

85-6



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

СЗЗЧ.1  
3013/85

P2-85-6

Д.В.Ширков

ПЕРЕНОРМИРОВКИ  
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1985

## ВВЕДЕНИЕ

Непременным атрибутом современной квантовой теории поля /КТП/ является операция устранения ультрафиолетовых расходимостей - т.н. процедура перенормировки. Она проводится в процессе решения квантовых уравнений и в целом представляется в виде особого предписания, формулируемого дополнительно к основному закону движения. Последнее обстоятельство, а также невозможность прямой физической интерпретации перенормировки вследствие ее сингулярного характера вызывает ощущение эстетической, а иногда и принципиальной, неудовлетворенности /см., например, <sup>1/</sup> и, особенно, <sup>2/</sup>/. В последние годы общий интерес к перенормировкам значительно возрос, что имеет, по крайней мере, две причины.

С одной стороны, исторически процедура перенормировок явилась логической, хотя и довольно сложной, основой квантово-полевой ренормгруппы, давшей мощный метод анализа ультрафиолетового поведения в КТП и, с незначительными модификациями, оказавшейся эффективной в ряде областей физики, весьма далеких от микрочастиц и их взаимодействий.

В то же время понятие перенормируемости в самой квантовой теории поля приобретает все большее значение. Критерий перенормируемости сыграл важную эвристическую роль при кварковом расширении стандартной модели электрослабых взаимодействий и в формировании понятия поколений фермионов. В новейших исследованиях по моделям суперобъединения, имеющих общую стратегическую цель построения квантовополевой схемы, объединяющей все четыре взаимодействия, включая гравитацию, на основе суперсимметрий /точнее, супергравитации/, требование перенормируемости играет центральную роль. Далеко не случайно, что содержание понятия перенормируемости вновь и вновь привлекает внимание ведущих физиков-теоретиков /см., например, <sup>3, 4/</sup>/.

Ниже мы хотим обсудить наиболее важные физические и формальные аспекты квантовой теории поля, так или иначе связанные с перенормировками. Среди них - математическая корректность операции перенормировки, формулируемой с позиций теории обобщенных функций; физическая сущность параметров, используемых при формулировке перенормированных выражений и, в частности, смысл т.н. феномена размерной трансмутации; связь с ренормализационной группой и, на этой основе, обсуждение физической картины перенормировки в отсутствие расходимостей.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Процедура устранения ультрафиолетовых расходимостей технически распадается на два этапа: вспомогательную регуляризацию и вычитание сингулярных вкладов, т.е. собственно перенормировку. Наиболее естественной казалась регуляризация обрезанием в импульсном пространстве, легко ассоциируемая с "наглядной" операцией размазки точечных частиц в пространстве-времени. При этом подразумевалось, что локальную квантовую теорию поля можно представлять как надлежащий предельный случай нелокальной. Более детальное исследование показывает, что такую концепцию последовательно провести не удастся. Возникают трудности с сохранением симметрий, присущих локальной квантовой теории поля, таких, как симметрии относительно преобразований Пуанкаре, калибровочных преобразований и т.п. Этот разочаровывающий факт был осознан довольно давно - в конце 40-х годов, вследствие чего к регуляризации стали относиться как к формальному техническому приему, не пытаясь вложить в нее каких-либо физических ассоциаций. Некоторое время весьма популярной в квантовой электродинамике /КЭД/ была регуляризация Паули-Вилларса /а также ее простейший вариант - регуляризация Фейнмана/, формально опирающаяся на дополнительные вспомогательные поля с квантами очень большой, но конечной массы, обладающие к тому же индефинитной метрикой. В 50-х и 60-х годах такие поля никаких физических ассоциаций не вызывали и воспринимались чисто формально. Такое же отношение вызвала т.н. аналитическая регуляризация <sup>/5/</sup>, а также предложенная в начале 70-х годов размерная регуляризация <sup>/6/</sup>, т.е. регуляризация изменением числа измерений пространственно-временного многообразия на нецелое число  $D = 4 - \epsilon$ , отличающееся от 4 на бесконечно малую величину.

