

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-85 716

Г.П.Корчемский\*, А.В.Радюшкин

ФОРМАЛИЗМ КОНТУРНЫХ СРЕДНИХ  
И РЕНОРМГРУППА  
ДЛЯ ИНФРАКРАСНЫХ АСИМПТОТИК В КХД

Направлено в журнал "Physics Letters"

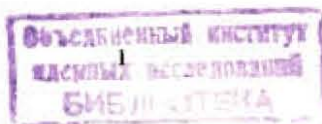
\* Ростовский государственный университет

1985

## І. Введение

Различные логарифмические поправки, возникающие при вычислениях в пертурбативной КХД, обычно экспоненцируются при суммировании по всем порядкам теории возмущений. Хорошо известные примеры тому — ультрафиолетовые логарифмы ( $\ln Q^2/\mu^2$ , где  $Q^2$  — масштаб энергий, а  $\mu^2$  — точка вычитания), коллинеарные массовые сингулярности ( $\ln Q^2 m^2$ , где  $m^2$  — масса частиц или ее виртуальность) и инфракрасные (ИК) массовые сингулярности ( $\ln Q^2/\lambda^2$ , где  $\lambda^2$  — параметр ИК обрезания, например, фиктивная масса глюона). Экспоненциация УФ логарифмов естественным образом объясняется в рамках ренормгруппы (РГ).<sup>1</sup> Однако обычные РГ методы неприменимы непосредственно к массовым логарифмам, появляющимся из УФ конечных вкладов фейнмановских диаграмм и, следовательно, не затрагиваемым РГ преобразованиями. Тем не менее экспоненциация коллинеарных логарифмов может быть установлена с помощью РГ подхода, если сначала провести процедуру факторизации больших и малых расстояний<sup>2,3/</sup>. Можно показать, что при этом коллинеарные массовые сингулярности исходной амплитуды  $T(Q^2, m^2)$  факторизуются —  $T(Q^2, m^2) = E(Q^2, \mu^2) \otimes f(\mu^2/m^2)$ , где  $f(\mu^2/m^2)$  — новый объект (матричный элемент составного оператора, функция распределения /вероятность распада и т.д.), содержащий дополнительные УФ расходимости. Массовые логарифмы ( $\ln m^2$ ) находятся во взаимно-однозначном соответствии с УФ сингулярностями новой величины  $f(\mu^2/m^2)$ , и их экспоненциация является прямым следствием мультипликативной перенормируемости составных операторов, вводимых процедурой факторизации.

В данной работе будет показано, что экспоненциация ИК логарифмов также может быть естественно объяснена на основе свойств мультипликативной перенормируемости новых объектов — вакуумных средних от Р-упорядоченных вдоль определенного контура экспонент, поглощающих все ИК сингулярности рассматриваемых процессов. Будет также сформулировано РГ уравнение, описывающее полную ИК асимптотику пертурбативной КХД.



## 2. Факторизация ИК сингулярностей

Рассмотрим произвольный жесткий процесс в рамках пертурбативной КХД. В соответствии с методами размерного счета, изложенными в /3/, ИК сингулярности возникают при интеграции по области импульсов, соответствующей конфигурации рис. 1: все импульсы внутри "струи"  $J_i$  параллельны соответствующему внешнему импульсу  $P_i$ , в то время как все внешние линии  $S$  либо (однородно) мягкие (т.е. все  $k_{\mu} \rightarrow 0$  для всех компонент импульса), либо находятся в глауберовском режиме ( $k_{\mu} \rightarrow 0$ , но компонента  $k_{\perp}$ , поперечная направлению струи, гораздо больше коллинеарных компонент). Более того, каждая вставка мягкого глюона в вершины струйного подграфа  $J_i$  воспроизводит лоренц-дираковскую структуру исходной диаграммы, умноженную на хорошо известный фактор  $2P_i^+$ , плюс члены порядка  $O(k)$ . Следующее замечание состоит в том, что произвольный фактор в числителе фейнмановского интеграла, линейный по  $k_{\mu}$ , подавляет ИК сингулярность. Глауберовские особенности исчезают, если каждая вершина, соединяющая мягкий блок  $S$  со струей  $J_i$ , содержит  $O(k)$  фактор (см., например /4/). Необходимое подавление возникает естественным образом, если на соответствующие глюонные потенциалы налагается дополнительное условие аксиальной калибровки:

$$P_i^+ \hat{A}_{\mu}(x) = 0. \quad (1)$$

Это означает, что, выразив пропагаторы частиц струйных подграфов, распространяющихся во "внешнем" поле  $\hat{A}_{\mu}$  мягких глюонов, взятых в произвольной калибровке, через соответствующие пропагаторы в аксиальной калибровке ур.(1) для мягких глюонов:

$$S(x, y; A) = U^+(x) S(x, y; A^{axial}) U(y),$$

для "струйного" кваркового пропагатора и

$$D_{\mu\nu}^{tr}(x, y; A) = \tilde{U}^+(x) D_{\mu\nu}^{tr}(x, y; A^{axial}) \tilde{U}(y)$$

