

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-85-602

Ю. П. Иванов

ЭФФЕКТЫ КВАРКОВЫХ МАСС
В ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ КХД
И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОВ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1985

ВВЕДЕНИЕ

Впервые появившееся в рамках партонной модели^{/1/} понятие функций распределения (ФР) партонов по доле x продольного импульса адрона $f(x)$ сохранилось и в квантовой хромодинамике (КХД). КХД предложила на роль партонов кварки q и глюоны g , что привело к созданию модифицированной (квантово-хромодинамической) партонной модели^{/2-5/}, в которой ФР приобрели зависимость от квадрата переданного импульса

$$f(x) \rightarrow f(x, Q^2), \quad f = q, g. \quad (1)$$

Соответствующие эволюционные уравнения (ЭУ) позволяют найти $f(x, Q^2)$ по заданным при некотором $Q^2 = Q_0^2$ начальным условиям (НУ), т.е. распределениям $f(x, Q_0^2)$.

Строгое вычисление x -зависимости НУ остается пока за рамками существующих методов КХД (проблема больших расстояний). Для задания НУ пользуются предсказаниями тех или иных моделей^{/6/}, либо эмпирическими параметризациями, например, вида^{/7/}

$$f(x) = C x^\alpha (1-x)^\beta, \quad (2)$$

параметры которых определяются из анализа экспериментальных данных.

Возможен и другой подход: можно попытаться задать НУ, исходя из каких-либо общих положений. Например, согласно теореме^{/8/} об отсутствии эффектов больших масс m_h в области $Q^2 \ll m_h^2$, вполне естественно считать, что при достаточно малых Q^2 распределения тяжелых кварков равны нулю. (Для легких кварков такое предположение не проходит: константа сильного взаимодействия $\alpha_s(Q^2)$ растет с уменьшением Q^2 , и полученные по теории возмущений ЭУ перестают работать задолго до $Q^2 = m_c^2$).

Таким образом, можно попробовать найти функции распределения тяжелых кварков исходя из ФР легких кварков и безмассовых глюонов^{*}.

*) С этой точки зрения, задание только валентных распределений^{/5/} (т.е., например, для нуклона легких u и d кварков) без глюонов представляется непоследовательным.

Обычно используемые для этой цели ЭУ с фиксированным числом кварковых ароматов n_f и массами $m_q = 0$ соответствуют случаю

$$m_1^2, \dots, m_{n_f}^2 \ll Q^2 \ll m_{n_f+1}^2, \dots, \quad (3)$$

т.е. Q^2 вдали от порогов рождения кварков. Очевидно, что такая ситуация реально не реализуется: массы c - и b -кварков, например, достаточно близки, чтобы говорить о Q^2 , удовлетворяющих $m_c^2 \ll Q^2 \ll m_b^2$. Соответствующее обобщение безмассовых ЭУ было проведено в работах^{/9-11/}. В настоящей работе, основываясь на уравнениях для константы связи и моментов кварковых и глюонных распределений с учетом кварковых масс (§1), мы рассматриваем ФР тяжелых кварков, полученные путем численного решения массовых ЭУ с заданными НУ для легких кварков и глюонов (§2). Основные результаты суммированы в заключении.

§1. Массы кварков, α_s и эволюция моментов

Согласно^{/9/} уравнения для бегущей константы связи α_s и кварковых масс m_q образуют систему

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln Q^2} = -\frac{\alpha_s^2}{4\pi} \left[11 - \frac{2}{3} \sum_f (1 - 6\mu_f + 12 \frac{\mu_f^2}{\tau_f} \ln \frac{\tau_f + 1}{\tau_f - 1}) \right], \quad (4)$$

$$\frac{d m_q^2}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{4\pi} 8 m_q^2 \left[1 - \mu_q \ln \left(1 + \frac{1}{\mu_q} \right) \right],$$

где $\mu_f = m_f^2/Q^2$ и $\tau_f = \sqrt{1 + 4\mu_f}$. Используемое в^{/9/} определение массы кварка, приводим к бегущим $m_q = m_q(Q^2)$, исключает члены вида $\ln Q^2/m^2$ (трудности с легкими кварками $m_c^2 \ll Q^2$) и $\ln m^2/Q^2$ (для тяжелых кварков $m_h^2 \gg Q^2$ противоречит^{/8/}). Для безмассовых кварков $m_q = 0$ (либо в случае (3)) система (4) сводится к уравнению

