рассеяния/ состояниях.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Винсградовой

Yamaleev R.M. P2-85-722

Hydrogen Atom Spectrum in Three-Dimensional Space of Curvature Constant with $SU(2)\times SU(2)/\pm1$

Dirac equation on three-dimensional sphere with $SU(2)\times SU(2)/\pm1$ in five-dimensional pseudoeuclidean space is considered, the formula for energy spectrum and electron wave functions in Coulomb field of hydrogen atom are derived. It is shown that at $R\to\infty$ (R-radius of sphere) the obtained formula becomes the known formula of Dirac - Sommerfeld - Darwin. Splitting of energy levels analogous to the known superthin splitting is obtained. The obtained formulas are equally suitable for description of electron state both in the bound and unbound (for scattering problem) states.

The investigation has been performed at the Laboratory of the Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985