для поперечной части струйного глюонного пропагатора<sup>+/</sup>, мы выделяем ИК сингулярности исходной амплитуды в операторы калибровочного преобразования  $U(x)$ . Аксиальная калибровка принадлежит к классу так называемых контурных калибровок<sup>/5/</sup>, для которых операторы  $U(x)$ ,  $\tilde{U}(x)$  есть  $P$ -упорядоченные вдоль параллельного вектору  $\eta = P_i$  луча экспоненты

<sup>+/</sup> Вклады продольной части струйного глюонного пропагатора и дуг сокращаются в полной амплитуде процесса.

$$E_n(x, \infty) = P \exp(i g \int_0^{\infty} ds \eta_{\mu} \hat{A}_{\mu}(x + ns) e^{-\epsilon s}), \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (2)$$

в кварковом и глюонном представлении соответственно. Можно показать<sup>/2/</sup>, что после необходимых коммутаций для каждой струи остаются только две эксионенты - на конце внешней линии и в вершине жесткого подпроцесса.

Таким образом, ИК сингулярности исходной амплитуды (или сечения рассеяния) аккумулируются новыми объектами - вакуумными средними

$$m_{IR} = \langle 0 | T \exp(i g \int_C dz_{\mu} A_{\mu}(z)) | 0 \rangle \quad (3)$$

(или, в общем случае, их суперпозицией, получаемой после разложения жесткого подграфа по цвет-изотопическому базису с помощью техники работы<sup>/6/</sup>). Решающее замечание состоит в том, что  $m_{IR}$  содержит новые ультрафиолетовые расходимости, характерные для контурных средних. Они были изучены в работах<sup>/7-10/</sup>, основные результаты которых мы кратко сформулируем в следующем разделе.

## 3. Ренормализация контурных средних

В работе<sup>/7/</sup> было доказано, что УФ расходимости контурного среднего полностью определяются гладкостью контура интегрирования  $C$ :

а) Если  $C$ -гладкая замкнутая петля, то УФ особенности только перенормируют константу взаимодействия  $\alpha_s$  и соответствующее среднее от вильсоновской петли  $W[C] = \frac{1}{N} \langle 0 | T \exp(i g \int_C dz_{\mu} A_{\mu}) | 0 \rangle$  ренорм-инвариантно<sup>/8,9/</sup>.

б) Дополнительные логарифмические УФ расходимости возникают, если  $C$  содержит изломы (см. рис.2). Для нашего анализа очень важно, что эти УФ особенности мультипликативно перенормируются<sup>/7,10/</sup> соответствующим "cusp"  $Z$ -фактором, для которого калибровочно-инвариантная аномальная размерность в евклидовом пространстве была впервые вычислена Поляковым<sup>/7/</sup> в однопетлевом приближении:

$$\Gamma_{cusp}(g, \gamma) = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F (\gamma \cot \gamma - 1), \quad (4)$$

где  $\gamma$  - угол излома. Аналогичные расходимости появляются, если  $C$  имеет самопересечения, но в дальнейшем нас не будет интересовать такая возможность.

в) Открытые контуры при интеграции вблизи концевых точек приводят к калибровочно-зависимым УФ расходимостям, которые также мультипликативно перенормируются.

г) При некоторых регуляризациях появляются линейные расходимости, аддитивно перенормирующие массу пробной тяжелой частицы<sup>/7,8/</sup>.

В результате ренормализационные свойства контурного интеграла  $E(c, \mu, g)$  описываются следующим РГ уравнением:

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \sum_{\text{ends}} \Gamma_{\text{end}}(g) + \sum_{\text{cusp}} \Gamma_{\text{cusp}}(g, \tau_i) \right) E(c, \mu, g) = 0, \quad (5)$$

где  $\beta(g)$  — бета-функция глудинамики и  $\Gamma_{\text{end}}$  — концевая аномальная размерность.

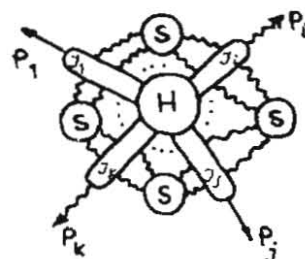
Это РГ уравнение применимо для описания ИК асимптотик только в случае, когда ИК и УФ сингулярности ур.(3) находятся во взаимно-однозначном соответствии, то есть если ИК и УФ масштабы ренормализации появляются только в отношении.