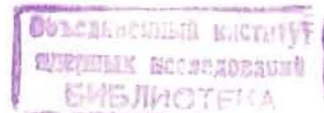
$$\frac{d\alpha_s}{d \ln Q^2} = -\frac{\alpha_s^2}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (5)$$

решение которого имеет стандартный вид

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} = \left[\left(11 - \frac{2}{3} n_f \right) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right]^{-1}, \quad (6)$$

где начальное условие уравнения (5) $\alpha_s(Q_0^2)$ включено в Λ .

Эволюция моментов ФР определяется матрицей аномальных размерностей γ_n ^{/9,10/}



$$\frac{d\langle f \rangle_n}{d \ln Q^2} = \gamma^n(\alpha_s, m) \langle f \rangle_n, \quad (7)$$

где $f = (u, d, \dots, \bar{u}, \bar{d}, \dots, G)$, а отличные от нуля элементы γ^n равны

$$\gamma_{qq}^n = \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{4}{3} \int_0^1 dy \left[\frac{-2y^n(1-y) + 4 \sum_{j=2}^n y^j + 2y^2}{y+M_q} - \frac{2M_q y^n(1-4y+y^2)}{(y+M_q)^2} \right]$$

$$\gamma_{qG}^n = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \int_0^1 dy y^n (1-y)^2 \left[\frac{1+ny}{y(1-y)+M_q} + \frac{M_q(1+y)}{(y(1-y)+M_q)^2} \right],$$

$$\gamma_{GG}^n = \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{8}{3} \int_0^1 dy y^2 (1-y)^{n-2} \left[\frac{n(1-y)+2}{y+M_q} - \frac{2M_q(1-y)^2}{(y+M_q)^2} \right], \quad (8)$$

$$\gamma_{GG}^n = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left[1 - \frac{12}{n(n-1)} - \frac{12}{(n+1)(n+2)} + 12 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} + \frac{2}{3} \sum \left(1 - 6M_q + 12 \frac{M_q^2}{T_q} \ln \frac{T_q+1}{T_q-1} \right) \right].$$

Таким образом, для нахождения эволюции моментов ФР необходимо сначала решить систему (4). Зная $\alpha_s(Q^2)$ и $m_q(Q^2)$, решение (7) можно представить в виде

$$\langle f(Q^2) \rangle_n = T \left[\exp \left(\int_{Q_0^2}^Q \gamma^n(\alpha_s(Q^2), m(Q^2)) \frac{dQ}{Q} \right) \right] \langle f(Q_0^2) \rangle_n \quad (9)$$

В безмассовом случае диагонализация γ^n позволяет найти решение (9) в явном виде. В массовом случае это выражение имеет скорее формальный характер (преобразование диагонализации зависит от Q^2), и практически более удобным оказывается не вычисление Т-экспоненты (9), а численное решение системы (7).

§2. Функции распределения тяжелых кварков

Для решения уравнений (4), (7), определяющих эволюцию ФР, необходимо задать начальные условия. Вид α_s и m_q фиксируем выбором

$$Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2;$$

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q_0^2) &= 0,4 \text{ ж),} \\ m_u(Q_0^2) &= m_d(Q_0^2) = m_s(Q_0^2) = 0, \\ m_c(Q_0^2) &= 1,5 \text{ ГэВ,} \\ m_b(Q_0^2) &= 4,5 \text{ ГэВ,} \\ m_t(Q_0^2) &= 40 \text{ ГэВ.} \end{aligned} \quad (10)$$

Результаты решения системы (4) с выбранными начальными условиями (10) приведены на рис.1.

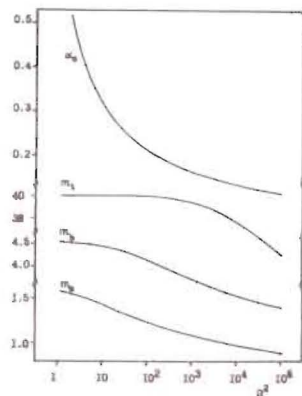


Рис. 1.
Зависимость бегущей константы связи α_s и масс тяжелых кварков m_q (ГэВ) от квадрата переданного импульса Q^2 (ГэВ²).

