объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-85-632

А.Е.Дорохов

КОВАРИАНТНОЕ КВАНТОВАНИЕ В МОДЕЛЯХ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1985

§I. Введение

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о построении ковариантных квантово-полевых решений в моделях протяженных объектов. Такие модели принято рассматривать в связи с проблемой построения моделей элементарных частиц. К ним относятся, например, модели мешков, струн, волчков. Мы будем рассматривать квантовые релятивистские модели, для которых соответствующие классические уравнения движения имеют нетривиальное, т.е. зависящее от параметров группы симметрии модели, конечно-энергетическое решение[x].

Методы операторной теории поля, которые позволяют проквантовать систему в окрестности классического решения и найти состояния и спектр квантовых флуктуаций, хорошо известны[1]. Нас будет интересовать другой аспект теории, когда основное внимание уделяется построению локального ковариантного поля[2-4].

Простейшей моделью, которая в достаточной мере иллюстрирует все возникающие особенности, является модель действительного скалярного гейзенберговского поля в двумерном пространстве-времени:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - U(\Phi),$$

проквантованного по закону:

$$[\Phi(x,t), \dot{\Phi}(y,t)] = i\,\delta(x-y),$$

$$[\Phi(x,t), \Phi(y,t)] = [\dot{\Phi}(x,t), \dot{\Phi}(y,t)] = 0.$$

Предположим, что соответствующее классическое уравнение движения

$$\Box \Phi - U'(\Phi) = 0$$

имеет нетривиальное решение, например, солитонного типа:

$$\Phi_{cl}(x) = \varphi\left(\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

---

[x] Термин "протяженный объект" заменяет здесь термин "солитон", трактуемый в широком смысле.

Решение $\varphi_{cl}(x - x_0)$ является классической составляющей полевой функции $\varphi(x)$ и определяет пространственные свойства основного состояния. Существует бесконечное число различных классических решений, характеризуемых параметром трансляции x_0 и имеющих одно и то же значение энергии $E_{cl} = M_0/\sqrt{1-v^2}$, где $M_0 = \int dx\,[\varphi'(x)]^2$. Таким образом, основное состояние вырождено относительно преобразований трансляций, а классическое решение нарушает трансляционную симметрию. Для других типов решений уравнений Эйлера возможно нарушение и других симметрий, связанных с группой движения. Эффективным методом, позволяющим рассматривать системы с вырождением, является метод канонических преобразований Н.Н. Боголюбова/5-7/.

Основной идеей метода Боголюбова является переход к новым динамическим переменным, среди которых имеются дополнительные переменные, являющиеся параметрами группы симметрии. Их принято называть коллективными координатами. В случае группы движений кроме трансляционных координат q в зависимости от физической ситуации можно ввести также угловые переменные φ и соответствующие чисто лоренцевским вращениям переменные v. Введение коллективных координат позволяет реализовать на полевых переменных некоторое представление группы Пуанкаре/4/. Для этого строятся инвариантные относительно преобразований группы Пуанкаре функции ξ от пространственно-временных координат x, коллективных координат q, v, φ и канонически сопряженных им величин. В классическом пределе функции ξ характеризуют положение и ориентацию протяженного объекта в пространстве.

Обобщение двумерной модели скалярного поля включает в себя изучение многосолитонного сектора/4,8/, расширение числа измерений пространства Минковского/9,10/, полей более сложной, чем скаляр, лоренцевой структуры/11/, решение проблемы перенормировок/12/ и т.д.

Цель данной работы состоит в построении в четырехмерном пространстве квазиклассического приближения для сектора теории, содержащего один протяженный объект. Основной задачей является изучение возможности рассмотрения деформированных (сферически несимметричных) объектов в четырехмерном пространстве-времени.

План нашего изложения следующий. В § 2 описывается метод канонических преобразований Н.Н. Боголюбова для группы Пуанкаре. В § 3 решается задача о построении инвариантных функций $\xi(x)$ в четырехмерном пространстве ($d = 4$). В § 4 в квазиклассическом приближении строится ковариантное локальное поле для модели протяженного объекта. Итоги и выводы приведены в заключении (§ 5).

§ 2. Преобразование Н.Н. Боголюбова

В этом разделе мы рассмотрим подход к решению задачи квантования поля в окрестности классического решения с помощью метода канонических преобразований Н.Н. Боголюбова. Выделение коллективных координат позволяет переписать исходные уравнения через переменные, инвариантные относительно преобразований группы симметрии, и строго учесть соответствующие законы сохранения в любом порядке теории возмущений. Такая процедура уже в нулевом порядке теории возмущений учитывает нетривиальную структуру решения, связанную со спонтанным нарушением симметрии.