#### 4. Применение к ИК поведению кваркового формфактора и пропагатора

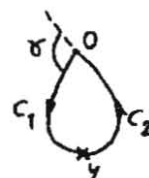
Общие свойства ур.(3) могут быть продемонстрированы на простейшем примере кваркового формфактора и кваркового пропагатора, где вступают в игру все виды указанных в предыдущем разделе УФ особенностей. Воспользовавшись  $\alpha$ -представлением<sup>/1/</sup> для пропагаторов внешних кварковых линий и следуя<sup>/11/</sup>, мы находим явный вид контура рис.3, определяющего ИК асимптотику рассматриваемых функций Грина в off-shell и on-shell случае. Длина контура в первом случае пропорциональна  $\sigma_i \sim \frac{1}{p_i^2 m}$  величине, обратной виртуальности соответствующей линии. Сдвиг кварков с массовой поверхностью приводит к эффективному обрезанию бесконечной длины контура, и, соответственно, максимальная длина волн глюонов пропорциональна  $(\max(\sigma_1, \sigma_2))^{1/2}$ , то есть ИК регулятором выступает виртуальность частиц — длина контура. Заметим, что в случае off-shell кваркового формфактора теряется калибровочная инвариантность инфракрасной асимптотики рис. 3 а, и соответствующий контур интегрирования определяет ИК поведение неампутированной диаграммы.

Отождествим возможные источники УФ расходимостей. Ненулевой угол в вершине 0 рис.3а, б, образованный внешними кварковыми импульсами  $p$  и  $q$ , дает вклад в угловую аномальную размерность, которая при нашей кинематике процесса в низшем порядке по  $\alpha_s$  есть хорошо известная из КЭД функция тормозного излучения<sup>/12/</sup>:

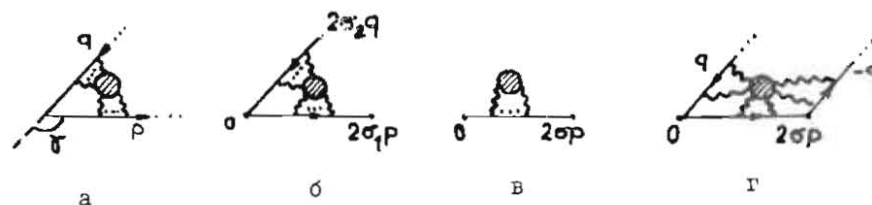
$$\Gamma_{\text{cusp}}(g, \tau) = c_F \frac{\alpha_s}{\pi} (\tau \ln \tau - 1) = \frac{\alpha_s}{\pi} c_F \left( \frac{1+\tau^2}{2\tau} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} - 1 \right), \quad (6)$$



Р и с. 1. Общая структура процесса с жестким подпроцессом (H), коллинеарными (J) и мягкими (S) подграфами.



Р и с. 2. Пример контура с угловой особенностью.



Р и с. 3. Контур интегрирования, определяющие инфракрасную асимптотику кваркового формфактора: (а) — on-shell, (б) — off-shell кваркового пропагатора (в) — в фейнмановской и (г) — в аксиальной калибровке.

где

$$\text{ch } \gamma = \frac{(Pq)}{m^2}, \quad r = \left(1 + \frac{4m^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad Q^2 = -(P-q)^2, \quad P^2 = q^2 = m^2.$$

В обоих случаях рис.3 а и б контур имеет концевые точки. Однако для первого контура эти точки находятся на бесконечности и вследствие наличия фактора  $\exp(-\epsilon L)$  в ур.(2), где  $L$  - текущая длина контура, вклад их в концевую аномальную размерность равен нулю; другими словами, контур рис.3 а замкнут на бесконечности и задаваемая им калибровочно-инвариантная асимптотика определяется только угловой аномальной размерностью ур.(6). В то же время контур рис.3 б имеет ненулевую концевую аномальную размерность, в фейнмановской калибровке она равна  $1/3$ :

$$\Gamma_{\text{end}}(g) = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F - \frac{7}{48} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 C_F N + \dots \quad (7)$$

Хорошо известно качественное изменение ИК асимптотики кваркового пропагатора в различных калибровках. Этот эффект находит естественное объяснение на языке контурных средних ИК асимптотика пропагатора определяется, как следует из рис. 3(в), концевой аномальной размерностью. Ранее нами было показано<sup>[5]</sup>, что в аксиальной калибровке концевая аномальная размерность совпадает с угловой аномальной размерностью, определяемой углом между вектором, фиксирующим калибровку, и импульсом кварка. Это свойство видно на примере контура рис. 3(г), где по сравнению с рис. 3(в) мы добавили два контурных интеграла, равных тождественно единичному оператору в аксиальной калибровке ( $\hat{A}\psi = 0$  с  $n = q$ ). Контур рис. 3(г) замкнут на бесконечности и дает вклад в угловую аномальную размерность, имеющую в отличие от ур.(6) логарифмическое поведение в пределе  $Q^2/m^2 \gg 1$ . Выясним теперь зависимость рассматриваемых контурных интегралов от размерных переменных. Во-первых, это ренормпараметр  $\mu$ , появляющийся при введении УФ схемы регуляризации (размерной, Полякова<sup>[7]</sup>). Во-вторых, это геометрические параметры контура (длина, радиусы кривизны и т.д.). Специфика контуров, определяющих ИК асимптотику КХД ур.(3) состоит в том, что из всего множества этих величин они характеризуются только длиной контура, так как состоят только из набора лучей и отрезков.