Начальные условия для ФР выбираем при Q^2 , соответствующем массе нуклона M в виде (2)

$$Q_0^2 = M^2: \quad f(x, Q_0^2) = \begin{cases} C_f x^{\alpha_f} (1-x)^{\beta_f}, & f = u, d, G, \\ 0 & f = \bar{u}, \bar{d}, s, \bar{s}, t, \bar{t}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\alpha_{u,d,t} = -1/2, -1/2, -1$ и $\beta_{u,d,t} = 3, 4, 5$, т.е. предполагается, что при малых Q^2 вклад $q\bar{q}$ -пар "моря" отсутствует, и ведущую роль играют глюонные и валентные распределения u - и d -кварков (для нуклона).

Выбор параметров α_f отвечает реджевскому $x \rightarrow 0$ поведению ФР (распределениям валентных кварков соответствует обмен несинглетной мезонной реджевской траекторией с интерсептом $1/2$, а распределениям глюонов - обмен вакуумной траекторией (помероном)); значения β_f являются наиболее характерными для существующих экспериментальных данных. Величины $C_{u,d}$ нормируются соотношениями (для протона):

ж) Выбор такого значения $\alpha_s(Q_0^2)$ соответствует (согласно (6), с обычно используемым при достигнутых Q^2 числом активных кварковых ароматов $n_f = 4$) $\Lambda = 300 \text{ МэВ}^{1/2}$.

$$\int_0^1 dx (u(x) - \bar{u}(x)) = 2, \quad (12)$$

$$\int_0^1 dx (d(x) - \bar{d}(x)) = 1,$$

а C_6 определяется долей полного импульса партонов *)

$$\sum_{f=q, \bar{q}, g} \int_0^1 dx x f(x) = 1. \quad (13)$$

На рис. 2. приведены результаты, полученные для вторых моментов ФР $\langle f \rangle_2$ (т.е. доли импульса соответствующей партонной компоненты).

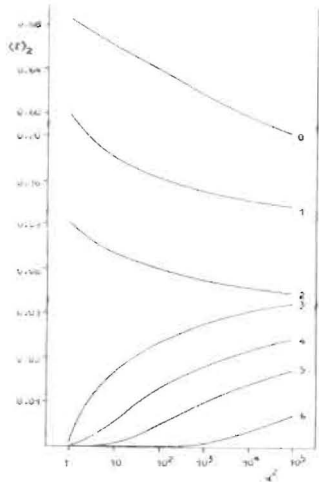


Рис. 2.
Зависимость долей импульса кварковых и глюонных распределений $\langle f \rangle_2$ от Q^2 (Гэв²). Кривые 0 ÷ 6 соответствуют \bar{c} , \bar{u} , \bar{d} , $\bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = \bar{s}$, $\bar{c} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{b}$, $\bar{t} = \bar{t}$.

Из рисунка видно, что включение кварковых ароматов зависит от массы: ФР кварка с массой m_q начинает заметно расти с $Q^2 \sim 2m_q^2$.

Зная эволюцию моментов, перейдем к определению ФР в x -представлении. воспользуемся широко применяемым для этой цели методом пробных функций [7, 14]: заданные параметризацией при некотором Q_0^2

$$f(x) = f(x, \{a\}), \quad (14)$$

ФР ищутся в том же виде путем выбора параметров $\{a\}$ минимизацией функционала:

*) В массовом случае выражение (13), строгое при $m_q = 0$, вообще говоря, нарушается. Однако нарушение имеет скорее принципиальное, а не практическое значение: отличие от 1 менее 1% для всех Q^2 [13].

$$\varphi^2(\{a(Q^2)\}) = \sum_n \left(\frac{\langle f(Q^2) \rangle_n - \langle f(\{a(Q^2)\}) \rangle_n}{\langle f(Q^2) \rangle_n} \right)^2 \quad (15)$$