Наличие в системе протяженного объекта обязательно приводит к нарушению трансляционной и лоренцевой симметрий. Это обусловлено тем, что в классической механике материальной точки обязательно следует указать, в какой точке пространства и с какой скоростью движется частица. Если протяженный объект сферически несимметричен, то дополнительно следует указать его ориентацию в пространстве.

Перейдем к рассмотрению формулировки ковариантного аналога метода Боголюбова/4/ на примере полевой модели самодействующего скалярного поля $\Phi(x)$ в d-мерном пространстве.
Выберем лагранжиан теории в форме

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - U(\varphi), \qquad (2.1)$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $\mu = 0, 1, \ldots, d-1$ и $U(\varphi)$ -скалярная функция, ограниченная снизу. Допустим, что существует нетривиальное решение $\varphi_{cl}(x)$ (не обязательно статическое) с конечной энергией классического уравнения движения

$$\partial_t^2\varphi - \vec{\nabla}^2\varphi + U'(\varphi) = 0 \qquad (2.2)$$

При каноническом квантовании функция $\varphi(x)$ становится операторнозначной скалярной локальной полевой функцией, удовлетворяющей уравнению (2.2) и каноническим коммутационным соотношениям

$$\frac{1}{g}[\varphi(\vec{x},t), \dot{\varphi}(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$
$$[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{y},t)] = [\dot{\varphi}(\vec{x},t), \dot{\varphi}(\vec{y},t)] = 0. \qquad (2.3)$$

Здесь g - формальный параметр теории возмущений.

Теория, определенная лагранжианом (2.I), очевидно инвариантна относительно преобразований группы Пуанкаре. Это означает, что вид уравнений (2.2) и соотношений (2.3) не меняется при преобразованиях поля:

$$U_\Lambda T_a \Phi(x) T_a^{-1} U_\Lambda^{-1} = \Phi(x'), \quad \text{где } x'_\nu = \Lambda^\mu_\nu(\omega)(x+a)_\mu \quad (2.4)$$

Генераторами этих преобразований являются операторы

$$\check H(\Phi) = \int d\vec x \left[\frac{1}{2}(\partial_t\Phi)^2 + \frac{1}{2}(\vec\nabla\Phi)^2 + U(\Phi)\right] = \int d\vec x\, \mathcal{P}_0 ,$$

$$\check P_i(\Phi) = -\int d\vec x\, \partial_i\Phi\,\partial_t\Phi \equiv \int d\vec x\, \mathcal{P}_i , \quad (2.5)$$

$$\check M_{\mu\nu}(\Phi) = \int d\vec x\,(x_\mu \mathcal{P}_\nu - x_\nu \mathcal{P}_\mu),$$

построенные по теореме Нетер из (2.I).

Классическое решение уравнений (2.2), вообще говоря, неинвариантно относительно преобразований (2.4), и физическая система оказывается вырожденной. Трудности, связанные с наличием вырождения в системе, снимаются, если выполнить преобразование Боголюбова к новым переменным.

Пусть эрмитовы операторы из множества $\mathcal{P} = \{P_\mu, M_{\mu\nu}\}$ удовлетворяют соотношениям алгебры Пуанкаре:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, M_{\rho\sigma}] = ig(g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho),$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma})$$

Рассмотрим подстановку:

$$\Phi(x) = \tilde\Phi(\xi(x)) = \int d^d f \exp[i f_\alpha \xi_\alpha(x)]\,\tilde\Phi(f), \quad (2.6)$$

где f_α –числовые переменные интегрирования, а операторнозначные функции $\xi_\alpha(x)$ являются функциями $\{P,M\}$ и x. Предполагается, что вторично квантованное поле $\tilde\Phi(x)$ коммутирует с операторами из алгебры $\mathcal{P}$, а пространство представления поля $\Phi(x)$ является прямым произведением пространств представлений алгебры $\mathcal{P}$ и поля $\tilde\Phi(x)$.

Переменные $\xi_\alpha(x)$ определены свойством

$$e^{iM_{\rho\sigma}\theta^{\rho\sigma}/2}\, e^{iP_\mu a^\mu}\, \xi_\alpha(x)\, e^{-iP_\mu a^\mu}\, e^{-iM_{\rho\sigma}\theta^{\rho\sigma}/2} = \xi_\alpha(x') \quad (2.7)$$

$$x'_\nu = \Lambda^\mu_\nu(\theta)(x+a)_\mu ,$$

которое гарантирует совместность преобразования (2.7) с транстформационными свойствами поля $\Phi(x)$.