После явного вычисления регуляризованных фейнмановских интегралов наступает очередь вычитания сингулярностей. В вычтенных выражениях соответствующий параметр регуляризации /импульс обрезания, масса Паули-Вилларса  $M$  или бесконечно малый параметр размерной регуляризации  $\epsilon = 4 - D$  / устремляется к своему "физическому" значению ( $M \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ ). Возникающие сингулярные в этом пределе слагаемые, пропорциональные степеням и логарифмам  $M$  или степеням величины  $\epsilon^{-1}$ , выделяются и затем "вычитаются", т.е. отбрасываются. Эта последняя, наиболее существенная, операция может быть формализована различными путями.

Обычно используют операцию введения в исходный лагранжиан т.н. контрчленов, т.е. дополнительных слагаемых, с сингулярными коэффициентами /пропорциональными  $M^2$ ,  $\ln M$  и  $1/\epsilon$  /, вклады которых "погашают" сингулярные составляющие матричных элементов: Какого-либо приемлемого физического истолкования операции добавления сингулярных контрчленов дать не удастся. Эту, откровенно формальную, процедуру можно заменить на другую. Дело в том, что в пространственно-временном представлении проб-

лема ультрафиолетовых расходимостей перемещается на световой конус, где пропагаторы Штюкельберга-Фейнмана имеют особенности по переменной квадрата 4-интервала  $s^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2$ . Поскольку матричные элементы выражаются через произведения пропагаторов, то приходится иметь дело с произведениями подобных сингулярностей, например о квадратами дельта-функции Дирака  $\delta^2(s^2)$ . С математической точки зрения проблема сводится к задаче определения операции умножения обобщенных функций. Соответствующий раздел современной математики возник в 30-40-х годах <sup>/7,8/</sup>, будучи вызван к жизни использованием объектов типа дельта-функции в работах по теоретической физике и особенно - теории релятивистских полей.

С этой точки зрения проблема устранения расходимостей была рассмотрена в начале 50-х годов Н.Н.Боголюбовым и О.С.Парасюком <sup>/9/</sup>. Доказанная ими теорема о перенормировках с полной математической строгостью исчерпывающе решает задачу получения конечных выражений для элементов матрицы рассеяния в рамках теории возмущений, без обращения к контрчленам. Рецептурная часть теории Боголюбова-Парасюка, т.н. R-операция Боголюбова <sup>/10/</sup>, в течение последних трех десятилетий является практической основой получения однозначных конечных результатов в перенормируемых квантовополевых теориях.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ

Традиционный взгляд на физическое содержание термина "перенормировка" непосредственно связан с его смысловым значением и восходит к наглядным представлениям о частицах, "одеваемых" тем или иным взаимодействием. Множители перенормировки связывают "голые" и "одетые" значения физических параметров, таких, как массы, константы связи и некоторые другие. Такой упрощенный взгляд долгое время поддерживался примером КЭД, где традиционная формулировка операции перенормировки, основанной на операции вычитания в импульсном пространстве, сводится в конечном счете к переопределению двух параметров - массы и заряда электрона.

Как выяснилось впоследствии, в общем случае не существует однозначного соответствия между исходными, "голыми" параметрами, входящими в лагранжиан, и перенормированными, "одетыми" величинами, имеющими непосредственный физический смысл, с помощью которых параметризуются результаты вычислений и наблюдаемые на опыте характеристики частиц и процессов их взаимодействий. Даже в наиболее простом с этой точки зрения случае квантовой электродинамики результаты вычислений, взятые в произвольной схеме перенормировки /например, в схеме размерной перенормировки/, помимо перенормированных массы и заряда электрона содержат зависимость от дополнительного параметра  $\mu$ , имею-

щего размерность массы. Таким образом, например, в безмассовой электродинамике /или в ультрафиолетовом пределе обычной КЭД с массой/ в результате перенормировки возникает размерный параметр, играющий роль масштаба в импульсном пространстве, параметр, аналога которому нет в исходном лагранжиане. Феномен "самопроизвольного" возникновения размерного параметра получил название размерной трансмутации.

Второй хорошо известный и весьма поучительный пример связан с моделью псевдоскалярного взаимодействия фермионов юкавского типа. В результате перенормировки в ней "самопроизвольно" возникает четверное самодействие псевдоскалярного поля, характеризуемое своей константой связи. Модель с одной константой связи в результате перенормировки превращается в теорию с двумя механизмами взаимодействия и двумя независимыми константами связи.