где $\langle f(Q^2) \rangle_n$ - найденная эволюция моментов, а $\langle f(\{a(Q^2)\}) \rangle_n$ - моменты от ФР (14). Использование этого метода удобно также тем, что позволяет в компактной форме (т.е. в виде Q^2 -зависимости параметров $\{a\}$) представить эволюцию ФР. В нашем случае начальные условия (11) выбраны в виде (2), поэтому и решения ЭУ будем искать в виде

$$f(x) \sim x^\alpha (1-x)^\beta. \quad (16)$$

На рис. 3. представлено Q^2 -поведение параметров α и β для ФР кварков и глюонов. Определяющий вклад в вид ФР морских кварков, как

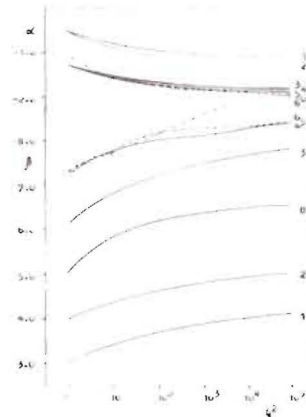


Рис. 3.
Зависимость параметров α и β кварковых и глюонных распределений в форме (16) от Q^2 (Гэв²). Обозначения те же, что и на рис. 2.

следует из ЭУ (7), (8) и НУ (11), вносят распределения глюонов. Из рис. 3 видно, что для этих распределений параметр α (определяющий поведение в области малых x) близок к α_6 и увеличивается для более тяжелых кварков, а параметр β (характеризующий асимптотику $x \rightarrow 1$) для легких кварков ($\bar{u} = \bar{d} = \bar{s} = \bar{s}$) равен $\beta_6 \approx \beta_6 + 1$ и для тяжелых ($\bar{c} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{b}$, $\bar{t} = \bar{t}$) - $\beta_6 \approx \beta_6 + 2$.

О том, насколько хорошо форма (16) воспроизводит x -зависимость эволюции ФР, можно судить по величине неточности, приходящейся в среднем на каждый член суммы N моментов (15)

$$\Delta(Q^2) = \left[\frac{1}{N} \varphi(\{a(Q^2)\}) \right]^{1/2}, \quad (17)$$

где $\{a(Q^2)\}$ соответствует минимуму (15). Как видно из рис. 4, достаточно хорошо в широком интервале по Q^2 сохраняют начальную форму (16)

распределения u - и d -кварков ($\Delta < 1\%$), основной вклад в которые вносит валентная (несинглетная) компонента. Неточность воспроизведения

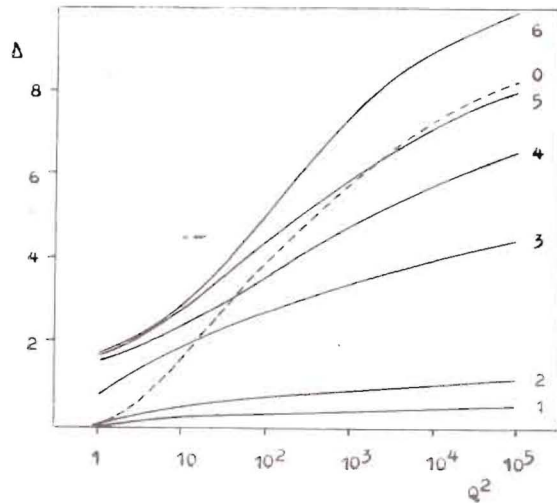


Рис. 4. Зависимость средних погрешностей Δ (17) воспроизведения моментов кварковых и глюонных распределений параметризацией (16) от Q^2 (ГэВ²). Обозначения те же, что и на рис.2.