После выполнения замены (2.6), (2.7) операторы P_μ, $M_{\mu\nu}$ становятся генераторами пространственно-временных преобразований. Отождествление этих операторов с выражениями соответствующих генераторов (2.5), построенных по полю $\Phi(x)$ с помощью теоремы Нетер, дает операторные связи, которые и обеспечивают сохранение числа независимых переменных до и после преобразования (2.6). Эти связи рассматриваются на векторе состояния $|\Psi\rangle$ и имеют вид

$$[P_\mu - \check P_\mu(\Phi)]|\Psi\rangle = 0, \quad [M_{\mu\nu} - \check M_{\mu\nu}(\Phi)]|\Psi\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Преобразование (2.6) с условиями связей (2.8) и коммутационными соотношениями для поля $\Phi(x)$, переписанными в новых переменных $\xi(x)$

$$[\Phi(\xi(\vec x,t)), \dot\Phi(\xi(\vec y,t))]|\Psi\rangle = ig\,\delta(\vec x-\vec y)|\Psi\rangle, \quad (2.9)$$

называется каноническим преобразованием Боголюбова для группы Пуанкаре/4/ и позволяет в явном виде реализовать представление этой группы.

Для того чтобы явным образом выполнить преобразование Боголюбова, следует найти инвариантные переменные $\xi(x)$ и произвести замену переменных в соотношениях (2.8), (2.9), что и будет сделано в § 3 и § 4 соответственно.

§ 3. Построение инвариантных переменных

Запишем систему уравнений (2.7), определяющих функции $\xi(x)$ в инфинитезимальной форме: ($\alpha = 1,\dots,d$)

$$[P_\mu, \xi_\alpha] = ig\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x^\mu}, \quad [M_{\mu\nu}, \xi_\alpha] = ig\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\xi_\alpha . \quad (3.I)$$

Далее в этом разделе нам будет удобно положить g = I.

Существование решений уравнений (3.I) и их явный вид зависят от выбора конкретного представления алгебры группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ в терминах канонических операторов $(q, p;\ \theta, p_\theta)$. Выбор же представления определяется физическими соображениями. Переменные $\xi_\alpha(x)$ имеют смысл обобщенных квантовых координат, которые в состоянии покоя объекта переходят в классическом пределе в пространственно-временные координаты пространства Минковского x_α. Отметим, что ξ_α должны быть безразмерными величинами, так как преобразование (2.6) не содержит числового размерного параметра. При этих дополнительных физических предположениях уравнения (3.I) полностью определяют d (d-размерность пространства-времени) независимых инвариантных относительно преобразований группы Пуанкаре переменных ξ_α как функции аргументов x, q, p, θ, p_θ. В функциях ξ предполагается определенное упорядочение некоммутирующих пар операторов q, p и θ, p_θ, например, (qp), (θp_θ).

Рассмотрим теперь простейшее представление алгебры $\mathcal{P}$ через канонические операторы q и p, которое реализуется в пространстве функций $f(q)$ и задано с помощью соотношений:

$$P^\mu = p^\mu,\quad M^{\rho\sigma} = (q^\rho p^\sigma - q^\sigma p^\rho),$$
$$[p^\mu, q_\nu] = i\delta^\mu_\nu. \qquad (3.2)$$

В пространстве двух измерений ($d = 2$) уравнения (3.I) в представлении (3.2) имеют своим решением два линейных по x операторно-значных решения:

$$\xi_0(x) = x^\mu p_\mu + \frac{1}{2}(q^\mu p_\mu + p^\mu q_\mu) \equiv x^\mu P_\mu + D,$$
$$\xi_1(x) = \varepsilon^{\mu\nu}(x+q)_\mu p_\nu \equiv \varepsilon^{\mu\nu} x_\mu P_\nu + M_{01}. \qquad (3.3)$$

В выражении (3.3) оператор лоренцевских вращений $M_{01} \subset \mathcal{P}_2$, а оператор $D = \frac{1}{2}(q^\mu p_\mu + p^\mu q_\mu)$ имеет такие же коммутационные свойства с алгеброй $\mathcal{P}_2$, что и оператор растяжений.

Инвариантные переменные ξ_α ($\alpha = 0, I$) коммутируют между собой и полностью удовлетворяют всем требованиям, необходимым для использования этих функций как аргументов в правой части преобразования (2.6) в двумерных моделях, описывающих квантовое релятивистское движение одного протяженного объекта/2,4/.