Более новые примеры связаны с явлением спонтанного нарушения симметрии и эффектом Хиггса. Здесь происходят такие сложные с физической точки зрения явления, как "передача" физических степеней свободы от скалярного поля калибровочному векторному, приобретающему массу и т.п. Весьма любопытна ситуация в стандартной модели электрослабого взаимодействия, где возникает возможность /11/ различного выбора характеристик, подвергающихся независимым перенормировкам. Наиболее экстремальная ситуация, по-видимому, имеет место в теории сильного взаимодействия. В то время как исходный квантохромодинамический лагранжиан содержит массы кварков и константу кварк-глюонного взаимодействия, данные наблюдений параметризуются через характеристики адронов.

Таким образом, в общем случае соответствие между параметрами исходного лагранжиана и конечными величинами, используемыми для описания опытных данных является весьма сложным даже на качественном уровне. В этой ситуации термин "перенормировка", вообще говоря, оказывается неадекватным каким-либо числовым операциям, сводящимся к изменению нормировок масс, зарядов и полевых операторных функций. Его следует воспринимать более опосредствованно, как процедуру установления соответствия между исходными, затравочными, параметрами лагранжиана и физическими независимыми, используемыми для параметризации результатов вычислений и наблюдаемых величин.

### 3. РАЗМЕРНАЯ ТРАНСМУТАЦИЯ И РЕНОРМГРУППА

Параметр шкалы  $\mu$ , возникающий в процессе перенормировки, с чисто математической точки зрения на первый взгляд приводит к "дополнительной" однопараметрической степени свободы, а по существу к возникновению новой своеобразной симметрии, лежащей в основе ренормализационной группы. Этот параметр представляет собой неотъемлемый, чрезвычайно важный с физической точки зрения атрибут процедуры перенормировки и заслуживает особого обсуждения.

Прежде всего следует снять покров таинственности с обстоятельств его рождения. Наиболее просто это можно сделать на материале перенормировки заряда в квантовой электродинамике. Эта перенормировка, в силу тождества Уорда, целиком определяется перенормировкой фотонного пропагатора, причем произвол в выборе нормировки последнего полностью переносится на его инвариантный 4-импульсный аргумент, т.е. на импульс фотона, взаимодействующего с электроном. Физическое обсуждение наиболее адекватно проводится с использованием ренормгруппового понятия инвариантного /иначе эффективного или "бегущего"/ заряда электрона. Эта функция  $\bar{\alpha}(Q)$  описывает изменение с импульсом /а ее надлежащий фурье-образ  $\bar{\alpha}(r)$  - с расстоянием/ квадрата заряда электрона. Сам факт возникновения такой зависимости имеет чисто квантовую природу. Она отвечает эффекту частичной экранировки заряда электрона за счет процессов поляризации вакуума, сводящихся к виртуальной диссоциации фотона-пробника на электрон-позитронные пары.