После масштабного преобразования параметров интегрирования выражение для контурного среднего, соответствующего рис.3а,б, можно записать в виде

$$E(c, \mu, g) = \langle T \text{Pexp} \left( ig \int_{c_1}^{P_1} ds \frac{P_1}{\sqrt{P^2}} \hat{A}_\mu \left( \frac{P_1}{\sqrt{P^2}} s \right) \right) \text{Pexp} \left( ig \int_{c_2}^{q_1} dt \frac{q_1}{\sqrt{q^2}} \hat{A}_\mu \left( \frac{q_1}{\sqrt{q^2}} t \right) \right) \rangle. \quad (8)$$

Следовательно,  $E(c, \mu, g)$  зависит только от длины контура  $L$  и угла между единичными векторами  $q_1/\sqrt{q^2}$  и  $P_1/\sqrt{P^2}$ . Для on-shell форм-фактора и пропагатора вычисление в порядке  $\alpha_s$  дает

$$E_{\text{on-shell}}^{(3a)} = \frac{\alpha_s}{\pi} C_F (\gamma \text{cth } \gamma - 1) \ln(\mu L) \quad (9)$$

$$E_{\text{on-shell}}^{(3b)} = \begin{cases} -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \ln(\mu L), & \text{Feynman gauge} \\ E_{\text{on-shell}}^{(3a)}, & \text{axial gauge } (n=q), \end{cases} \quad (10)$$

где  $L^2 = (1/\mu_{\text{IR}}^2 \text{ или } 1/\lambda^2)$

в схеме размерной регуляризации ИК расходимости, при введении массы глюона. В случае off-shell кинематики контур рис. 3б состоит из двух отрезков конечной длины:  $L_1 = 2\sigma_1 \sqrt{P^2}$  и  $L_2 = 2\sigma_2 \sqrt{q^2}$ , и поэтому окончательное выражение для ур.(8) должно быть безразмерной симметричной функцией  $L_1$  и  $L_2$ . Приведем окончательное выражение для контурного среднего, соответствующего рис. 3(б):

$$E_{\text{off-shell}}^{(3b), \text{Feynman gauge}} = \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[ \gamma \text{cth } \gamma \ln \left( -\mu^2 e^{2\delta\epsilon} \frac{P^2 \sigma_1^2 q^2 \sigma_2^2}{(P\sigma_1 - q\sigma_2)^2} \right) - 2 \ln \left( \mu^2 e^{2\delta\epsilon} \sqrt{P^2 \sigma_1^2 q^2 \sigma_2^2} \right) - 4 + 4 \text{cth } \gamma \int_0^\gamma dx x \text{cth } x - 2 \int_{-\gamma}^{\gamma} dx x \text{cth } x \right] \quad (11)$$

$$= \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F (\gamma \text{cth } \gamma - 2) \ln \mu^2 L_{\text{eff}}^2,$$

где угол  $\gamma$  определен соотношением  $\text{ch}(\gamma - \eta)/\text{ch } \gamma = (P^2 \sigma_1^2 / q^2 \sigma_2^2)^{1/2}$ . Аналогично для кваркового пропагатора находим

$$E_{\text{off-shell}}^{(3b)} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F (\ln(-\mu^2 e^{2\delta\epsilon} P^2 \sigma^2) + 2) \equiv -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \ln \mu^2 L_{\text{eff}}^2 \quad (12)$$

в фейнмановской калибровке,

$$E_{\text{off-shell}}^{(3b)} = +\frac{\alpha_s}{\pi} C_F \left[ (\gamma \text{cth } \gamma - 1) \ln(-\mu^2 e^{2\delta\epsilon} P^2 \sigma^2) - 1 - \gamma \text{cth } \gamma + 2 \text{cth } \gamma \int_0^\gamma dx x \text{cth } x \right] \equiv +\frac{\alpha_s}{\pi} C_F (\gamma \text{cth } \gamma - 1) \ln \mu^2 L_{\text{eff}}^2 \quad (13)$$

в аксиальной калибровке. Таким образом, мы продемонстрировали, что в on-shell случае длина контура  $\sim$  (инфракрасный регулятор)<sup>-1</sup> входит только в произведении с ренормпараметром

$$E_{\text{on-shell}} = E(\mu L, g), \quad (14)$$

а в off-shell асимптотике в более сложном виде

$$E_{\text{off-shell}} = E(\mu L_{\text{eff}}, g), \quad L_{\text{eff}}^2 = Q^2 \sigma_1 \sigma_2 \varphi_{\text{sym}} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \gamma \right), \quad (15)$$