Коммутирующие ковариантные координаты q_μ, выраженные через операторы из алгебры $\{\mathcal{P}_2, D\}$

$$q^0 = \frac{1}{2}\left\{D, \frac{P^0}{M^2}\right\} - \frac{1}{2}\left\{M_{01}, \frac{P^1}{M^2}\right\},$$
$$q^1 = \frac{1}{2}\left\{D, \frac{P^1}{M^2}\right\} - \frac{1}{2}\left\{M_{01}, \frac{P^0}{M^2}\right\}, \qquad (3.4)$$
$$M^2 = P_0^2 - P_1^2,$$

являются аналогами координат Ньютона-Вигнера в двумерном пространстве.

Очевидно, что в пространстве $d > 2$ измерений существует только одно линейное по x решение (3.I): $\xi_0(x) = x^\mu P_\mu + D$. Поэтому в общем случае представление (3.2) непригодно для описания релятивистского протяженного объекта, и следует расширить конфигурационное пространство представления, дополнив его угловыми переменными.

Однако если протяженный объект обладает свойством сферической симметрии, то оказывается достаточно построить две инвариантных координаты: "временную" и "радиальную"

$$\xi_0(x) = (x+q)^\mu P_\mu,\quad [\xi^1(x)]^2 = (x+q)^2 P^2, \qquad (3.5)$$

что находится в соответствии с результатами работ/9/.

Как уже отмечалось выше, рассмотрение более общего случая модели сферически несимметричного объекта требует перехода к более сложным представлениям. Для описания статического деформированного объекта мы выберем представление алгебры Пуанкаре в форме:

$$P^\nu = p^\nu,\quad M^{0i} = (q^0 p^i - q^i p^0) - \frac{\varepsilon^{ijk} p_j S^k}{P_0(P_0 + M)},$$
$$M_{ij} = (q^i p^j - q^j p^i) - \varepsilon^{ijk} S^k,\quad [p^\nu, q_\mu] = i\delta^\nu_\mu, \qquad (3.6)$$
$$[S^k, \varphi^l] = iA^{kl}(\varphi),\quad [S^i, S^j] = i\varepsilon^{ijk} S^k.$$

Это представление реализуется в пространстве функций $f(q, \varphi)$, где φ_α – углы пространственных вращений. По физическому смыслу коллективные координаты q и φ определяют положение деформированного объекта и его ориентацию в пространстве. Матрицы $A^{kl}(\varphi)$ в (3.5) задают вид генераторов группы вращений $S^k = iA^{kl}(\varphi)\,\partial/\partial\varphi^l$.

Функция $\xi_0(x) = (x+q)p$ очевидно удовлетворяет системе уравнений (3.I). Найдем теперь три других инвариантных решения системы уравнений (3.I), являющихся линейными по x и явно зависящих от угловых переменных. Для этой цели мы рассмотрим сначала уравнения, определяющие трансляционную инвариантность искомых решений,

$$i\frac{\partial}{\partial q_\nu}\,\xi = i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\xi\,. \tag{3.7}$$

Общим решением уравнений (3.7), очевидно, является функция $\xi(x, q, p, \varphi, s) = \xi(x+q, p, \varphi, s)$. С учетом полученного решения система уравнений, гарантирующая инвариантность решения относительно пространственных вращений, выглядит следующим образом:

$$[\,\varepsilon^{ijk} s^k, \xi\,] = i\left[q^i\frac{\partial}{\partial q^j} - q^j\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial p^i}p^j + \frac{\partial}{\partial p^j}p^i\right]\xi\,. \tag{3.8}$$

Линейные по x решения уравнений (3.8) имеют вид $\xi_i(x, q, p, \varphi, s) = R_{ij}(\varphi)X^j(x+q, p, s)$, где $R^{ij}(\varphi)$ – матрица трехмерных вращений, записанная, например, в параметризации Эйлера,

$$X^j(x) = [(x+q)^k + (x+q)^0 v(p)p^k]\,\Delta^{jk}(p) + w(p)\varepsilon^{jnm}p^n s^m,$$

$$\Delta^{jk}(p) = (\delta^{jk} + u(p)p^j p^k)\,z(p),$$

а $z(p)$, $v(p)$, $w(p)$ и $u(p)$ – произвольные функции, являющиеся скалярами относительно пространственных вращений переменных p

Функции z, v, w, u определим из решения оставшихся уравнений системы (3.I), которые выражают собой свойство инвариантности искомых функций относительно чисто лоренцевских вращений,

$$\frac{\varepsilon^{ijk}p^j}{p^0+M}[s^k, \xi] + \frac{\varepsilon^{ijk}s^k}{p^0+M}\left\{\frac{p^j}{M}\frac{\partial}{\partial q^0} + \left[\delta^{jk} + \frac{p^j p^k}{(p^0+M)M}\right]\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}\xi = \tag{3.9}$$

$$= \left[q^0\frac{\partial}{\partial q^i} + q^i\frac{\partial}{\partial q^0} + \frac{\partial}{\partial p^0}p^i + \frac{\partial}{\partial p^i}p^0\right]\xi\,.$$