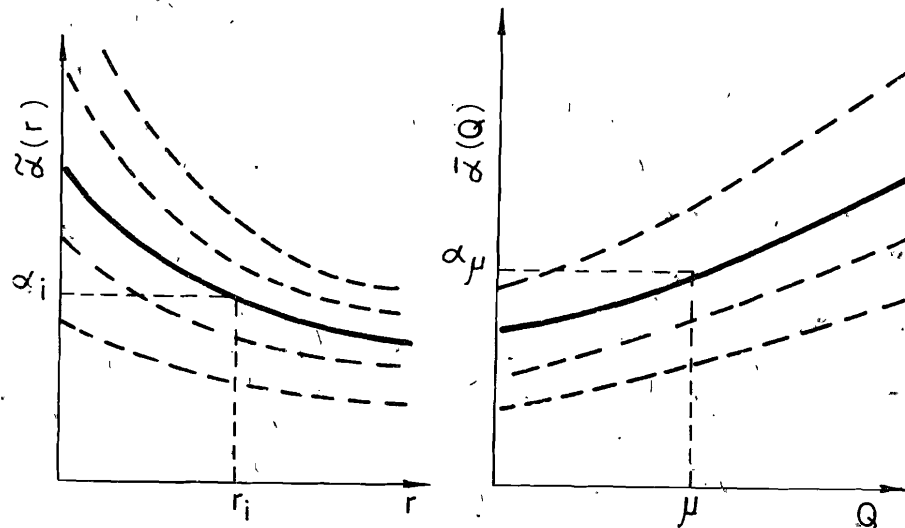


Рис. 1

Рис. 2

Качественно зависимость  $\bar{\alpha}$  от  $r$  изображена семейством кривых на рис.1. Каждая кривая соответствует возможному поведению эффективного заряда до наложения условия соответствия с измеримым на опыте значением заряда электрона. Обычно это условие накладывают в виде  $\bar{\alpha}(\infty) = 1/137$ , т.е. вводят одно число. Ясно, что в более общем случае каждая из кривых на рис.1 может быть однозначно определена точкой на плоскости  $(r, \bar{\alpha})$ , т.е. выбрана путем задания двух параметров  $r_i$  и  $\alpha_i$  таким образом, что  $\bar{\alpha}(r_i) = \alpha_i$ . В импульсном представлении /см. рис.2/ соответственно задают значение модуля импульса  $|Q| = \mu$  и отвечающее ему

значение заряда  $a_\mu = \bar{a}(\mu)$ . С этой точки зрения параметр шкалы  $\mu$ , возникающий в процессе перенормировки, есть просто модуль 4-импульса фотона, используемого для измерения заряда. Ясно отсюда, что возникновение нового /по сравнению с классическим лагранжианом/ параметра физически связано с переходом к квантовому рассмотрению, а не с сингулярным характером ультрафиолетовых вкладов и их перенормировками.

Таким образом, дополнительный параметр /в общем случае их может быть несколько/ есть результат перехода от системы классических полей, описываемых исходным лагранжианом, к соответствующей квантовой задаче. В общем случае хорошо известно, что переход от классической системы к квантовой не является однозначным. Одной классической системе, вообще говоря, отвечает набор /может быть бесконечный/ квантовых систем. Выбор между ними требует введения и фиксирования некоторых дополнительных параметров. Эта идея восходит к известным высказываниям Нильса Бора <sup>12/</sup>/см. также <sup>13/</sup>, приведшим к формулировке принципа дополнительности, а также принципа цельности. Их суть состоит в том, что для полной спецификации квантовой системы необходимо задать ее "макроскопическое окружение", т.е. указать макроскопические приборы и условия измерения. Именно они и характеризуются дополнительными параметрами.

Однако роль параметра шкалы этим не исчерпывается. Как было отмечено выше, он приводит к существованию ренормгруппы. Для того, чтобы изложить соответствующую логику рассуждений, вернемся к рис. 2 и допустим, что выбор одной из кривых произведен условием  $\bar{a}(Q^2 = \mu^2) = a_\mu$  и что мы имеем дело с безмассовой однозарядной теорией, например, безмассовой электродинамикой. Эффективный заряд можно теперь представить в виде функции от двух безразмерных аргументов  $Q^2/\mu^2$  и  $a_\mu$ , т.е. записать в виде  $\bar{a}(Q^2/\mu^2, a_\mu)$ . При таком виде записи следует иметь в виду, что пара  $(\mu, a_\mu)$  соответствует любой точке уже избранной кривой. Рассмотрим теперь операцию перехода от одной пары, например,  $(\mu_1, a_1)$ , к другой  $(\mu_2, a_2)$ , лежащей на той же самой кривой - см. рис. 3. Ясно, что функция, описывающая избранную кривую, может быть с равным успехом параметризована как одной из них, так и другой. Иными словами, должно иметь место равенство

$$\bar{a}(Q^2/\mu_1^2, a_1) = \bar{a}(Q^2/\mu_2^2, a_2),$$

где, очевидно,  $a_2 = \bar{a}(\mu_2^2/\mu_1^2, a_1)$ . Комбинируя полученные соотношения, приходим к известному функциональному уравнению для эффективного заряда  $\bar{a}(tr, a) = \bar{a}(t, \bar{a}(r, a))$ . Это уравнение, как и его обобщения на более сложные случаи, лежит в основании математического аппарата метода ренормализационной группы. Более популярное дифференциальное уравнение получают из него простым дифференцированием. Мы не будем здесь этим заниматься.