где  $L_{\text{eff}}$  - эффективная длина контура. Обратим внимание на тот факт, что при  $Q^2 \gg P^2 = q^2 = m^2$

$$L_{\text{eff}}^2 = \begin{cases} 1/\lambda^2 & \text{- on-shell } (\lambda = \text{gluon mass}) \\ \frac{\sqrt{Q^2 m^2}}{\mu^4} & \text{- off-shell } (\mu^2 = \text{quark off-shellness}). \end{cases} \quad (16)$$

Теперь не составляет труда провести обобщение ур.(14,15) на более сложные процессы, отличие контуров интегрирования для которых от рассмотренных на рис.3 состоит только в увеличении числа углов и конечных точек, дающих аддитивные вклады в соответствующие аномальные размерности. Мы можем сформулировать поэтому основной вывод этого раздела - УФ и ИК асимптотики в классе контуров рис.3 взаимосвязаны, что позволяет применять ренормгрупповые методы к изучению ИК расходимостей исходного процесса.

### 5. Ренормгрупповое уравнение

Воспользовавшись РГ уравнением ур.(5), описывающим УФ асимптотику контурных средних, мы получаем уравнение для ИК асимптотики

$$\left( L_{\text{eff}} \frac{\partial}{\partial L_{\text{eff}}} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + N \Gamma_{\text{end}}(g) + \sum_{i=1}^I \Gamma_{\text{cusp}}(g, \gamma_i) \right) m_{\text{IR}}(\mu, L_{\text{eff}}, g) = 0, \quad (17)$$

в котором  $I$  есть число изломов на контуре интегрирования  $C$ , а  $N$  - число его конечных точек. Это уравнение точное, то есть оно описывает всю ИК асимптотику исходного объекта теории и лишь трудности в многопетлевом вычислении  $\beta$ -функции КХД и аномальных размерностей ограничивают его точное решение. В частности, в однопетлевом приближении упомянутых функций решением ур.(17) является лидирующая дважды логарифмическая  $(g^2 \ln \frac{Q^2}{m^2} \ln(L_{\text{eff}}^2 m^2))^n$  асимптотика. Именно на основе ее вычисления в трехпетлевом приближении уравнения РГ типа были предложены ранее [14-16], аналогичные ур.(17) и отличающиеся определением  $L_{\text{eff}}$ . Далее мы покажем, как это неправильное определение  $L_{\text{eff}}$ , использованное в [15-17], качественно меняет характер поведения нелидирующих ИК расходимостей.

Формально ур.(17) имеет один и тот же вид для различных заданий виртуальностей внешних линий. Однако на самом деле универсальным в нем является только полная угловая аномальная размерность, в то время как  $L_{\text{eff}}$  и  $N$  (число конечных точек) переопределяются при изменении виртуальности внешних линий. В случае внешних частиц на массовой поверхности ур.(17) упрощается в

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \ln \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \sum_{i=1}^I \Gamma_{\text{cusp}}(g, \gamma_i) \right) m_{\text{on-shell}}\left(\frac{\mu}{\lambda}, g\right) = 0 \quad (18)$$

( $\lambda^2$  - параметр ИК регуляризации), решение которого имеет следующий вид:

$$m_{\text{on-shell}}\left(\frac{\mu}{\lambda}, g\right) = \exp\left( \int_{g(\lambda)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} \sum_{i=1}^I \Gamma_{\text{cusp}}(g, \gamma_i) \right). \quad (19)$$

В off-shell случае получим РГ уравнение для ампутированных амплитуд. Для этого определим

$$m_{\text{off-shell}}^{\text{amn.}} = m_{\text{off-shell}}^{\text{v}} / (m_{\text{off-shell}}^{\text{s}})^{\frac{N}{2}}, \quad (20)$$

где из ур.(17)

$$m_{\text{off-shell}}^{\text{v}} = \exp\left( \int_{g(1/L_V)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} \left( \sum_{i=1}^I \Gamma_{\text{cusp}}(g, \gamma_i) + N \Gamma_{\text{end}}(g) \right) \right)$$

- ИК асимптотика неампутированной диаграммы, зависящей от эффективной длины  $L_V$ , а

$$m_{\text{off-shell}}^{\text{s}} = \exp\left( 2 \int_{g(1/L_S)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} \Gamma_{\text{end}}(g) \right)$$

- ИК асимптотика пропагатора внешних частиц,  $L_S$  - эффективная длина соответствующего контура.