После подстановки в уравнения (3.9) решения (3.8) получим уравнения на неизвестные функции u, v, w, u и найдем их решение:

$$\frac{1}{p_0}w = u = [M(M+p^0)]^{-1}, \quad v = -p_0^{-1}, \quad z = M\,.$$

Таким образом, мы показали, что в представлении (3.6) инвариантными относительно преобразований группы Пуанкаре (3.I) релятивистскими координатами являются переменные вида:

$$\xi^0(x) = (x+q)p, \quad \xi^i(x) = R^{ij}(\varphi)X^j(x), \tag{3.10}$$

где $$X^j(x) = \left[(x+q)^k - (x+q)^0\frac{p^k}{p^0}\right]\Delta^{jk}(p) + \frac{\varepsilon^{jnm}p^n s^m}{(M+p^0)},$$

$$\Delta^{jk}(p) = \left(\delta^{jk} + \frac{p^j p^k}{M(M+p^0)}\right)M\,.$$

Напомним, что под инвариантностью переменных (3.10) подразумевается следующее свойство: пусть $T_a = exp(iaP)$ и $U_\omega = exp(i\frac{M\omega}{2})$ есть унитарные операторы трансляций и лоренцевских вращений соответственно тогда

$$U_\omega T_a\,\xi(x)\,T_a^{-1}U_\omega^{-1} = \xi(\Lambda(\omega)(x+a))\,.$$

Очевидно, что

$$[\xi^0(x), \xi^i(x)] = 0, \tag{3.11}$$

так как $\xi^i(x)$ безразмерны.

Коммутационные соотношения между $\xi^i(x)$ имеют вид

$$[\xi^i(x), \xi^j(x)] = -ig\,\varepsilon^{ijk}\left[s^k - \frac{p^k(\vec{p}\vec{s})}{(M+p^0)^2}\right]. \tag{3.11'}$$

Таким образом, в представлении алгебры генераторов группы Пуанкаре, заданном соотношениями (3.6), существует 4 инвариантные релятивистские координаты $\xi^\mu(x)$ (3.10), линейные по x и имеющие между собой коммутационные соотношения (3.11). Некоммутативность величин $\xi^i(x)$ (3.11) ограничивает возможность построения регулярной теории возмущений по g для поля $\Phi(x)$ (2.6). Поэтому в следующем разделе, где мы используем переменные $\xi_\alpha(x)$ для построения поля в модели статического деформированного объекта, все величины теории рассматриваются только в двух первых неисчезающих порядках их разложения в ряд по параметру g (или некоторой степени g).

Переменные q^μ (3.10) явным образом выражаются через генераторы группы P^μ, $L = M^{\mu\nu}$, генератор растяжений D:

$$q^0 = -L^i\frac{p^i}{M^2} + D\frac{p^0}{M^2}\,,$$

$$q^k = -\tilde{L}^i\left(\delta^{ik} + \frac{p^i p^k}{M^2}\right)\frac{1}{p^0} + D\,\frac{p^k}{M^2},$$

где

$$\tilde{L}^i = L^i + \frac{\varepsilon^{ijk} p^j}{p^0 + M}\, S^k.$$

Эти четырехмерные координаты являются аналогом координат Ньютона-Вигнера в четырехмерном пространстве. Для них выполнены соотношения

$$[q^\mu, q_\nu] = 0, \quad [q_\mu, p^\nu] = -i\,\delta_\mu^{\ \nu}.$$

В заключение этого раздела мы рассмотрим самый общий случай модели неравномерно движущегося деформированного объекта.

Для этого выберем представление группы Пуанкаре, действующее в максимально расширенном конфигурационном пространстве параметров группы $(q^\mu, \theta^{\mu\nu})$:

$$P^\mu = p^\mu, \quad M^{\mu\nu} = q^\mu p^\nu - q^\nu p^\mu + S^{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

где

$$[p^\mu, q^\nu] = i g^{\mu\nu}, \quad [S^{\mu\nu}, \theta_{\rho\sigma}] = i A^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}(\theta),$$

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho}\right).$$

В этом представлении функции

$$\left\{\Lambda^\mu{}_\nu(\theta)(x+q)^\nu,\ \Lambda^\mu{}_\nu(\theta)p^\nu,\ (x+q)p,\ (x+q)^2,\ p^2\right\} \tag{3.13}$$

образуют полный набор инвариантных решений уравнений (3.I). В выражении (3.I3) $\Lambda^\mu{}_\nu(\theta)$ есть матрица преобразований Лоренца. Искомые релятивистские координаты выберем в виде

$$\xi^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu(\theta)(x+q)^\nu M \tag{3.14}$$