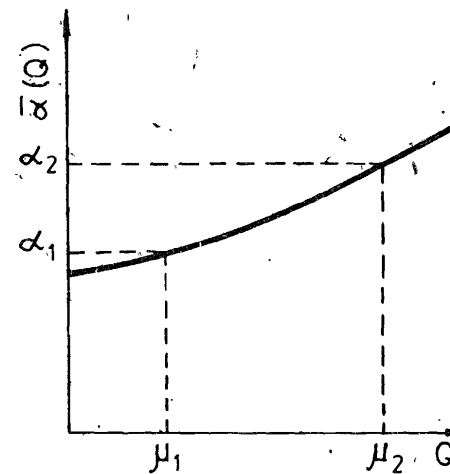


Рис. 3

быть охарактеризовано радиусом размазки электрона  $R_1$  и электрическим зарядом  $e_1$  такого размазанного электрона. Преобразование, эквивалентное ренормгрупповому, можно представить себе как переход от одной нелокальной аппроксимации к другой. Таким образом, в отличие от вышеизложенного построения, "ренормгруппа Гелл-Манна и Лоу" есть группа преобразований внутри множества нелокальных моделей КЭД. Поэтому она весьма родственна "ренормгруппе Вильсона" в статистической физике, где составляющие подгруппы преобразования состоят в кадановском укрупнении элементарных микроскопических блоков, например, блоков спиновых решеток.

#### 4. ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ОТСУТСТВИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ

Одним из весьма сильных побудительных мотивов попыток построения моделей суперобъединения всех четырех фундаментальных взаимодействий является надежда на получение единой теории, свободной от ультрафиолетовых расходимостей <sup>18/</sup>. Осуществление подобной программы приведет к весьма любопытной картине с точки зрения перенормировок. В области достаточно низких энергий мы будем иметь ситуацию, полностью эквивалентную современной с "рецептурной" точки зрения, т.е. с точки зрения практических вычислений. Полная же физическая картина будет весьма близка к схеме вычислений при регуляризации по Паули-Вилларсу, но без проведения операции вычитаний. Роль компенсирующих расходимости слагаемых будут играть вклады гипотетических сверхтяжелых частиц типа лептокварков с массами порядка  $10^{15} - 10^{19}$  ГэВ. Произойдет как бы "материализация духов" Паули-Вилларса. Эф-

Отметим, что приведенная здесь цепочка рассуждений и вывод уравнения были впервые даны в работе Боголюбова и Ширкова <sup>14/</sup>, идейно восходящей к пионерской работе Штюкельберга и Петермана <sup>15/</sup>. С другой стороны, качественная картина, лежащая в основе известной работы Гелл-Манна-Лоу <sup>16/</sup>, приводящая к эквивалентным уравнениям, имеет весьма отличное физическое содержание. Как это особенно ясно из обсуждения, приведенного в <sup>17/</sup>, в основе этой картины лежит представление о наборе нелокальных приближений к локальной квантовой электродинамике, каждое из которых может