Как следует из ур.(2),(3), ИК асимптотика кваркового и глюонного пропагатора определяется одним и тем же контурным средним, но только в фундаментальном и присоединенном представлении соответственно, то есть концевая аномальная размерность глюонного пропагатора отличается от ур.(7) заменой цветовых множителей  $C_F \rightarrow C_A \sim N$ . Чтобы сравнить решение полученного РГ ур.(17), с решением предложенных ранее аналогичных уравнений, продифференцируем обе части ур.(20) по  $\ln \sigma^{-\frac{1}{2}}$  где  $1/\sigma$  - характерная виртуальность внешних линий. С учетом линейной зависимости  $L_{V(\sigma)} = L_{V(\sigma)}(\sigma)$ , являющейся следствием свойств  $P$ -экспонент, находим

$$\frac{d m_{\text{off-shell}}}{d \ln \sigma^{-\frac{1}{2}}} = 2 \left( \sum_{i=1}^I \Gamma_{\text{cusp}}\left(g\left(\frac{1}{L_V}\right), \gamma_i\right) + N \left( \Gamma_{\text{end}}\left(g\left(\frac{1}{L_V}\right)\right) - \Gamma_{\text{end}}\left(g\left(\frac{1}{L_S}\right)\right) \right) \right). \quad (21)$$

Сравнивая ур.(18),(21), мы убеждаемся, что, во-первых, аномальная раз-

мерность, определяющая полную ИК асимптотику, существенно различна в off-shell и on-shell случаях; во-вторых, в лидирующей ИК асимптотике можно пренебречь зависимостью константы сильного взаимодействия от  $1/L$  в выражении для  $\Gamma_{\text{сир}}$ ,  $\Gamma_{\text{енд}}$ , и тогда немедленно находим хорошо известное свойство удвоения лидирующей ИК асимптотики при сдвиге внешних линий с массовой поверхностью; в-третьих, отличие ур.(21) от соответствующих аналогов работ [14], полученных в лидирующем приближении, проявляется только в нелидирующей ИК асимптотике, где эти уравнения нарушаются [16].

Таким образом, предложенный метод позволил нам не только получить РГ уравнения для ИК асимптотики, но и на основе свойств контурных средних находить в принципе произвольную нелидирующую асимптотику, задаваемую, как следует из ур.(19)(20), точными выражениями для контурных аномальных размерностей и  $\beta$ -функции. В двухпетлевом приближении из этих величин остается неизвестной лишь угловая аномальная размерность, к вычислению которой мы теперь и переходим.

## 6. Аномальная угловая размерность в высших порядках

Вычисление нелидирующих ИК логарифмов для кваркового фактора [15,16] показало, что аномальная размерность "старых" РГ уравнений [14] в учетном приближении ( $Q^2/\rho^2 \gg 1$ ) является слабо сходящимся рядом:

$$\Gamma(g, \frac{Q^2}{\rho^2}) = \frac{\alpha_s}{\pi} c_F \ln \frac{Q^2}{\rho^2} + \frac{11}{24} (\frac{\alpha_s}{\pi})^2 c_F N \ln^2 \frac{Q^2}{\rho^2} + \dots \quad (22)$$

Необходимость суммирования всего ряда является артефактом использованных подходов, отсутствующим в нашем РГ уравнении, где аномальная размерность - правая часть ур.(6) содержит в высших порядках лишь выражения вида

$$\Gamma_{\text{сир}}(g, \gamma) = c_F \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\alpha_s}{\pi})^n N^{n-1} (a_n + b_n \ln \frac{Q^2}{\rho^2}), \quad (23)$$

а появление первого коэффициента  $\beta$ -функции в ур.(22)  $\beta(g) = -\frac{11}{48} N \frac{g^4}{\pi^2} + \dots$  связано с нетривиальным аргументом константы взаимодействия в ур.(21). Начиная с  $n=2$ , разложение ур.(23) обязано иметь "максимально неабелеву" структуру, что является следствием теоремы экспоненциации [7,18]. В теориях с абелевой калибровочной группой Р-экспоненты точно вычисляются, а их аномальные размерности (аналогично ситуации в КЭД) ограничиваются нижним порядком ТВ.

Вычисления угловой калибровочно-инвариантной аномальной размерности в порядке  $\alpha_s^2$  проводилось нами в фейнмановской калибровке в схеме  $\overline{MS}$  регуляризации УФ расходимостей с помощью развитого в [9] метода исследования контурных интегралов. Окончательное двухпетлевое выражение есть

$$\Gamma_{\text{сир}}(g, \gamma) = \frac{\alpha_s}{\pi} c_F (\gamma \text{cth} \gamma - 1) \varphi(\frac{\alpha_s}{\pi})^2 c_F N \left[ \frac{67}{72} (\gamma \text{cth} \gamma - 1) + \frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{48} (\gamma \text{cth} \gamma - 1) - \frac{1}{2} \text{cth} \gamma \int_0^\gamma dx x \text{cth} x + \frac{1}{2} \text{cth}^2 \gamma \int_0^\gamma dx x (\gamma - x) \text{cth} x - \frac{1}{2} \text{cth} \gamma \text{sh}^2 \gamma \int_0^\gamma dx \frac{x \text{cth} x - 1}{\text{sh}^2 \gamma - \text{ch}^2 x} \ln \frac{\text{sh} \gamma}{\text{ch} x} \right], \quad (24)$$