Переменные (3.I4) обладают свойствами:

$$U_\theta T_a \xi(x) T_a^{-1} U_\theta^{-1} = \xi(x'),$$

где $\quad x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu(\theta)\, x_\nu$

и $\quad [\xi^\mu(x), \xi^\nu(x)] = ig\left[(\Lambda q)^\mu(\Lambda p)^\nu - (\Lambda q)^\nu(\Lambda p)^\mu\right]$

Итак, нами показано, что с помощью выбора различных представлений алгебры Пуанкаре через канонические координаты (3.2), (3.6), (3.I2) могут быть построены операторнозначные инвариантные переменные $\xi_\alpha(x)$ (3.3), (3.5), (3.I0), (3.I4). Эти функции входят как аргументы в правую часть преобразования (I.6).

В следующем параграфе мы воспользуемся развитым в § 2 и 3 формализмом для построения теории возмущений в окрестности классического решения, характеризующего статический деформированный протяженный объект.

§ 4. Замена переменных

Вернемся к построению в модели (2.I) поля $\Phi(x)$, проквантованного с помощью канонических коммутационных соотношений (2.3). Трудности, связанные с разделением операторов $\mathcal{P}$ и поля $\Phi(x)$, а также некоммутативностью $\xi_\alpha(x)$ (3.II), делают законным поиск решения лишь в квазиклассическом приближении:

$$\Phi(\xi) = \Phi_0(\xi) + \sqrt{g}\,\Phi_1(\xi) + O(g). \tag{4.1}$$

Здесь $O(g)$ содержит остаточный член разложения поля $\Phi(\xi)$ и неопределенность, обусловленную проблемой упорядочения операторов ξ_α. Как видно из дальнейшего, в приближении (4.I) переменные можно рассматривать как C -числа, а выражения (2.8), (2.9), определяющие связи и коммутационные соотношения, достаточно считать операторными соотношениями.

Рассмотрим замену переменных в уравнениях движения, которые в общем виде имеют форму

$$\langle\Psi'|\left[\Box_x \Phi - U'(\Phi)\right](\xi(x))|\Psi\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Воспользовавшись явным видом переменных ξ (3.I2) и формулами

$$\frac{\partial \xi'^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \xi'^{\beta}}{\partial x_{\mu}} = \begin{pmatrix} P^2 & 0 \\ 0 & -M^2 \delta^{ij} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\mu}} = -M_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi'^{\mu} \partial \xi'_{\mu}} + O(g). \qquad (4.3)$$

Здесь M_0 - первый член в разложении

$$M = M_0 + \sqrt{g}\, M_1 + g\, M_2 + O(g^{3/2})$$

($M_1 = 0$ в силу выполнения условий связи см. ниже). Таким образом, получаем, что уравнения движения в нулевом и первом порядке разложения по $\sqrt{g}$ в новых переменных принимают вид

$$M_0^2 \Box_{\xi} \Phi_0 + U'(\Phi_0) = 0, \qquad (4.4)$$

$$M_0^2 \Box_{\xi} \Phi_1 + U''(\Phi_0) \Phi_1 = 0. \qquad (4.5)$$

Нелинейное уравнение (4.4) представляет собой классическое уравнение движения, соответствующее модели (2.1). Оно, по предположению, имеет нетривиальное решение $\Phi_0(\xi)$, характеризующее статический деформированный объект. В требуемом приближении уравнение (4.5) определяет вторично квантованное поле $\Phi_1(x)$.

Перейдем теперь к выводу тех ограничений, к которым приводит наложение условий связи (2.8) на поле $\Phi(x)$. Отметим, что ковариантность подхода обеспечивает правильную зависимость констант движения от линейной $\vec{v}$ и угловой $\vec{\Omega}$ скоростей. Поэтому условия связи рассмотрим на векторе состояния, соответствующем покоящемуся объекту ($\vec{v} = 0$, $\vec{\Omega} = 0$):

$$C_{H} = \langle H - \hat{H}(\Phi) \rangle \big|_{M,\, \vec{P} = 0,\, \vec{\Omega} = 0} \rangle \langle \Phi \rangle \qquad (4.6)$$

$$= \langle M - \int d\vec{x}\, [\tfrac{1}{2} (\partial_{\mu} \Phi)^2 + U(\Phi)] \rangle |M\rangle = 0.$$

Эти соотношения и уравнения (4.4) фиксируют коэффициенты разложения оператора M

$$M_0 = \int d\vec{x}\, [\tfrac{1}{2} (\partial_{\mu} \Phi_0)^2 + U(\Phi_0)], \qquad (4.7)$$
$$M_1 = 0.$$