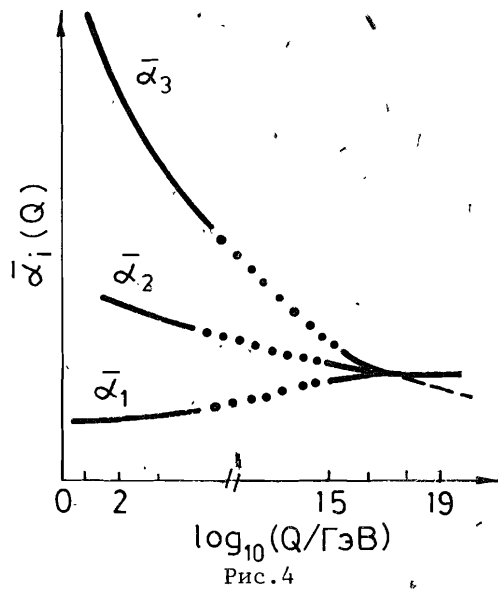


Рис. 4

эффективные константы различных взаимодействий после полного объединения сольются в единую кривую /см. рис. 4/, которая быстро выйдет на постоянную асимптотику. Асимптотическое значение константы связи  $\bar{\alpha}(Q = \infty) = \alpha_0$  окажется равным константе связи в исходном лагранжиане. Возникнет ситуация, формально эквивалентная выходу интегральных кривых на рис. 1 на постоянные значения при  $g \rightarrow \infty$ . Ясно, что в таком случае выбор между кривыми /в рассматриваемом случае — между наборами объединяющихся кривых/ может быть сделан лишь указанием одного числа  $\alpha_0 = \bar{\alpha}(\infty)$ . Однако возможность "стандартной" параметризации

с помощью пары  $(\mu, \alpha_\mu)$  остается. Она оказывается более удобной с практической точки зрения, так как по-прежнему апеллирует к конкретной физической ситуации, т.е. к какому-либо прецизионному измерению при фиксированном значении импульсных характеристик. Более того, она является более удобной с общей точки зрения, так как не чувствительна к деталям полной или неполной /пунктирная кривая в правой части рис. 4/ компенсации расходимостей.

Это обстоятельство находится в прямом соответствии с физическим содержанием понятия перенормируемости, которое заключается в том, что «влияние "малых" расстояний на физику "больших" расстояний может быть эффективно учтено с помощью ограниченного числа конечных параметров»<sup>/19/</sup>.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. "Наука", М., 1979, с.403.
2. Дирак П.А.М. Пути физики. Энергоатомиздат, М., 1983, с.40.
3. t'Hoofst G: Phys.Rep., 1984, 10, p.129-159.
4. Nambu Y. Phys.Rep., 1984, 10, p.237-258.
5. Gustafson T. Ark.f.Math., Asta Fys., 1946, 34A, No.2; Speer E.R. Journ.Math.Phys., 1968, 9, p.1404.
6. t'Hoofst G., Veltman M. Nucl.Phys., 1972, B44, p.189.
7. Соболев С.Л. Мат.сб., 1936, т.1/43/, с.39.
8. Schwartz L. Theory des distributions, Paris, 1950.

9. Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С. Acta Math., 1957, vol.97, p.227.
10. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, изд.3-е и 4-ое. "Наука", М., 1976 и 1984, §§29,30.
11. Бардин Д.Ю. и др. ЯФ, 1982, т.35, с.1220.
12. Бор Н. Phys.Rev., 1935, vol.48, p.696-702; см.перевод: Нильс Бор. Избранные труды. "Наука", М., 1971, т.2, с.180-191.
13. Бор Н. Избранные труды. "Наука", М., 1971, т.2, с.526-532.
14. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. ДАН СССР, 1955, т.103, с.203-206.
15. Stueckelberg E.C., Petermann A. Helv.Phys.Acta, 1953, vol.26, p.499-520.
16. Gell-Mann M., Low F. Phys.Rev., 1954, vol.95, p.1300-13.
17. Wilson K. Rev.Mod.Phys., 1983, 55, p.583-599.
18. Hawking S. CERN Courier, 1981, vol.21, p.73; Townsend P.K. CERN Preprint, TH-3066, Geneva, 1981.
19. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. "Наука", М., 1980 /см.стр.260/.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 февраля 1985 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник "Краткие сообщения ОИЯИ". В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.

Theoretical physics.

Experimental techniques and methods.

Accelerators.

Cryogenics.

Computing mathematics and methods.

Solid state physics. Liquids.

Theory of condensed matter.

Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

*JINR Rapid Communications* will be issued regularly.



Ширков Д.В.

P2-85-6

Перенормировки в квантовой теории поля

Рассматривается формальная сторона и анализируется физическое содержание процедуры перенормировок в КТП, ее связь с ренормализационной группой и наличием ультрафиолетовых расходимостей. Показано, что возникновение размерного "параметра шкалы" связано с квантованием, а не устранением бесконечностей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод автора

Shirkov D.V.

P2-85-6

Renormalizations in Quantum Field Theory

We consider formal aspects and physical contents of the renormalization procedure in quantum field theory, as well as its relation to ultraviolet divergences and the renormalization group. We show that the occurrence of the dimensional "parameter of scale" is due to quantization rather than to the subtraction of infinities.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985