где угол  $\gamma$  определен в пространстве Минковского (см. рис.2). В пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  (или, что то же,  $\ln \frac{Q^2}{\rho^2} \gg 1$ ) различные слагаемые ур.(24) содержат квадратичные и кубические логарифмы, сокращающиеся друг с другом в сумме:

$$\Gamma_{\text{сир}}(g, \gamma) \underset{\gamma \rightarrow \infty}{=} \frac{\alpha_s}{\pi} c_F \ln \frac{Q^2}{\rho^2} + 2(\frac{\alpha_s}{\pi})^2 c_F N \left[ \frac{67}{72} - \frac{\pi^2}{24} \right] \ln \frac{Q^2}{\rho^2} \quad (25)$$

и в пределе малых углов

$$\Gamma_{\text{сир}}(g, \gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{=} \frac{\alpha_s}{\pi} c_F \frac{\gamma^2}{3} + 2(\frac{\alpha_s}{\pi})^2 c_F N \left[ \frac{\gamma^2}{16} (2 - \frac{4\pi^2}{9}) + \frac{67}{72} \frac{\gamma^2}{3} \right]. \quad (26)$$

Отсутствие дважды логарифмических (как в ур.(22)) членов в разложении ур.(23),(24) является не случайным. Выбрав на контуре  $C$  рис.1 точку  $y$ , делящую весь контур на два гладких контура  $C_1$  и  $C_2$ , и наложив контурную калибровку  $\text{Re} \chi_\rho (ig \int_C d\tau \mu \hat{A}_\mu(\tau)) = \hat{1}$ , предложенную в [5], мы находим, что угловая аномальная размерность контура  $C$  равна концевой аномальной размерности контура  $C_2$  в  $C_1$ -контурной калибровке. Согласно [10] вклад в концевую аномальную размерность вносит поджатие в точку двухчастично неприводимых (радужно неприводимых) подграфов. В то же время возникающая в ур.(25) зависимость от  $\rho^2$  есть результат интеграции внутри этого блока по углам между импульсами излучаемых глюонов и импульсами фермионов, живущих на контуре [9].

Отличительной особенностью наложенной контурной калибровки является существование линейной связи потенциала  $\hat{A}_\mu$  и напряженности  $\hat{G}_{\mu\nu}$  [5]:

$$\hat{A}_\mu(x) = \int_{C_1} d\tau \nu \frac{\partial \hat{z}_\rho}{\partial x_\mu} G_{\nu\rho}(z), \quad (27)$$

для калибровки Фока-Швингера ( $x \hat{A} = 0$ ) переходящей в хорошо известное соотношение, а для аксиальной калибровки в

$$\hat{A}_\mu(x) = \int_0^\infty ds e^{-\epsilon s} n_\nu \hat{G}_{\mu\nu}(x+ns), \quad (28)$$

Таким образом, во всех этих калибровках распространяются глюоны только поперечных поляризаций. В результате, следуя аргументам<sup>/3/</sup>, использованным фактически неизвестное ранее ур.(28), мы приходим к выводу о том, что степень логарифма  $\ln \frac{Q^2}{\mu^2}$  совпадает с числом независимых угловых интеграций, равным единице для радужно неприводимых подграфов.

Общее решение ур.(17), определяющее ИК асимптотику процессов, зависит от ренормпараметра. Эта зависимость является специфическим свойством нового нелокального объекта, введенного при анализе ИК сингулярностей процедуры факторизации. Полная амплитуда есть свертка жесткой и мягкой частей и от  $\mu$  не зависит. Следовательно, зависимость от ренормпараметра  $\mu$  жесткой части также описывается РГ уравнением

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \sum_{\text{cusp}} \Gamma_{\text{cusp}}(g, \tau_i) - \sum_{j=1}^N (\tau_j + \theta \cdot \Gamma_{\text{end}}(g)) \right) m_{\text{hard}} = 0, \quad (29)$$

где  $\tau_j$  - аномальная размерность  $j$  внешней линии, а  $\theta = 0$  для on-shell случая, и  $\theta = 1$  для off-shell асимптотики. Разложение в ряд ТВ амплитуды  $m_{\text{hard}}$  содержит дваждылогарифмические  $(g^2 \ln^2 \frac{Q^2}{\mu^2})^n$  вклады, возникающие из УФ режима глюонов, излученных в вершинах Р-экспоненты. Подходящим выбором  $\mu$  в решении ур.(29) можно минимизировать этот вклад. Таким образом, величина  $\mu$  в ур.(19),(20) жестко фиксируется минимизацией вклада жесткого подграфа. Не приводя полных выражений, отметим, что для on-shell и off-shell асимптотик кваркового формфактора в фейнмановской калибровке в пределе  $Q^2 \gg \mu^2$  величина  $\mu_{\text{min}}^2$  есть

$$\mu_{\text{min}}^2 = \sqrt{Q^2 \rho^2}. \quad (30)$$

Доказав общий вид разложения ур.(23) и его двухпетлевое разложение ур.(24), мы можем восстановить ряд ур.(22) из частного вида ур.(21) для кваркового формфактора.