Аналогично из связей C_{P_i}, $C_{M_{0i}}$, $C_{M_{ij}}$ получим, соответственно, условия:

$$\int d\vec{x}\, \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} = 0, \qquad (4.8а)$$

$$\int d\vec{x}\, \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \Phi_1 = 0, \qquad (4.8б)$$

$$\int d\vec{x}\, (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \Phi_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_0} = 0. \qquad (4.8в)$$

Представим поле $\Phi_1(\xi)$, являющееся решением (4.5),в виде разложения по полной системе решений уравнения:

$$-\frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}^2} f_{\alpha} + U''(\Phi_0) f_{\alpha} = \omega_{\alpha}^2 f_{\alpha},$$

$$\int d\vec{\xi}\, f_{\alpha}^{*}(\vec{\xi})\, f_{\beta}(\vec{\xi}) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (4.9)$$

Условия (4.8а), (4.8б) исключают из разложения компоненты, соответствующие нулевым модам:

$$f_i \sim \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi_i}, \quad f_{(ij)} \sim (\xi_i \partial_j - \xi_j \partial_i) \Phi_0.$$

Для стационарных классических решений Φ_0 условие (4.8б) выполняется, если условие (4.8а) удовлетворено. Тогда для поля Φ_1, являющегося решением уравнения (4.5) и подчиненного условиям (4.8), получим разложение:

$$\Phi_1(\vec{\xi}, \tau) = \sum_{\alpha \neq i, (ij)} (2\omega_{\alpha})^{-1/2} (a_{\alpha} e^{-i\omega_{\alpha} \tau} f_{\alpha}(\vec{\xi}) + \text{э.с.}) \qquad (4.10)$$

Найдем вид коммутационных соотношений (2.3) в новых переменных и условия квантования амплитуд a_α. С помощью преобразования (2.6) при удержании в разложении выражений (2.3) слагаемых не выше первого порядка по $\sqrt{g}$ получим

$$[\Phi_1(\vec{\xi},\tau), \Phi_1(\vec{\xi}',\tau+\lambda)] + i\lambda B(\vec{\xi},\vec{\xi}') = 0,$$

$$[\Phi_1(\vec{\xi},\tau), \Phi_1(\vec{\xi}',\tau+\lambda)] + i\lambda \frac{P_i}{\varepsilon} \partial_{\xi_i} B(\vec{\xi},\vec{\xi}') = i[\delta(\vec{\xi}-\vec{\xi}') - B(\vec{\xi},\vec{\xi}')],$$

$$[\dot{\Phi}_1(\vec{\xi},\tau), \dot{\Phi}_1(\vec{\xi}',\tau+\lambda)] + i[\lambda \frac{P_i}{\varepsilon}\partial_{\xi_i} \frac{P_j}{\varepsilon}\partial_{\xi'_j} + \frac{P_i}{\varepsilon}(\partial_{\xi_i} - \partial_{\xi'_i})] B(\vec{\xi},\vec{\xi}') = 0, \qquad (4.11)$$

где $\dot{\Phi}(\vec{\xi},\tau) = (\partial_\tau - \frac{P_i}{\varepsilon}\partial_{\xi_i})\Phi(\vec{\xi},\tau)$, $B(\vec{\xi},\vec{\xi}') = \sum_{\alpha=1,4} \chi_\alpha(\vec{\xi})\chi_\alpha(\vec{\xi}')$,

$\lambda = [\Delta^{-1}(p) R^{-1}(\varphi)(\xi - \xi')] P$.

Совместность разложения (4.10) и соотношений (4.11) приводит к правилу квантования:

$$[a_\alpha, a^+_{\alpha'}] = \delta_{\alpha\alpha'},$$
$$[a_\alpha, a_{\alpha'}] = [a^+_\alpha, a^+_{\alpha'}] = 0, \qquad (4.12)$$

что легко проверяется на векторе состояния покоя ($\lambda = 0$).

Таким образом, в искомом порядке теории возмущений поле Φ представимо в виде:

$$\Phi(x) = \Phi_c(\vec{\xi}) + \sqrt{g}\,\Phi_1(\vec{\xi},\xi_0) = \int d^4 f \exp[i f_\alpha \xi_\alpha(x)]\,\bar{\Phi}(f), \qquad (4.13)$$

где

$$\bar{\Phi}(f) = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \exp(-i z_\beta f_\beta)\,[\Phi_c(\vec{z}) + \sqrt{g}\,\Phi_1(\vec{z}, z_0)],$$

$\Phi_c(\vec{z})$ является решением классического уравнения (4.5), а вторично квантованное поле $\Phi_1(z)$ определяется разложением (4.10).