эволюции глюонных и связанных с ними распределений кварков моря заметно растет с увеличением Q^2 ($\Delta \sim 5 \div 10\%$). В отличие от глюонных распределений, сохраняющих вблизи Q_0^2 исходную форму (16), распределения кварков моря сразу возникают в виде, не представимом в (16). Вначале малая ($\Delta \sim 1 \div 2\%$), эта погрешность заметно растет после порога соответствующего кварка. На рис. 5 приведено, для примера, сравнение $f(x, \{a(Q^2)\})$ (т.е. (14), (16) с параметрами, отвечающими минимуму (15)) с результатами, полученными с использованием приближенного численного метода [15] для перехода от моментов $\langle f(Q^2) \rangle_n$ к x -представлению $f(x, Q^2)$ (использовались выражения, дающие в области средних $0,2 \lesssim x \lesssim 0,7$ точность выше 0,5%). Из рисунка видно, что поведение

$$\Delta(x, Q^2) = \frac{f(x, Q^2) - f(x, \{a(Q^2)\})}{f(x, Q^2)} \quad (18)$$

аналогично поведению погрешности моментов (рис.4.), достигая для глюонов и тяжелых кварков 10-15%.

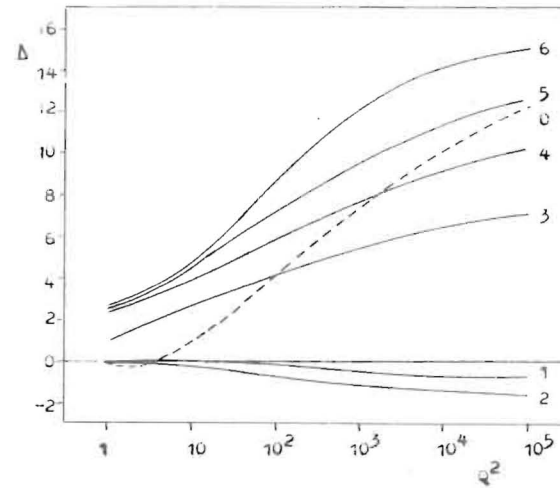


Рис.5. Зависимость погрешности Δ (18) воспроизведения кварковых и глюонных распределений параметризацией (16) от Q^2 (ГэВ²) при $x=0,47$. Обозначения те же, что и на рис.2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, применение эволюционных уравнений с учетом кварковых масс позволяет определить функции распределения тяжелых кварков на основе известных распределений легких (валентных) кварков и глюонов. Полученные в работе функции распределения тяжелых кварков обладают правильным пороговым поведением: в области $Q^2 \ll m_q^2$ распределения соответствующих кварков сильно подавлены и включаются с ростом Q^2 в зависимости от массы кварка (при $Q^2 \sim 2m_q^2$). Показано, что широко используемые для задания функций распределения параметризации вида (16) могут давать для тяжелых кварков при больших переданных Q^2 погрешности порядка 10-15%.

В заключение несколько слов о высших α_s и степенных (твистовых) $1/Q^2$ поправках. Все рассмотрение проводилось в лидирующем по α_s порядке (в следующем за лидирующим порядке пока получены только выражения для бегущей константы $\alpha_s / 16/$ и отсутствуют для аномальных размерностей γ) в приближении ведущего твиста (твиста = 2). Указанные поправки могут оказаться существенными в области малых Q^2 . Распределения же тяжелых кварков в этой области практически отсутствуют и эффективно включаются при достаточно больших Q^2 , где эти поправки малы. Кроме того, влияние степенных поправок, исчезающее в пределе $x \rightarrow 0$, на функции распределения тяжелых кварков незначительно даже в области малых и умеренных значений Q^2 в силу мягкой формы этих распределений (см., например, рис.3).