Поскольку единственный источник  $(g^2 \ln^2 \frac{Q^2}{\mu^2})^n$ -членов ур.(26) есть (логарифмы разложения  $g(1/L_V)$ )х(однопетлевая угловая аномальная размерность), где  $L_V$  определяется ур.(10),(16), мы находим лидирующую асимптотику ур.(21),(22) для  $\sigma^2 = 1/\mu^2$ :

$$\frac{c_F}{\pi} \alpha_s(\mu^2 \sqrt{\frac{\rho^2}{Q^2}}) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}.$$

Чтобы получить аналог этого выражения при  $\sigma = 1/\rho^2$  /15/, необходимо учесть зависимость ур.(30) от  $\sigma$ , несколько изменяющую ур.(21) и приводящую к

$$\frac{c_F}{2\pi} \left[ 3 \alpha_s(\rho^2 \sqrt{\frac{\rho^2}{Q^2}}) - \alpha_s(\rho^2 \sqrt{\frac{Q^2}{\rho^2}}) \right] \ln \frac{Q^2}{\rho^2}.$$

## 7. Заключение

В данной работе мы установили, что ИК асимптотика произвольного процесса КХД описывается контурными средними. На основе анализа ренормализационных свойств контурных средних и их структуры мы получили РГ уравнение для ИК асимптотик в off-shell и on-shell кинематике. В этом уравнении появился новый специфический объект - аномальные размерности Р-упорядоченных экспонент. Мы вычислили двухпетлевой вклад в угловую аномальную размерность и установили некоторые ее свойства в высших порядках ТВ, относящиеся к возможному функциональному виду. Окончательно на основе точных вычислений мы продемонстрировали совпадение найденной лидирующей ИК асимптотики кваркового формфактора с соответствующими двухпетлевыми вычислениями, проведенными в /15,16/ и сравнили наши РГ уравнения с аналогичными уравнениями работ /14-16/.

## Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей. М, "Наука", 1984.
2. А.В.Виремов, А.В.Радошкин, ТМФ, 44, 1980, 327.
3. R.K.Ellis, H.Georgi, M.Machacek, H.D.Politzer, G.G.Ross, Nucl. Phys. B152, 1979, 285; G.Sterman, Phys.Rev. D17, 1978, 2773.
4. W.W.Lindsay, D.A.Ross, C.M.C. Sachrajda, Nucl.Phys. B222, 1983, 189.
5. S.V.Ivanov, G.P.Korchemsky, Phys.Lett. B154, 1985, 197; S.V.Ivanov, G.P.Korchemsky, A.V.Radyushkin, JINR, Preprint E2-85-595, Dubna, 1985.
6. P.Critanovic, Phys.Rev. D14, 1976, 1536.



7. A.M.Polyakov, Nucl.Phys. B164, 1980, 171.
8. V.S.Dotsenko, S.N.Vergeles, Nucl.Phys. B169, 1980, 527.
9. J.L.Gervais, A.Neveu, Nucl.Phys. B163, 1980, 189;  
I.Ya.Aref'eva, Phys.Lett. 93B, 1980, 347.
10. R.A.Brandt, F.Neri, M.-A.Sato, Phys.Rev. D24, 1981, 879.
11. В.Н. Попов, Функциональный интеграл в квантовой теории поля.  
Москва, Атомиздат, 1976 .
12. C.P.Korthals Altes, E.de Rafael, Nucl.Phys. B106, 1976, 237.
13. S.Aoyama, Nucl.Phys. B194, 1982, 513.
14. J.M.Cornwall, G.Tiktopoulos, Phys.Rev. D13, 1976, 3370;  
Phys.Rev.Lett. 35, 1975, 336;  
J.Frenkel, R.Meuldermans, I. Mohammad, J.C.Taylor, Phys.Lett.  
64B, 1976, 211; Nucl.Phys. B121, 1977, 58.
15. E.C.Poggio, Phys.Lett. 68B, 1977, 347;  
E.C.Poggio, G.Pollak, Phys.Lett. 71B, 1977, 135.
16. J.Frenkel, M.-L.Frenkel, J.C.Taylor, Nucl.Phys. B124, 1977, 268.
17. J.G.M.Gatheral, Phys.Lett. 133B, 1984, 90;  
J.Frenkel, J.C.Taylor, Nucl.Phys. B246, 1984, 231.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 октября 1985 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

- Physics of elementary particles and atomic nuclei.
- Theoretical physics.
- Experimental techniques and methods.
- Accelerators.
- Cryogenics.
- Computing mathematics and methods.
- Solid state physics. Liquids.
- Theory of condensed matter.
- Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

*JINR Rapid Communications* will be issued regularly.