§ 5. Заключение

В данной работе с помощью преобразования Боголюбова нами изучена проблема построения процедуры квантования поля в окрестности нетривиального классического решения в четырехмерном пространстве.

Нами показано, что, выбирая различные представления алгебры Пуанкаре, можно описать все движения протяженного объекта. В квазиклассическом приближении построена процедура квантования локального гейзенберговского поля в модели статического деформированного протяженного объекта.

С этой целью в § 2 произведено преобразование к новым переменным, позволяющее строго учесть законы сохранения и отделить кинетическую часть задачи от динамической. В результате преобразования аргументами поля становятся специальные инвариантные переменные. Эти переменные являются комбинацией генераторов группы движения и в классическом пределе характеризуют движение протяженного объекта как целого. Как показано в § 3, явный вид инвариантных переменных зависит от выбора представления алгебры Пуанкаре, что в свою очередь определяется физической ситуацией. В работе рассмотрены представления, соответствующие движению лишь одного протяженного объекта. В § 4 для решения динамической части задачи использовано квазиклассическое приближение. Из-за некоммутативности инвариантных переменных теория возмущений строится лишь до первого порядка разложения поля Φ по $\sqrt{g}$ включительно.

Автор благодарит П.Н.Боголюбова, К.А.Свешникова и Н.Б.Скачкова за обсуждение вопросов, затронутых в статье, и результатов работы.

Литература

I. Christ N.H., Lee T.D. Phys.Rev., 1975, D12, No.6, 1606-1677;
Tomboulis E. Phys.Rev., 1975, D12, No.6, 1678-1684;
Разумов А.В. ТМФ, 1976, 30, № I, I6-30;

Корепин В.Е., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1975, 25, № 2, I47-I63.

2. Steinmann O. Nucl.Phys., 1977, B131, No.4/5, 459-476.

3. Умэдзава Х., Мацумото Х., Татики М. Термополевая динамика и конденсированные состояния. "Мир", М., I985, гл. IX.

4. Свешников К.А. ТМФ, I983, 55, № 3, 36I-384.

5. Боголюбов Н.Н. Укр.матем.ж., 1950, 2,3-24, см.также Избранные труды, т. 2, Киев, "Наукова думка", 1970.

6. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ, 1972, II, № 3, 317-330.

7. Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu. Nucl.Phys., 1980, B172, No.1, 44-56.

8. Steinmann O. Nucl.Phys., 1978, B145, 141-165;
Matsumoto H., Umezawa H., Papastamatiou N.J. Phys.Rev., 1983, D28, No.6, 1434-1440.

9. Steinmann O. Z.Physik C, Particles and Fields, 1980, 6, No.1, 139-154;
Yamanaka H., Matsumoto H., Umezawa H. Phys.Rev., 1981, D24, No. 10, 2607-2614;
Umezawa H. Phys.Rev., 1981, D24, No. 6, 1548-1561;
Дорохов А.Е. ТМФ, 1984, 61, № 1, 64-84.

10. Umezawa H. J.Math.Phys., 1983, 34, No.9, 2348-2365;
Papastamatiou N.J., Matsumoto H., Umezawa H. Progr. of Theor. Phys., 1983, 69, No.5, 1647-1665.

11. Matsumoto H., Semenoff G., Umezawa H. Progr. of Theor. Phys., 1983, 69, No.5, 1631-1646.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 августа 1985 года.

Дорохов А.Е. P2-85-632

Ковариантное квантование в моделях протяженных объектов

С помощью преобразования Боголюбова изучена проблема построения процедуры квантования поля в окрестности нетривиального классического решения в четырехмерном пространстве. В результате преобразования аргументами поля становятся специальные инвариантные переменные. Они являются комбинацией генераторов группы движения и в классическом пределе характеризуют движение протяженного объекта как целого. Показано, что, выбирая различные представления алгебры Пуанкаре, можно описать все движения протяженного объекта. В квазиклассическом приближении построена процедура квантования локального гейзенберговского поля в модели статического деформированного протяженного объекта.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Dorokhov A.E. P2-85-632

Covariant Quantization in Models of Extended Objects

By using the Bogolubov transformation the problem is studied of field quantization around a nontrivial classical solution in the four-dimensional space. The transformation results in construction of special invariant field arguments. The latter are combinations of the motion-group generators and define the motion of an extended object as a whole in the classical limit. By choosing different representations of the Poincare algebra it is shown that one can consider all motions of an extended object. Quantization of a local Heisenberg field is constructed in the quasiclassical approximation within the model of static deformed extended object.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985