Автор благодарен В.А.Беднякову, П.С.Исаеву, С.Г.Коваленко и Д.В.Ширкову за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R.P. Phys.Rev.Lett., 1969, 23, p.1415;
Bjorken K.J., Paschos E.A. Phys.Rev., 1969, 185, p.1975.
2. Jaffe R.L. Phys.Rev., 1972, D5, p.2622;
Altarelli G., Parisi G., Petronzio R. Phys.Lett., 1976, B63, p.183;
Buras A.J. Nucl.Phys., 1977, B125, p.125.
3. Georgi H., Politzer H.D. Phys.Rev., 1974, D9, p.416;
Gross D.J., Wilczek F. Phys.Rev., 1974, D9, p.980.
4. Kogut J., Susskind L. Phys.Rev., 1974, D9, p.679, 706, 3391;
Altarelli G., Parisi G. Nucl.Phys., 1977, B125, p.298;
Докшицер Ю.Л. ЭТФ, 1977, 46, с.641.
5. Parisi G., Petronzio R. Phys.Lett., 1976, B62, p.331;
Lukin V.A. et al. Ann of Phys., 1977, 105, p.276;
Gluck R., Reya J. Nucl.Phys., 1977, B130, p.76.
6. Isaev P.N., Kovalenko S.G. Hadronic J., 1980, 3, p.919;
Исаев П.С., Коваленко С.Г. ЯФ, 1980, 32, с.756;
Линкевич А.Д. и др. ЯФ, 1983, 37, с.959;
Blazek M. Preprint IPT 12/83, Warsaw, 1983;
Бедняков В.А., Исаев П.С., Коваленко С.Г. ЯФ, 1984, 40, с.1312;
Ioffe V.L., Kaidalov A.V. Preprint ITEP-41, M., 1984.
7. Burns A.J., Gaemers K. Nucl.Phys., 1978, B132, p.249;
Bialas A., Buras A.J. Phys.Rev., 1980, D21, p.1825;
Bascoules B. et al. Preprint CRN/HC 83-07, Strasbourg, 1983.
8. Appelquist T., Corazzone J.C. Phys.Rev., 1975, D11, p.2856.
9. Georgi H., Politzer H.D. Phys.Rev., 1976, D14, p.1829.
10. Gottschalk T.D. Nucl.Phys., 1981, B191, p.227.
11. Qian S., Preprint ANL-HEP-PR-84-72, Argonne, 1984.
12. Иванов Ю.П., Исаев П.С. ЯФ, 1983, 38, с.744;
Bodek A. et al. Preprint FERMILAB-Pub-83/108-EXF, Batavia, 1983;
Бедняков В.А. и др. ЯФ, 1984, 40, с.770;
Bergami P. et al. Preprint CERN-EP/84-143, Geneva, 1984.
13. Edwards V.J., Gottschalk T.D. Nucl.Phys., 1982, B196, p.328.
14. Златев И.С. и др. ЯФ, 1982, 35, с.454;
Бедняков В.А. и др. ЯФ, 1982, 36, с.745.
15. Иванов Ю.П. Сообщение ОИЯИ P2-85-557, Дубна, 1985.
16. Yoshino T., Nagiwaru K. Preprint MAD/TH/113, TMU-HEP-8306, Tokyo, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа 1985 года

Иванов Ю.П.

P2-85-602

Эффекты кварковых масс в эволюционных уравнениях КХД
и функции распределения тяжелых кварков

Рассматриваются эволюционные уравнения КХД с учетом кварковых масс. Начальные условия этих уравнений, т.е. кварковые и глюонные функции распределения /ФР/, выбираются при достаточно малом Q^2 , что позволяет ограничиться распределениями легких /валентных/ кварков и глюонов. На основе численного решения эволюционных уравнений получены ФР тяжелых кварков, обладающие правильным пороговым поведением: в области $Q^2 \ll m_q^2 / m_q$ - масса соответствующего кварка/ распределение подавлено и эффективно включается при $Q^2 \sim 2m_q^2$. Рассматривается x -зависимость ФР. Показано, например, что для тяжелых кварков широко используемая параметризация вида $x^\alpha(1-x)^\beta$ может приводить к заметным /- 10 ÷ 15%/ отклонениям от правильных значений.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Ivanov Yu.P.

P2-85-602

Quark Mass Effects in QCD Evolution Equations
and Distribution Functions of Heavy Quarks

QCD evolution equations with accounting of quark masses are under consideration. Initial conditions of this equations, i.e. quark and gluon distribution functions (DF) are chosen at quite low Q^2 that allows one to use only distributions of light (valence) quarks and gluons. On the basis of numerical solution of evolution equations heavy quark DF have been obtained that obey the correct threshold behaviour: the distribution is suppressed at $Q^2 \ll m_q^2$ (m_q - mass of corresponding quark) and effectively turned on at $Q^2 \sim 2m_q^2$. x -dependence of DF is under investigation. It is shown that, for example, for heavy quarks widely used parametrization of type $x^\alpha(1-x)^\beta$ may lead to the notable difference (- 10 ÷ 15%) in comparing with the exact values.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985